Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

Д. Ф. Кузнецов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОВТОРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ СТРАТОНОВИЧА, ОСНОВАННОЕ НА КРАТНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ

§1. Введение

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и винеровский случайный процесс $\mathbf{w}_t \in R^n$ с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим неубывающую совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$, определенную на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ и связанную с $\mathbf{w}_t$ так, что $\mathbf{w}_t$ – $\mathcal{F}_t$-измерим при каждом $t \in [0,T]$.

Введем в рассмотрение класс $\mathcal{M}_2([0,T])$ измеримых по совокупности переменных (t, ω) и $\mathcal{F}_t$ измеримых при всех $t \in [0,T]$ функций $\xi_t \stackrel{\rm def}{=} \xi(t,\omega) \ :\ \ [0,T] \times \Omega \ \to\ R^1$ таких, что $\int\limits_0^T \mathbf{E}\left\{(\xi(t,\omega))^2\right\} dt < \infty$, $\mathbf{E}\left\{(\xi(t,\omega))^2\right\} < \infty$ для всех $t \in [0,T]$. Введем на классе $\mathcal{M}_2([0,T])$ норму: $\|\xi\|_{2,T} = \left(\int_0^T \mathbf{E}\left\{(\xi(t,\omega))^2\right\} dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим процесс $\left\{\eta_\tau^{(i)},\ \tau \in [t,T]\right\}$ вида:

$$\eta_\tau^{(i)} = \eta_t^{(i)} + \int\limits_t^\tau a_s ds + \int\limits_t^\tau b_s d\mathbf{w}_s^{(i)}, \tag{1}$$

где $a_s^2,\ b_s^2 \in \mathcal{M}_2([t,T])$ и $\mathbf{E}\left\{(b_s - b_\tau)^4\right\} \leqslant C|s-\tau|^\gamma$ для всех $s, \tau \in [t,T]$ и некоторых $C, \gamma \in (0,\infty)$; $\mathbf{w}_s^{(0)} = s$; $\int\limits_t^\tau b_s d\mathbf{w}_s^{(i)}$ – интеграл Ито $(i = 1, \ldots, m)$.

Работа выполнена при поддержке министерства общего и профессионального образования РФ (грант No. 97-0-1.8-71) и РФФИ (грант No. 99-01-00719) .

Обозначим интеграл $\int\limits_t^{*T} \eta_s^{(i)} d\mathbf{w}_s^{(j)}$ следующим образом:

$$\int\limits_t^{*T} \eta_s^{(i)} d\mathbf{w}_s^{(j)} = \int\limits_t^{T} \eta_s^{(i)} d\mathbf{w}_s^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}} \int\limits_t^{T} b_s ds \ \text{с. в. } 1, \tag{2}$$

здесь и далее 1_A – индикатор множества A. Интеграл $\int\limits_t^{*T} \eta_s^{(i)} d\mathbf{w}_s^{(j)}$ называют стохастическим интегралом Стратоновича.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (далее СДУ) Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + A(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{w}_t; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_t \in R^n$ – решение СДУ (3) и предположим, что неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : R^n \times [0, T] \to R^n$, $A(\mathbf{x}, t) : R^n \times [0, T] \to R^{n\times m}$ удовлетворяют условиям существования и единственности, в смысле стохастической эквивалентности, решения СДУ (3) [8], а случайная величина $\mathbf{x}_0 \in R^n$ независима от $\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_0$.

Из [1, 2] следует, что при определенных условиях решение СДУ Ито (3) разлагается для $s > t$ в унифицированные ряды Тейлора–Ито

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_t + \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k,i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{A}_r} \times$$

$$\times C_{jl_1\dots l_k}^{(i_1\dots i_k)}(\mathbf{x}_t, t)\frac{(s-t)^j}{j!} J_{(l_1\dots l_k)s,t}^{(i_1\dots i_k)} + R_{s,t}^{(r+1)} \ \text{с. в. } 1, \tag{4}$$

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_t + \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k,i_1,\dots,i_k)\in\mathcal{A}_r} \times$$

$$\times \tilde{C}_{jl_1\dots l_k}^{(i_1\dots i_k)}(\mathbf{x}_t, t)\frac{(s-t)^j}{j!} \tilde{J}_{(l_1\dots l_k)s,t}^{(i_1\dots i_k)} + R_{s,t}^{(r+1)} \text{с. в. } 1, \tag{5}$$

где $\mathcal{A}_r = \{(k, j, l_1, \dots, l_k, i_1, \dots, i_k) : 1 \leqslant k + j + \sum\limits_{p=1}^{k} \leqslant r;\ i_1, \dots, i_k = 1, \dots m;\ k, j, l_1, \dots, l_k = 0,\ 1, \dots\}$, $R_{s,t}^{(r+1)}$ – остаточный член в интегральной форме [1, 2],

$$J_{(l_1\dots l_k)s,t}^{(i_1\dots i_k)} = \int\limits_t^{s} (t - t_k)^{l_k} \dots \int\limits_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6}$$

$$\tilde{J}^{(i_1\ldots i_k)}_{(l_1\ldots l_k)s,t}=\int\limits_t^s(s-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}(s-t_1)^{l_1}d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}, \qquad (7)$$

а также разлагается для $s>t$ [3–5] в ряды Тейлора–Ито

$$\mathbf{x}_s=\mathbf{x}_t+\sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{M}_r}\times$$

$$\times G^{(i_1\ldots i_k)}_{\lambda_1\ldots\lambda_k}(\mathbf{x}_t,t)I^{(i_1\ldots i_k)}_{(\lambda_1\ldots\lambda_k)s,t}+D^{(r+1)}_{s,t}\ \text{с. в. } 1, \qquad (8)$$

и Тейлора–Стратоновича

$$\mathbf{x}_s=\mathbf{x}_t+\sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,i_1,\ldots,i_k)\in\mathcal{M}_r}\times$$

$$\times G^{*(i_1\ldots i_k)}_{\lambda_1\ldots\lambda_k}(\mathbf{x}_t,t)I^{*(i_1\ldots i_k)}_{(\lambda_1\ldots\lambda_k)s,t}+D^{*(r+1)}_{s,t}\ \text{с. в. } 1, \qquad (9)$$

где $\mathcal{M}_r=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,i_1,\ldots,i_k):\ \lambda_l\in\{0,1\},\ i_l=0$ при $\lambda_l=0$ и $i_l=1,\ldots,m$ при $\lambda_l=1;\ l=1,\ldots,k;\ k=1,\ldots,r\}$; $D^{(r+1)}_{s,t}$, $D^{*(r+1)}_{s,t}$ – остаточные члены в интегральной форме [3–5],

$$I^{(i_1\ldots i_k)}_{(\lambda_1\ldots\lambda_k)s,t}=\int\limits_t^s\ldots\int\limits_t^{t_2}d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_k}, \qquad (10)$$

$$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{(\lambda_1\ldots\lambda_k)s,t}=\int\limits_t^{*s}\ldots\int\limits_t^{*t_2}d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_k}. \qquad (11)$$

$C^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}(\mathbf{x}_t,t)$, $\tilde{C}^{(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}(\mathbf{x}_t,t)$, $G^{(i_1\ldots i_k)}_{\lambda_1\ldots\lambda_k}(\mathbf{x}_t,t)$, $G^{*(i_1\ldots i_k)}_{\lambda_1\ldots\lambda_k}(\mathbf{x}_t,t)$ в (4), (5), (8), (9) определяются [1, 2, 3–5] через операторы диффузии и сноса формулы Ито и процессы $\mathbf{a}(\mathbf{x}_t,t)$, $A(\mathbf{x}_t,t)$.

Таким образом проблема численного решения СДУ Ито возникающая при решении широкого круга задач (см., например, [5]) сводится к совместному численному моделированию совокупностей ПСИ вида (6), (7), (10) или (11).

В [3] предложен метод разложения ПСИ вида (11), основанный на разложении процесса $\left\{\mathbf{w}_t-\frac{t}{\Delta}\mathbf{w}_\Delta,\ t\in[0,\Delta],\ \Delta>0\right\}$ в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффициентами. Для получения разложения ПСИ вида (11) по этому методу необходимо подставить в интеграл (11) разложения Фурье процессов

$\mathbf{w}_t^{(i_l)}$; $l=1,\ldots,k$ и осуществить достаточно сложные преобразования. В рамках этого подхода не удается получить компактное выражение для общего члена разложения ПСИ Стратоновича кратности k. В результате в [3, 5, 6] получены лишь разложения ПСИ вида (11) кратностей $1 \div 3$. Кроме этого указанный метод позволяет использовать для разложения ПСИ только тригонометрическую систему функций, являющуюся, как будет видно далее, далеко не оптимальной в смысле среднеквадратической сходимости разложений и их простоты.

Другой и более общий метод разложения ПСИ Стратоновича вида

$$\int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{12}$$

$\psi_l(\tau) \in C^1_{[t,T]}$; $l=1,\ldots,k$ (здесь и далее $C^1_{[t,T]}$ – множество непрерывно дифференцируемых на промежутке $[t,T]$ функций), предлагается в настоящей работе и основывается на представлении ПСИ вида (12) в виде кратного стохастического интеграла с последующим разложением его подынтегральной функции в кратный ряд Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t,T])$ системам функций. В результате можно получить общую формулу разложения ПСИ вида (12) кратности k, а также использовать в ней различные полные ортонормированные системы функций.

Забегая вперед покажем, что разложения ПСИ вида (12), полученные с помощью рассматриваемого в данной работе метода и полиномиальной системы функций вида:

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j\left(\left(x - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right), \tag{13}$$

где $P_j(x)$-полином Лежандра, сходятся существенно быстрее и кроме того проще по виду, чем аналогичные разложения, полученные с помощью того же метода, но с использованием тригонометрической системы функций вида:

$$\phi_j(s) =$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j=0 \\ \sqrt{2} sin \dfrac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при} \quad j=2r-1; \ r=1,2,\ldots \\ \sqrt{2} cos \dfrac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при} \quad j=2r \end{cases} \tag{14}
$$

Действительно, пусть

$$
I_{l_1\ldots l_k T,t}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{15}
$$

а $I_{l_1\ldots l_k T,t}^{*(i_1\ldots i_k)q}$ – аппроксимация ПСИ $I_{l_1\ldots l_k T,t}^{*(i_1\ldots i_k)}$. Тогда с помощью рассматриваемого далее метода и системы функций (14) имеем:

$$
I_{0_{T,t}}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},
$$

$$
I_{1_{T,t}}^{*(i_1)q} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right],
$$

$$
I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r} \Bigl\{ \zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} +
$$

$$
+ \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \Bigr\} \Biggr], \tag{16}
$$

$$
\mathbf{E}\left\{ \left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r^2} \right) \ (i_1 \neq i_2), \tag{17}
$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$, а $\phi_j(s)$ имеет вид (14).

С помощью того же метода и системы функций (13) имеем:

$$
I_{0_{T,t}}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},
$$

$$
I_{1_{T,t}}^{*(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right),
$$

$$
I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i-1}^{(i_1)} \right\} \right],
$$

$$\mathbf{E}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{4}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right)\ (i_1\neq i_2),\quad (18)$$

где $\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $i_1,\ i_2=1,\ldots,m$, а $\phi_j(s)$ имеет вид (13).

§2. Соотношения между ПСИ Стратоновича и Ито

Введем следующие обозначения:

$$J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}=\int\limits_t^{*T}\psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{*t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},\qquad (19)$$

$$J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}=\int\limits_t^{T}\psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},\qquad (20)$$

$$J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}^{s_l,\ldots,s_1}\stackrel{\rm def}{=}\prod_{q=1}^{l}\mathbf{1}_{\{i_{s_q}=i_{s_q+1}\neq 0\}}\times$$

$$\times\int\limits_t^{T}\psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_{s_l+3}}\psi_{s_l+2}(t_{s_l+2})\int\limits_t^{t_{s_l+2}}\psi_{s_l}(t_{s_l+1})\psi_{s_l+1}(t_{s_l+1})$$

$$\times\int\limits_t^{t_{s_l+1}}\psi_{s_l-1}(t_{s_l-1})\ldots\int\limits_t^{t_{s_1+3}}\psi_{s_1+2}(t_{s_1+2})\int\limits_t^{t_{s_1+2}}\psi_{s_1}(t_{s_1+1})\psi_{s_1+1}(t_{s_1+1})$$

$$\times\int\limits_t^{t_{s_1+1}}\psi_{s_1-1}(t_{s_1-1})\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})}dt_{s_1+1}d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})}\ldots$$

$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})}dt_{s_l+1}d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},\qquad (21)$$

где $(s_l,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kl}$; $\psi_p(\tau)\in C_{[t,T]}^1$, $i_p=0,\ 1,\ldots,m$ $(p=1,\ldots,k)$; $\mathcal{A}_{kl}=\{(s_l,\ldots,s_1)\colon s_q>s_{q-1}+1;\ q=2,\ldots,l;\ s_l,\ldots,s_1=1,\ldots,k-1\}$; $l=1,\ldots,\left[\frac{k}{2}\right]$; $[x]$ – целая часть числа x; $\psi^{(k)}=(\psi_k,\ldots,\psi_1)$.

Сформулируем лемму о связи ПСИ $J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}$, $J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}$.

Лемма 1.

$$J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}=J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}+$$

$$+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1}\quad \textit{с. в. } 1. \tag{22}$$

Доказательство. Согласно (22) при $k=1$ имеем очевидное равенство: $J\left(\psi^{(1)}\right)_{T,t}=J^*\left(\psi^{(1)}\right)_{T,t}$ с. в. 1. При $k=2$ из (22) получаем:

$$J^*\left(\psi^{(2)}\right)_{T,t}=J\left(\psi^{(2)}\right)_{T,t}+\frac{1}{2}J\left(\psi^{(2)}\right)_{T,t}^{1}\quad \text{с. в. } 1. \tag{23}$$

Покажем, что равенство (12) справедливо. Для этого рассмотрим процесс $\eta_\tau^{(i_1)}=\psi_2(\tau)\int\limits_t^\tau\psi_1(s)d\mathbf{w}_s^{(i_1)}$ и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$d\eta_\tau^{(i_1)}=\int\limits_t^\tau\psi_1(s)d\mathbf{w}_s^{(i_1)}d\psi_2(\tau)+\psi_1(\tau)\psi_2(\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i_1)}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что диффузионный коэффициент процесса $\eta_\tau^{(i_1)}$ равен $\mathbf{1}_{\{i_1\neq 0\}}\psi_1(\tau)\psi_2(\tau)$. Далее с помощью (2) получаем (23). Таким образом (22) доказано при $k=1,2$. По предположению индукции с. в. 1 имеем:

$$J^*\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}=\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(\tau)J\left(\psi^{(k)}\right)_{\tau,t}d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})}+$$

$$+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(\tau)J\left(\psi^{(k)}\right)_{\tau,t}^{s_r,\ldots,s_1}d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})}. \tag{25}$$

Используя формулу Ито и (2) аналогично (23) с. в. 1 получаем:

$$\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(\tau)J\left(\psi^{(k)}\right)_{\tau,t}d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})}=J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}+\frac{1}{2}J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}^{k}, \tag{26}$$

$$\int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J\left(\psi^{(k)}\right)_{\tau,t}^{s_r,\ldots,s_1} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} =$$

$$= \begin{cases} J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} & \text{при} \quad s_r = k-1 \\ J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} + \frac{1}{2} J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}^{k,s_r,\ldots,s_1} & \text{при} \quad s_r < k-1. \end{cases} \tag{27}$$

После подстановки (25) и (27) в (25) и перегруппировки слагаемых приходим к с. в. 1 соотношениям:

$$J^*\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t} =$$

$$= J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} \tag{28}$$

при k-четном и

$$J^*\left(\psi^{(k'+1)}\right)_{T,t} =$$

$$= J\left(\psi^{(k'+1)}\right)_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k'}{2}\right]+1} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k'+1,r}} J\left(\psi^{(k'+1)}\right)_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} \tag{29}$$

при $k' = k+1$ – нечетном. Из (28) и (29) получаем с. в. 1:

$$J^*\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t} =$$

$$= J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J\left(\psi^{(k+1)}\right)_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1}. \ \square \tag{30}$$

§3. Разложение ПСИ Стратоновича

Определим на $[t,T]^k$ функцию:

$$K(t_1,\ldots,t_k) = \prod_{l=1}^{k} \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, \ \ k \geqslant 2. \tag{31}$$

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t,T])$.

Определим класс $H([t,T]) \subset L_2([t,T])$ кусочно-гладких на открытом интервале (t,T) и ограниченных на промежутке $[t,T]$ функции $f(x)$ для которых ряд Фурье $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j\phi_j(x)$ с коэффициентами $C_j = \int\limits_t^T f(x)\phi_j(x)dx$ сходится во всякой внутренней точке x промежутка $[t,T]$ к величине $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$ и равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$, а также сходится при $x=t,T$.

Замечание 1. Здесь и далее сходимость рядов Фурье понимается в смысле нормы в пространстве $L_2([t,T])$.

Определим функции $C_{j_{q-1}\ldots j_1}(t_q,\ldots,t_k)$; $q=1,\ldots,k$ следующим образом:

$$C_{j_{q-1}\ldots j_1}(t_q,\ldots,t_k) \stackrel{\rm def}{=}$$

$$\stackrel{\rm def}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^T K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{q-1}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_{q-1};\ \ 2\leqslant q\leqslant k,$$

$$C_{j_0\ldots j_1}(t_1,\ldots,t_k) \stackrel{\rm def}{=} K(t_1,\ldots,t_k).$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1. $\psi_i(\tau)\in C^1_{[t,T]}$; $i=1,\ldots,k$;

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *– полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве* $L_2([t,T])$;

3. $G_{j_{q-1}\ldots j_1}(t_q,\ldots,t_k)\in H([t,T])$ *по переменной* t_q; $q=1,\ldots,k$.

Тогда ПСИ Стратоновича $J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}$ *разлагается в следующий сходящийся в среднем степени* n; $n\in N$ *кратный ряд*

$$J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \qquad (32)$$

где $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ *– стандартные гауссовские величины при* *различных i_l или j_l (если $i_l \neq 0$);*

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k. \qquad (33)$$

Для доказательства теоремы 1 докажем ряд утверждений.

Определим на $[t,T]^k$ функцию $\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ следующим образом:

$$\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}=K(t_1,\ldots,t_k)+$$

$$+\prod_{l=1}^k\psi_l(t_l)\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\frac{1}{g(s_1,\ldots,s_r)}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^r \mathbf{1}_{\{t_{s_l}=t_{s_l+1}\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq s_1,\ldots,s_r}}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}, \qquad (34)$$

где $g(s_1,\ldots,s_r)=(q_1+1)!\ldots(q_{p_k}+1)!$; $p_k=1,\ 2,\ldots,[\frac{k}{2}]$; $q_1,\ldots,q_{p_k}$ – длины всех возможных подпоследовательностей типа $g,\ g-1,\ldots,g-m$; $g=1,\ldots,k-1$; $m=0,\ 1,\ldots,k-2$, входящих в последовательность $s_r,\ldots,s_1$; $s_r>\ldots>s_1$; $s_r,\ldots,s_1=1,\ldots,k-1$.

В частности, из (34) при $k=2$ и 3 получаем:

$$\mathcal{B}^{\pm}_1\{K(t_1,t_2)\}=\prod_{l=1}^2\psi_l(t_l)\left(\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\right),$$

$$\mathcal{B}^{\pm}_2\{K(t_1,t_2,t_3)\}=\prod_{l=1}^3\psi_l(t_l)\Biggl(\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}}+\frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}}\Biggr).$$

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 функция $\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ разлагается в любой внутренней точке гиперкуба $[t,T]^k$ в следующий кратный ряд Фурье*

$$\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^k\phi_{j_l}(t_l), \qquad (35)$$

где $C_{j_k\ldots j_1}$ имеет вид (33). При этом кратный ряд (35) сходится на границе Γ_k гиперкуба $[t,T]^k$ и сходится равномерно к функции $\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K(t_1,\ldots,t_k)\}$ в областях ее непрерывности.

Доказательство. Рассмотрим случаи $k=2$ и 3. Введем следующие функции:

$$K'(t_1,t_2)=\begin{cases}\psi_2(t_1)\psi_1(t_2),\ t_1\geqslant t_2\\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2),\ t_1\leqslant t_2\end{cases};\ t_1,t_2\in[t,T],$$

$$K_1(t_1,t_2,t_3)=\begin{cases}\psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1),\ t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1),\ t_2\leqslant t_1\leqslant t_3\\ \psi_1(t_3)\psi_3(t_2)\psi_2(t_1),\ t_3\leqslant t_1\leqslant t_2\\ \psi_2(t_3)\psi_3(t_2)\psi_1(t_1),\ t_1\leqslant t_3\leqslant t_2\\ \psi_1(t_3)\psi_2(t_2)\psi_3(t_1),\ t_3\leqslant t_2\leqslant t_1\\ \psi_2(t_3)\psi_1(t_2)\psi_3(t_1),\ t_2\leqslant t_3\leqslant t_1\end{cases};\ t_1,t_2,t_3\in[t,T],$$

$$K_2(t_1,t_2,t_3)=\begin{cases}\psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1),\ t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1),\ t_2\leqslant t_1\leqslant t_3\\ 0\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,t_2,t_3\in[t,T],$$

$$K_3(t_1,t_2,t_3)=\begin{cases}\psi_2(t_3)\psi_3(t_2)\psi_1(t_1),\ t_1\leqslant t_3\leqslant t_2\\ \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1),\ t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\\ 0\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,t_2,t_3\in[t,T].$$

Докажем лемму при $k=2$. Очевидно, что ряд Фурье $S(t_1,t_2)=\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}\sum\limits_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\prod\limits_{l=1}^{2}\phi_{j_l}(t_l)$ равномерно сходится к функции $K(t_1,t_2)$ при $t_1\neq t_2$; $t_1,t_2\in(t,T)$, т.е. в точках непрерывности функции $K(t_1,t_2)$ и конечен на границе $[t,T]^2$. Таким образом остается показать, что $S(t_1,t_1)=\frac{1}{2}\prod\limits_{l=1}^{2}\psi_l(t_1)$; $t_1\in(t,T)$. Рассмотрим разложение Фурье $S'(t_1,t_2)$ функции $K'(t_1,t_2)$:

$$S'(t_1,t_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}C'_{j_2j_1}\prod_{l=1}^{2}\phi_{j_l}(t_l),\qquad(36)$$

где $C'_{j_2j_1}=\int\limits_{[t,T]^2}K'(t_1,t_2)\prod\limits_{l=1}^{2}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2$. Ясно, что $S'(t_1,t_2)$ сходится равномерно к $K'(t_1,t_2)$ во всех внутренних точках $[t,T]^2$, т.к. там $K'(t_1,t_2)$ непрерывна. Кроме этого, в силу замены порядка интегрирования имеем:

$$C'_{j_2j_1}=C_{j_2j_1}+C_{j_1j_2}. \qquad (37)$$

Подставляя (37) в (36) и полагая $t_1=t_2$ в (36) получим, что $S'(t_1,t_1)=\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)=2S(t_1,t_1)$, т.е. $S(t_1,t_1)=\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)$; $t\in(t,T)$. Лемма доказана при $k=2$.

Докажем лемму при $k=3$.

Очевидно, что ряд Фурье

$$S(t_1,t_2,t_3)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)$$

равномерно сходится к функции $K(t_1,t_2,t_3)$ при $t_1\neq t_2$, $t_2\neq t_3$, $t_1\neq t_3$; $t_1,t_2,t_3\in(t,T)$, т.е. в точках непрерывности функции $K(t_1,t_2,t_3)$ и конечен на границе $[t,T]^3$. Таким образом остается показать, что

$$S(t_1,t_1,t_1)=\frac{1}{6}\prod_{l=1}^{3}\psi_l(t_1), \qquad (38)$$

$$S(t_2,t_2,t_3)=\frac{1}{2}\psi_3(t_3)\prod_{l=1}^{2}\psi_l(t_2), \qquad (39)$$

$$S(t_1,t_3,t_3)=\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\prod_{l=2}^{3}\psi_l(t_3). \qquad (40)$$

Запишем разложения Фурье $S_i(t_1,t_2,t_3)$ функций $K_i(t_1,t_2,t_3)$; $i=1,2,3$ соответственно:

$$S_i(t_1,t_2,t_3)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty}C^{(i)}_{j_3j_2j_1}\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l), \qquad (41)$$

где $C^{(i)}_{j_3j_2j_1}=\int\limits_{[t,T]^3}K_i(t_1,t_2,t_3)\prod\limits_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3$. Заметим, что $S_1(t_1,t_2,t_3)$ сходится равномерно к $K_1(t_1,t_2,t_3)$ в любой внутренней точке $[t,T]^3$, т.к. там $K_1(t_1,t_2,t_3)$ непрерывна, а ряды $S_2(t_1,t_2,t_3)$, $S_3(t_1,t_2,t_3)$ сходятся равномерно к $K_2(t_1,t_2,t_3)$ и

$K_3(t_1,t_2,t_3)$ соответственно в областях их непрерывности, исключая точки границы $[t,T]^3$.

В силу замены порядка интегрирования имеем:

$$C^{(1)}_{j_3j_2j_1}=C_{j_3j_2j_1}+C_{j_3j_1j_2}+C_{j_2j_1j_3}+C_{j_2j_3j_1}+C_{j_1j_2j_3}+C_{j_1j_3j_2}, \quad (42)$$

$$C^{(2)}_{j_3j_2j_1}=C_{j_3j_2j_1}+C_{j_3j_1j_2}, \quad (43)$$

$$C^{(3)}_{j_3j_2j_1}=C_{j_3j_2j_1}+C_{j_2j_3j_1}. \quad (44)$$

Подставляя (42), (43) и (44) поочередно в (41) при $i=1,\ 2,\ 3$ соответственно и полагая в (41) $t_1=t_2=t_3$ при $i=1$, $t_1=t_2$ при $i=2$ и $t_2=t_3$ при $i=3$ получим путем несложных преобразований равенства (38)–(40). Лемма доказана при $k=3$. Доказательство при $k>3$ аналогично. Лемма доказана. □

Рассмотрим разбиение промежутка $[t,T]$ вида:

$$t=\tau_0<\ldots<\tau_N=T,$$

$$\Delta_N=\max_{0\leqslant j\leqslant N-1}|\tau_{j+1}-\tau_j|\to 0 \text{ при } N\to\infty. \quad (45)$$

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1

$$J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\psi_l(\tau_{j_l})\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}} \ \textit{с. в. 1}, \quad (46)$$

где $\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}=\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l+1}}-\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}$; $i_l=0,\ 1,\ldots,m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ – *разбиение промежутка* $[t,T]$, *удовлетворяющее условию* (45).

Доказательство. Нетрудно видеть, что интегральная сумма интеграла $J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}$ может быть представлена в условиях леммы в виде допредельного выражения в правой части (46) и величины, которая стремится в ср.кв. смысле к нулю при $N\to\infty$. □

Замечание 2. Нетрудно видеть, что если $\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}$ в (46) при некотором $l\in\{1,\ldots,k\}$ заменить на $\left(\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}\right)^p$, $i_l\neq 0$, то в интеграле $J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}$ дифференциал $d\mathbf{w}^{(i_l)}_{t_l}$ заменится на dt_l при $p=2$. Если же $p=3,4,\ldots$, то правая часть (46) обратится с. в. 1 в ноль. Если $\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_{j_l}}$ в (46) при некотором $l\in\{1,\ldots,k\}$ заменить на $(\Delta\tau_{j_l})^p$; $p=2,3,\ldots$, то правая часть в (46) также обратится с. в. 1 в ноль.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1} \Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right) \prod_{l=1}^{k} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^T \Phi(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = J[\Phi]_{T,t}^{(k)}, \qquad (47)$$

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left\{ \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1} - \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{N-2} \right\} \times$$

$$\times \Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right) \prod_{l=1}^{k} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J[\Phi]_{T,t}^{\Gamma_k}. \qquad (48)$$

Пусть $\mathcal{D}_k = \{(t_1,\ldots,t_k)\colon t \leqslant t_1 < \ldots < t_k \leqslant T\}$, а $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$ – граница $\mathcal{D}_k$. Будем писать $\Phi(t_1,\ldots,t_k) \in C^1(\mathcal{D}_k)$, если выполнены условия:

(AI) $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывно дифференцируема в $\mathcal{D}_k$;

(AII) $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ ограничена на $\Gamma_{\mathcal{D}_k}$;

Используя рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства леммы 3, нетрудно показать, что если $\Phi(t_1,\ldots,t_k) \in C^1(\mathcal{D}_k)$, то

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}) \prod_{l=1}^{k} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \ \text{с. в. } 1, \qquad (49)$$

где $I[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ понимается как повторный интеграл Ито.

Введем обозначения:

$$\mathbf{1}_{j_l,j_{l+1}}(j_{q_1},\ldots,j_{q_2},j_l,j_{q_3},\ldots,j_{q_{k-2}},j_l,j_{q_{k-1}},\ldots,j_{q_k})$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (j_{q_1},\ldots,j_{q_2},j_{l+1},j_{q_3},\ldots,j_{q_{k-2}},j_{l+1},j_{q_{k-1}},\ldots,j_{g_k}), \qquad (50)$$

где $l \in N$; $l \neq q_1,\ldots,q_2,q_3,\ldots,q_{k-2},q_{k-1},\ldots,q_k \in N$;

$$S_N^{(k)}(a) = \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1,\ldots,j_k)};$$

$$\mathcal{C}^{+}_{s_r}\ldots\mathcal{C}^{+}_{s_1}\{S_N^{(k)}(a)\}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1}\sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1}\ldots\sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1}\sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\times$$

$$\times\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)} a_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)};$$

$$\mathcal{C}^{*}_{s_r}\mathcal{C}^{+}_{s_{r-1}}\ldots\mathcal{C}^{+}_{s_1}\{S_N^{(k)}(a)\}=\mathcal{C}^{+}_{s_{r-1}}\ldots\mathcal{C}^{+}_{s_1}\{S_N^{(k)}(a)\}+\mathcal{C}^{+}_{s_r}\ldots\mathcal{C}^{+}_{s_1}\{S_N^{(k)}(a)\};$$

$$\prod_{l=1}^{0}\mathbf{1}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)=(j_1,\ldots,j_k);$$

$$\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)=\mathbf{1}_{j_{s_r},j_{s_r+1}}\ldots\mathbf{1}_{j_{s_1},j_{s_1+1}}(j_1\ldots j_k),$$

$$S_0^{+}\ldots\mathcal{C}^{+}_{s_1}\{S_N^{(k)}(a)\}=S_N^{(k)}(a);$$

где $s_1,\ldots,s_r=1,\ldots,k-1$; $s_r>\ldots>s_1$; $r=1,\ldots,k-1$; $\sum\limits_{(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})}$ – сумма по перестановкам $(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})$; $q_1,\ldots,q_k\in\{1,\ldots,k\}$; $a_{(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})}$ – скаляры.

По индукции нетрудно доказать следующее равенство:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{N-1}a_{(j_1,\ldots,j_k)}=\mathcal{C}^{*}_{k-1}\ldots\mathcal{C}^{*}_{1}\{S_N^{(k)}(a)\}=$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{C}^{+}_{s_r}\ldots\mathcal{C}^{+}_{s_1}\{S_N^{(k)}(a)\};\quad k\geqslant 1,\quad \sum_{\emptyset}\stackrel{\rm def}{=}1. \tag{51}$$

Положим $a_{(j_1,\ldots,j_k)}=\Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k})\prod\limits_{l=1}^{k}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$. Тогда из (47) и (51) имеем:

$$J[\Phi]_{T,t}^{(k)}=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1,\ldots,s_r}\ \text{с. в. } 1, \tag{52}$$

где

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1,\ldots,s_r}=$$

$$= \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_{s_r+3}} \int\limits_t^{t_{s_r+2}} \int\limits_t^{t_{s_r}} \ldots \int\limits_t^{t_{s_1+3}} \int\limits_t^{t_{s_1+2}} \int\limits_t^{t_{s_1}} \ldots \int\limits_t^{t_2} \sum_{\prod\limits_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1,\ldots,t_k)}$$

$$\times \Bigl[\Phi\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)$$

$$\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1+1})} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \ldots$$

$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_r-1}}^{(i_{s_r-1})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r+1})} d\mathbf{w}_{t_{s_r+2}}^{(i_{s_r+2})} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \Bigr], \qquad (53)$$

и $\prod\limits_{l=1}^{0} \mathbf{1}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1,\ldots,t_k) \stackrel{\rm def}{=} (t_1,\ldots,t_k)$; $\sum\limits_{(s_0,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k0}} \stackrel{\rm def}{=} 1$; $k \geqslant 2$.

Замечание 3. Слагаемые в правой части (53) следует понимать так: для каждой перестановки из набора $\prod\limits_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{t_{s_l}, t_{s_l+1}}(t_1,\ldots,t_k)$ следует осуществить замену в правой части (53) всех пар (их ровно r штук) дифференциалов с одинаковыми нижними индексами вида $d\mathbf{w}_{t_p}^{(i)} d\mathbf{w}_{t_p}^{(j)}$ на величины $\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}} dt_p$.

Лемма 4. *Пусть* $\Phi(t_1,\ldots,t_k) \in C^1(\mathcal{D}_k)$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} \leqslant C_{nk} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi^{2n}(t_1,\ldots,t_k) dt_1 \ldots dt_k;$$

$$C_{nk} < \infty; \quad n \in N. \qquad (54)$$

Доказательство. Используя стандартные оценки стохастических интегралов при $(\xi_\tau)^n \in \mathcal{M}_2([t_0,t])$ имеем

$$\mathbf{E}\left\{ \left| \int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau \right|^{2n} \right\} \leqslant (t-t_0)^{n-1} \left(n(2n-1)\right)^n \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{E}\left\{ |\xi_\tau|^{2n} \right\} d\tau, \qquad (55)$$

$$\mathbf{E}\left\{ \left| \int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leqslant (t-t_0)^{2n-1} \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{E}\left\{ |\xi_\tau|^{2n} \right\} d\tau. \qquad (56)$$

Пусть $\xi^{(l)}_{t_{l+1},\ldots,t_k,t} = \int\limits_t^{t_{l+1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_l)}_{t_l}$ при $l = 1,\ldots,k-1$ и $\xi^{(0)}_{t_1,\ldots,t_k,t} \stackrel{\rm def}{=} \Phi(t_1,\ldots,t_k)$. По индукции нетрудно показать, что $\left(\xi^{(l)}_{t_{l+1},\ldots,t_k,t}\right)^n \in \mathcal{M}_2([t,T])$ по t_{l+1}.Тогда применяя многократно оценки (55), (56) придем к утверждению леммы. $\square$

Используя неравенство Минковского и лемму 4 получаем из (52) следующие оценки:

$$\left(\mathbf{E}\left\{\left(J[\Phi]^{(k)}_{T,t}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{1}{2n}} \leqslant$$

$$\leqslant\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}\left(\mathbf{E}\left\{\left(I[\Phi]^{(k)s_1,\ldots,s_r}_{T,t}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{1}{2n}}, \qquad (57)$$

$$\left(\mathbf{E}\left\{\left(I[\Phi]^{(k)s_1,\ldots,s_r}_{T,t}\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{1}{2n}} \leqslant$$

$$\leqslant C^{s_1\ldots s_r}_{nk}\left[\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_{s_r+3}}\int\limits_t^{t_{s_r+2}}\int\limits_t^{t_{s_r}}\ldots\int\limits_t^{t_{s_1+3}}\int\limits_t^{t_{s_1+2}}\int\limits_t^{t_{s_1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{t_{s_l},t_{s_l}+1}(t_1,\ldots,t_k)}\right.$$

$$\times\Phi^{2n}\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)$$

$$\left.\times dt_1\ldots dt_{s_1-1}dt_{s_1+1}dt_{s_1+2}\ldots dt_{s_r-1}dt_{s_r+1}dt_{s_r+2}\ldots dt_k\right]^{\frac{1}{2n}}, \qquad (58)$$

где перестановки при суммировании в (58) осуществляются только в $\Phi^{2n}(\ldots)$; $C^{s_1\ldots s_r}_{nk} < \infty$; $\prod\limits_{l=1}^{0}\mathbf{1}_{t_{s_l},t_{s_l}+1}(t_1,\ldots,t_k) \stackrel{\rm def}{=} (t_1,\ldots,t_k)$.

Лемма 5. *В условиях теоремы* 1

$$J[\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K\}]^{(k)}_{T,t} = J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t} \quad \textit{с. в. 1.} \qquad (59)$$

Доказательство. Подставляя (34) в (59), используя лемму 3 и замечание 2 нетрудно увидеть, что с. в. 1

$$J[\mathcal{B}^{\pm}_{k-1}\{K\}]^{(k)}_{T,t} = J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{kr}}J\left(\psi^{(k)}\right)^{s_r,\ldots,s_1}_{T,t},$$

откуда согласно лемме 1 вытекает утверждение леммы. $\square$

Лемма 6. *Пусть* $|\Phi(t_1,\ldots,t_k)|<\infty$ *при* $(t_1,\ldots,t_k)\in[t,T]^k$. *Тогда* $J[\Phi]^{\Gamma_k}_{T,t}=0$ *с. в. 1.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\Phi(t_1,\ldots,t_k)\equiv 1$. Тогда интегральная сумма $J[1]^{\Gamma_k}_{T,t}$ состоит из конечной суммы случайных величин $\alpha^N_p\beta^N_{k-p}$, где

$$\alpha^N_p=\sum_{s_1,\ldots,s_p=1}^{N-2}\prod_{l=1}^{p}\Delta\mathbf{w}^{(r_l)}_{\tau_{s_l}},\ \ \beta^N_{k-p}=\prod_{l=1}^{k-p}\left(\Delta\mathbf{w}^{(r_{p+l})}_{\tau_0}+\Delta\mathbf{w}^{(r_{p+l})}_{\tau_{N-1}}\right),$$

где $\alpha^N_0\stackrel{\rm def}{=}1$; $\{r_1,\ldots,r_k\}=\{i_1,\ldots,i_k\}$; $p=0,\,1,\ldots,k-1$; $k-p=1,\ldots,k$; $i_1,\ldots,i_k=0,\,1,\ldots,m$ и при этом $\mathbf{E}\left\{\left(\alpha^N_p\right)^2\right\}<\infty$. Далее используя неравенство Минковского и независимость случайных величин α^N_p и β^N_{k-p} нетрудно показать, что $J[1]^{\Gamma_k}_{T,t}=0$ с. в. 1. Если же функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ является произвольной ограниченной функцией на $[t,T]^k$, то очевидно доказательство проводится аналогично. $\square$

Лемма 7. *Пусть* $\varphi_i(s)\in C^1_{[t,T]}$; $i=1,\ldots,k$. *Тогда*

$$\prod_{l=1}^{k}\int\limits_t^T\varphi_l(s)d\mathbf{w}^{(i_l)}_s=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T\prod_{l=1}^{k}\varphi_l(t_l)d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k}\ \ \text{с. в. 1.}\qquad(60)$$

Доказательство. Пусть сначала $i_l\neq 0$; $l=1,\ldots,k$. Обозначим: $J^l_N\stackrel{\rm def}{=}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\varphi_l(\tau_j)\Delta\mathbf{w}^{(i_l)}_{\tau_j}$, $J^l=\int\limits_t^T\varphi_l(s)d\mathbf{w}^{(i_l)}_s$. Поскольку

$$\prod_{l=1}^{k}J^l_N-\prod_{l=1}^{k}J^l=\sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{g=1}^{l-1}J^g\right)\left(J^l_N-J^l\right)\left(\prod_{g=l+1}^{k}J^g_N\right),$$

то в силу неравенств Минковского и Коши–Буняковского

$$\left(\mathbf{E}\left\{\left(\prod_{l=1}^{k}J^l_N-\prod_{l=1}^{k}J^l\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant C_k \sum_{l=1}^{k} \left(\mathbf{E}\left\{\left(J_N^l - J^l\right)^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad C_k < \infty. \tag{61}$$

Ясно, что $J_N^l - J^l = \sum\limits_{g=0}^{N-1} \zeta_g^l$, где $\zeta_g^l = \int\limits_{\tau_g}^{\tau_{g+1}} (\varphi_l(\tau_g) - \varphi_l(s))\, d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$. Поскольку ζ_g^l независимы при различных g, то [7]:

$$\mathbf{E}\left\{\left(\sum_{j=0}^{N-1} \zeta_j^l\right)^4\right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{E}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^4\right\} + 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{E}\left\{\left(\zeta_j^l\right)^2\right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbf{E}\left\{\left(\zeta_q^l\right)^2\right\}. \tag{62}$$

В силу гауссовости ζ_j^l и непрерывной дифференцируемости функций $\varphi_i(s)$ получаем, что правая часть (62) стремится к нулю при $N \to \infty$. Используя этот факт, а также (61) приходим к (60). Если при некоторых $l \in \{1, \ldots, k\}$: $\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)} = t_l$, то доказательство леммы проводится аналогично. $\square$

В силу лемм 2, 5–7 имеем:

$$J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)} +$$

$$+ J[R_{p_1 \ldots p_k}]_{T,t}^{(k)} \text{ с. в. } 1, \tag{63}$$

где $J[R_{p_1 \ldots p_k}]_{T,t}^{(k)}$ определен в соответствии с (47) и

$$R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) =$$

$$= \left\{\sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k}\right\} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l). \tag{64}$$

При этом согласно лемме 2 при $(t_1, \ldots, t_k) \in [t, T]^k \backslash \Gamma_k$

$$\lim_{p_1 \to \infty} \ldots \lim_{p_k \to \infty} R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) = 0. \tag{65}$$

Замечание 4. (65) выполняется согласно лемме 2 равномерно в областях непрерывности функции $R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k)$ и предел в левой части (65) конечен на Γ_k.

Лемма 8. *В условиях теоремы* 1

$$\lim_{p_1\to\infty}\ldots\lim_{p_k\to\infty}\mathbf{E}\left\{\left(J[R_{p_1\ldots p_k}]^{(k)}_{T,t}\right)^n\right\}=0,\quad n\in N. \qquad (66)$$

Доказательство. Согласно (34), (35) и (64) имеем:

$$R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)=K(t_1,\ldots,t_k)+$$

$$+\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\sum_{r=1}^{k-1}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\frac{1}{g(s_1,\ldots,s_r)}\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{t_{s_l}=t_{s_l+1}\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne s_1,\ldots,s_r}}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l). \qquad (67)$$

В силу (67) функция $R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)$ удовлетворяет условиям (AI)–(AII) в областях интегрирования ПСИ в правой части (52). Тогда беря $R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)$ вместо $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ в (57), (58) и осуществляя предельный переход под знаками интегралов в (57) и (58) получим с учетом (65) и замечания 4 требуемое. Лемма 8, а вместе с ней и теорема 1 доказаны. $\square$

В заключение покажем, что если $i_1,\ldots,i_k\in\{1,\ldots,m\}$ и попарно различны, то для аппроксимации интеграла $J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}$, имеющей вид

$$J^*\left(\psi^{(k)}\right)^q_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta^{(i_l)}_{(j_l)T,t},\ q<\infty,$$

справедливо следующее соотношение:

$$\mathbf{E}\left\{\left(J^*\left(\psi^{(k)}\right)^q_{T,t}-J^*\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}\right)^2\right\}=$$

$$=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^T K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k-\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C^2_{j_k\ldots j_1}. \qquad (68)$$

Действительно, поскольку при попарно различных и не равных нулю $i_1,\ldots,i_k$ справедливо согласно лемме 1 равенство

$J^{*}\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}=J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}$ с. в. 1, то

$$\mathbf{E}\left\{\left(J^{*}\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}\right)^{2}\right\}=\mathbf{E}\left\{\left(J\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}\right)^{2}\right\}=$$

$$=\int\limits_{t}^{T}\ldots\int\limits_{t}^{T}K^{2}(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k. \qquad (69)$$

Кроме этого в тех же условиях

$$\mathbf{E}\left\{\left(J^{*}\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}-J^{*}\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}^{q}\right)^{2}\right\}=$$

$$=\mathbf{E}\left\{\left(J^{*}\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}\right)^{2}\right\}-\mathbf{E}\left\{\left(J^{*}\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}^{q}\right)^{2}\right\}, \qquad (70)$$

$$\mathbf{E}\left\{\left(J^{*}\left(\psi^{(k)}\right)_{T,t}^{q}\right)^{2}\right\}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{q}C_{j_k\ldots j_1}^{2}. \qquad (71)$$

Из (69)–(71) следует (68).

Литература

1. О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов, *Разложение процессов Ито в ряд Тейлора–Ито в окрестности фиксированного момента времени.* Деп. в ВИНИТИ, No. 2637-В93, (1993), 1–26.
2. О. Ю. Кульчицкий, Д. Ф. Кузнецов, *Унифицированное разложение Тейлора–Ито.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **244** (1997), 186–204.
3. Г. Н. Мильштейн, *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* Изд-во Уральского ун-та, Свердловск (1988).
4. E. Platen, W. Wagner, *On a Taylor formula for a class of Ito processes.* — Prob. Math. Statist **3** (1982), 37–51.
5. P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical solution of stochastic differential equations.* Springer, Berlin (1992).
6. P. E. Kloeden, E. Platen, I. W. Wright, *The Approximation of multiple stochastic integrals.* — Stoch. Anal. And Applicat. **10,** No. 4 (1992), 431–441.
7. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М. (1964).
8. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Наукова Думка, Киев (1968).

Kuznetsov D. F. An expansion of multilpe Stratonovich stochastic integrals, based on multiple fourier expansion.

The expansion of multiple Stratonovich stochastic integrals of multiplicity k; $k \in N$ into multiple series of products of Gaussian random values is stated and proved. The coefficients of this expansion are the coefficients of multiple Fourier expansion of the function of several variables on full orthonormal systems in space $L_2([t,T])$. For expansion the convergence in mean of order n; $n \in N$ is proved. Some expansions of multiple Stratonovich stochastic integrals with the help of polynomial and trigonometric systems are considered.

С.-Петербургский государственный технический университет

Поступило 11 февраля 1999 г.