Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

Л. В. Розовский

ОЦЕНКА СНИЗУ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С КОНЕЧНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ

1. Введение

Рассмотрим независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ с нулевыми средними и конечными дисперсиями $\sigma_1^2,\ \sigma_2^2, \ldots$, такими что

$$0 < \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots < \infty. \tag{1.1}$$

Положим $S = X_1 + X_2 + \ldots$, $F(x) = \mathbf{P}(S < x)$. Целью настоящей работы является нахождение *неасимптотических* оценок снизу для $1-F(x\sigma)$, справедливых при минимальных дополнительных предположениях. Полученные оценки, одна из которых была анонсирована в [1], выглядят проще и естественней, чем "универсальная" оценка снизу для одинаково распределнных слагаемых из [2], и уточняют соответствующие результаты, сформулированные С. В. Нагаевым ([3, 4]) и А. Н. Архангельским [5], работа которого, собственно, и явилась побудительным мотивом для написания этой статьи.

Основной доказанный в [5] результат выглядит следующим образом.

Теорема B1. *Пусть* $\beta_i = \mathbf{E}|X_i|^3 < \infty$, $i \geqslant 1$,

$$\max_{i\geqslant 1} \beta_i/\sigma_i^2 < \mathbb{C} < \infty. \tag{1.2}$$

Если $a = xc/\sigma \leqslant \alpha$ *и* $x \geqslant x_0 > 0$, *то найдутся* $k = k(\alpha, x_0)$ *и* $\rho = \rho(\alpha)$ *такие, что*

$$1 - F(x\sigma) \geqslant \Phi(-x)\, e^{-\rho a x^2}(1 - ka). \tag{1.3}$$

Работа поддержана грантом РФФИ No. 99-01-00724 и грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199.

При этом, если $\alpha = 0.031$ *и* $x_0 = 1$, *то* $k = 31.65$, $\rho = 8.4$.

В (1.3) и далее $\Phi(\,\cdot\,)$ обозначает стандартное нормальное распределение.

Поскольку условие (1.2) выполняется, если

$$|X_i| \leqslant \mathbb{C} \quad \text{п.н.}, \quad i \geqslant 1, \tag{1.4}$$

то из (1.3), в частности, вытекает одна из первых оценок снизу для вероятностей больших уклонений, полученная, как некоторое вспомогательное утверждение, А. Н. Колмогоровым в [6] для случая ограниченных случайных величин.

Справедливости ради, заметим, что оценку (1.3) в предположении (1.4) можно получить как следствие одной теоремы В. Феллера [7].

В результате уточнения некоторых постоянных (см. [8, 9]) из упомянутой теоремы, можно утверждать, что в условиях ограниченности (1.4) в оценке (1.3) при $\alpha = 1/12$, $x_0 = 1$ можно положить $\rho = 1/6 + 0.42a$, $k = 4.63/\psi(x)$, где $\psi(x) = x\Phi(-x)/\Phi'(x)$. Таким образом, $\rho \leqslant 0.2017$, а $k < 7.07$.

Вернемся к теореме В1. К ее недостаткам, на наш взгляд, можно отнести в порядке весомости:

а) зависимость параметра $\mathbb{C}$ из (1.2) от случайной величины X_i, $i \geqslant 1$, с наихудшей в определенном смысле характеристикой,

б) дополнительные моментные предположения, и, в какой-то мере,

в) ограничения на x сверху (оценка нетривиальна лишь при $x < \alpha\sigma/kc$).

Заметим, что претензии по пункту а) отпадают, если X_i, $i \geqslant 1$, одинаково распределены или равномерно ограничены. В любом случае естественным обобщением условия (1.2) является соотношение

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i\geqslant 1}\beta_i \leqslant \mathbb{C},$$

требующее, тем не менее, существования у случайных величин X_i третьих абсолютных моментов. Приведем соответствующий результат, независимо полученный и анонсированный С. В. Нагаевым в [4].

Теорема В2. *Пусть* $L = 1/\sigma^3 \sum_{i\geqslant 1}\beta_i$. *Если* $x \geqslant 1$ *и* $xL \leqslant \alpha$, *то*

$$1 - F(x\sigma) \geqslant \Phi(-x)\,e^{-\rho x^3 L}(1 - kxL), \tag{1.5}$$

где $\rho = \rho(\alpha)$, $k = k(\alpha)$.

Этот результат, в отличие от теоремы B1, не имеет недостатка а).

Относительно пункта в) заметим, что он, по существу, не привязан к пунктам а) и б), поскольку нижние оценки для вероятностей больших уклонений при достаточно больших x можно получить из общих соображений, как скажем, в [10] или [11].

Приведем в качестве примера лишь один, не самый точный, результат ([10, (1.57), (1.58)]).

Теорема B3. *Если* $x \geqslant 2$, *то*

$$1 - F(x\sigma) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i \geqslant 1} P(X_i \geqslant 2x\sigma). \tag{1.6}$$

Мы видим, что оценка (1.6) имеет место без каких-либо дополнительных моментных и прочих предположений и, вообще, никак не связана с поведением $1 - F(x\sigma)$ при относительно малых x.

Из сказанного следует, что "естественная" оценка снизу для $1 - F(x\sigma)$ должна удовлетворять как (1.5), так и (1.6).

2. Результаты

Всюду в дальнейшем без потери общности будем предполагать, что

$$\sum_{i \geqslant 1} \sigma_i^2 = 1. \tag{2.1}$$

Для $x \geqslant 0$ положим $\Lambda(x) = \sum_{i \geqslant 1} \mathbf{E} X_i^2 \min(1, x|X_i|)$.

Теорема 1. *Найдутся абсолютные положительные постоянные* A_1, A_2, A_3 *такие, что при любых* $x \geqslant 1$ *и* $\varkappa \geqslant 0$

$$\begin{aligned} 1 - F(x) \geqslant \Phi(-x)\, e^{-A_1 x^2 \Lambda(x)} \big(1 - A_2 \Lambda(x)\big)^+ + \\ + \left(1 - \Phi(-\varkappa) - A_3 (1+\varkappa)^{-2} \Lambda\left(\frac{1}{1+\varkappa}\right)\right)^+ \sum_{i \geq 1} \mathbf{P}\big(X_i \geqslant x + \varkappa\big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $(\,\cdot\,)^+ = \max(0, \,\cdot\,)$.

Заметим, что $\Lambda(x) \uparrow_0^1$ и

$$\Lambda(x) \leqslant x^\delta \sum_{i \geqslant 1} \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta} \leqslant x^\delta \max_{i \geqslant 1} \mathbf{E}|X_i|^{2+\delta}/\sigma_i^2, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1.$$

В частности, $\Lambda(x) \leqslant xL$ (см. (1.5)).

Таким образом, оценка (2.2) свободна от всех недостатков теоремы B1, отмеченных во введении.

При некоторых дополнительных предположениях значения параметров A_1, A_2 могут быть оценены (по поводу оценки A_3 см. [14]).

Теорема 2. *Пусть* $\omega \in [1,2]$, $\Lambda_\omega(x) = \Lambda(x/\omega)$. *Предположим, что* $\Lambda_\omega(x) = \lambda \leqslant 1/16$ *и* $\frac{x}{\omega}\max\limits_{i\geqslant 1}\sigma_i = \eta \leqslant 1/16$. *Тогда в неравенстве* (2.2) *можно* $\Lambda(x)$ *заменить на* $\Lambda_\omega(x)$, A_1 – *на*

$$A_1(\omega, \Lambda, \eta) = \\ = u(\omega) + \left\{0.632u^2(\omega) + 0.591\frac{1+\omega}{\omega^3}(\omega^2-2)^+\right\}\lambda + 2.7\eta^2, \quad (2.3)$$

где $u(\omega) = 1/2 + \omega^{-1} + \omega^{-2}$, *а вместо* A_2 *подставить*

$$A_2(\omega, \lambda, \eta, x) = \frac{1}{2}(e^\omega + 1) + \\ + \omega^{-1} + \frac{\omega}{\psi(x)}\left(4e^\omega + 12\omega\eta + 8.4\zeta_\omega\lambda + e^\omega\zeta_\omega 3.75(\lambda^2 + 2\eta^2)\right), \quad (2.4)$$

вводя обозначения $\zeta_\omega = (1+\omega)(1+e^\omega)$, $\psi(x) = x\Phi(-x)/\Phi'(x)$.

Отметим, что $\psi(x) \uparrow_{0.6556...}^{1}$, если $x \uparrow_1^\infty$.

Поскольку A_1 убывает, а A_2 возрастает по ω, можно за счет выбора $\omega \in [1,2]$ изменить соотношение между этими показателями. Так, положив $\omega = 1$, имеем при $\lambda \leqslant 1/16$, $\eta \leqslant 1/16$

$$A_1 = 2.5 + 3.95\lambda + 2.7\eta^2 < 2.76,$$

$$A_2 < \frac{3+e}{2} + \frac{1}{\psi(x)}\big(4e + 12\eta + 16.8(1+e)\lambda + e(1+e)7.5(\lambda^2 + 2\eta^2)\big) < 28,$$

$$\text{если} \quad x \geqslant 1 \ (< 22.4, \quad \text{если} \quad x \geqslant 2).$$

В то же время при $\omega = 2$

$$A_1 < 1.25 + \lambda + 2.7\eta^2 < 1.33,$$

а $A_2 < 165$ при $x \geqslant 1$, $A_2 < 130$ при $x \geqslant 2$, $A_2 < 120$ при $x \geqslant 3$.

Становится понятным, что если λ достаточно мало, а $x^2\lambda$ достаточно велико, то в теореме 2 следует выбирать $\omega = 2$.

Следствие. *Пусть* $x \max\limits_{l\geqslant 1} \sigma_l \geqslant 1/8$ *и (см. теорему* В2*)* $3 \leqslant x \leqslant 1/45L$. *Тогда имеет место соотношение* (1.5) *при* $\rho = 0.64$ *и* $k = 44.97$.

Доказательство следует из теоремы 2 при $\omega = 2$, если иметь в виду, что $\lambda = \Lambda(x/\omega) \leqslant 0.5xL$. Выбор верхней границы для x (или ограничения для λ) диктуется условием $1 - kxL > 0$, которое выполняется, если $\widetilde{\lambda} = 0.5xL < \widetilde{\lambda}_*$, где $\widetilde{\lambda}_*$ – решение уравнения $\widetilde{\lambda} A_2(2, \widetilde{\lambda}, 1/16, 3) = 1$ (см. (2.4)).

3. Вспомогательные результаты. 1

Для целого $k \geqslant 0$ положим

$$g_k(t) = t^{-k} \sum_{l \geqslant k} t^l / l!. \tag{3.1}$$

Заметим, что

$$g_0(t) = e^t, \quad g_{k+1}(t) = \int_0^1 g_k(tu)du, \quad k \geqslant 0,$$

вследствии чего функции $g_k(t)$ строго возрастают (от нуля до бесконечности) на всей оси.

Введем обозначения. Пусть X – некоторая случайная величина с нулевым средним, конечной положительной дисперсией σ^2 и функцией распределения V. При $h \geqslant 0$ и $c > 0$ положим

$$L = L(h) = \int_{-c}^{c} e^{hy}\, dV(y), \quad R = \int_{|y|>c} dV(y), \quad \overline{\sigma}^2 = \int_{|y|>c} y^2\, dV(y),$$

$$\alpha_k = \int_{-c}^{c} y^k\, dV(y), \quad \beta_k = \int_{-c}^{c} |y|^k\, dV(y) \quad (k = 0, \dots, 3), \tag{3.2}$$

$$\overline{\beta} = \beta_3 / c, \quad \beta = \min(\,\overline{\sigma}^2,\ \overline{\beta}), \quad t = hc.$$

В дальнейшем для краткости аргумент t у функций $g_k(t)$ будем, как правило, опускать, записывая g_k и g_2 вместо $g_k(t)$ и $g_2(t)$.

Справедливы оценки:

$$-R + h\alpha_1 < L - 1 < h\alpha_1 + g_2 h^2 \alpha_2, \tag{3.3}$$

$$L-1=-R+h\alpha_1+\theta h^2\alpha_2,\quad g_2(-t)\leqslant\theta\leqslant g_2, \tag{3.4}$$

$$L-1=-R+h\alpha_1+\frac{1}{2}h^2\alpha_2+\theta_1 h^3\beta_3,\quad -\frac{1}{6}\leqslant\theta_1\leqslant g_3, \tag{3.5}$$

$$L'=\alpha_1+\theta h\alpha_2,\quad g_1(-t)\leqslant\theta\leqslant g_1, \tag{3.6}$$

$$L'=\alpha_1+h\alpha_2+\theta_1 h^2\beta_3,\quad -\frac{1}{2}\leqslant\theta_1\leqslant g_2, \tag{3.7}$$

$$0<L''=\theta\alpha_2,\quad g_0(-t)\leqslant\theta\leqslant g_0, \tag{3.8}$$

$$L''=\alpha_2+\theta_1 h\beta_3,\quad -1\leqslant\theta_1\leqslant g_1. \tag{3.9}$$

Докажем для примера оценку снизу в (3.5):

$$h^{-3}\left(L-1+R-h\alpha_1-\frac{1}{2}h^2\alpha_2\right)=\int\limits_{-c}^{c} g_3(hy)y^3\,dV(y)\geqslant$$

$$\geqslant-\int\limits_{-c}^{0} g_3(hy)|y|^3\,dV(y)\geqslant -g_3(0)\beta_3$$

с учетом (см. (3.1) и ниже) свойств функций g_k.

Не составляет особого труда доказать, что

$$\begin{gathered}R\leqslant\ \overline{\sigma}^{\,2}/c^2,\quad |\alpha_1|\leqslant\ \overline{\sigma}^{\,2}/c,\quad \alpha_1^2\leqslant R\,\overline{\sigma}^{\,2},\\ |\alpha_1|\leqslant(1-R)c,\quad |\alpha_1\alpha_2|\leqslant(1-R)c\beta,\\ \alpha_2\leqslant(1-R)c^2,\quad \overline{\beta}\leqslant\alpha_2,\quad \alpha_2^2\leqslant(1-R)c\beta_3,\end{gathered} \tag{3.10}$$

а также

$$\begin{gathered}\alpha_2\leqslant c^2\eta^2,\quad \alpha_2^2\leqslant\eta\sqrt{1-R}\ c\beta_3,\\ |\alpha_1\alpha_2|\leqslant\eta^2 c\,\overline{\sigma}^{\,2},\quad |\alpha_1|\ \overline{\beta}/c\leqslant\eta^2\beta,\\ R\leqslant\eta^2,\quad |\alpha_1|\leqslant c\eta^2,\quad \alpha_1^2\leqslant\eta^2\ \overline{\sigma}^{\,2},\quad R\ \overline{\beta}\leqslant\eta^2\beta,\end{gathered} \tag{3.10$'$}$$

где $n=\sigma/c$.

Из (3.3) следует, что

$$|L-1|\leqslant h|\alpha_1|+\max(R,g_2h^2\alpha_2), \tag{3.11}$$

а из (3.3) и (3.10), что

$$L\geqslant 1-R-tc^{-2}\ \overline{\sigma}^{\,2}\geqslant 1-(1+t)c^{-2}\ \overline{\sigma}^{\,2}\geqslant 1-(1+t)\eta^2. \tag{3.12}$$

Положим

$$\gamma = \min(1, L), \quad \tau_k = \frac{(L-1)L^{(k)}}{L}, \quad k = 1, 2,$$

и пусть $(\,\cdot\,)^+ = \max(0, \,\cdot\,)$.

Имеют место следующие оценки:

$$\tau_1^+ \leqslant h\Big(\eta^2(1+1.5t)\ \overline{\sigma}^{\,2} + t^2(g_2+g_3)\eta^2\beta +$$

$$+\big(0.5\eta t^2 + t^3\eta^2(g_1g_2 - 1/2)\big)\ \overline{\beta}\Big), \quad \text{если} \ \ \gamma \geqslant \frac{1+t}{t(1+1.5t)}; \tag{3.13}$$

$$\tau_2^+ \leqslant t\eta^2\ \overline{\sigma}^{\,2} + t^2 g_1\eta^2\beta + \big(t^2(g_0g_2 - 0.5)\eta^2 + 0.5\eta t^2\big)\ \overline{\beta}; \tag{3.14}$$

$$(-\tau_2)^+ \leqslant \gamma^{-1}\eta^2(1+t)\left(\ \overline{\sigma}^{\,2} + t g_1\beta\right). \tag{3.15}$$

Доказательство. Если $\alpha_1 \geqslant 0$, то (см. (3.6)) $L' > 0$ и $\tau_1^+ > 0$ при $L > 1$. Используя (3.5), (3.7) и (3.10′), получим

$$\tau_1^+ \leqslant \left(h\alpha_1 + \frac{1}{2}h^2\alpha_2 + g_3h^3\beta_3\right)\left(\alpha_1 + h\alpha_2 + g_2h^2\beta_3\right) \leqslant$$

$$\leqslant h\left(\eta^2\left(1+\frac{3}{2}t\right)\overline{\sigma}^2 + t^2(g_2+g_3)\eta^2\beta +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{2}t^2\sqrt{1-R}\ \eta + t^3\eta^2(g_3+g_2^2)\right]\overline{\beta}\right). \tag{3.16}$$

Если же $\alpha_1 < 0$, то $\tau_1^+ > 0$ когда $L' < 0$, $L-1 < 0$, либо $L' > 0$, $L-1 > 0$.

В первом случае по (3.3) и (3.6)

$$\tau_1^+ \leqslant \gamma^{-1}(R + h|\alpha_1|)|\alpha_1| \leqslant h\,\overline{\sigma}^2\gamma^{-1}\,R(1+t^{-1}), \tag{3.17}$$

а во втором –

$$\tau_1^+ \leqslant \left(\frac{1}{2}h^2\alpha_2 + g_3h^3\beta_3\right)(h\alpha_2 + g_2h^2\beta_3) \leqslant h[\ldots]\,\overline{\beta}, \tag{3.18}$$

где $[\ldots]$ то же, что в (3.16).

Оценка (3.13) – следствие (3.16)–(3.18) и (3.1).

Теперь оценим τ_2. Из (3.8) следует, что $\tau_2 > 0$ при $L-1 > 0$ и, следовательно (см. (3.5), (3.9)–(3.10′)),

$$\tau_2^+ \leqslant \left(t|\alpha_1|/c + \frac{1}{2}t^2\alpha_2/c^2 + g_3t^3\,\overline{\beta}/c^2\right)(\alpha_2 + t g_1\,\overline{\beta}).$$

Раскрывая скобки, придем к (3.14).

Если же $\tau_2 < 0$, то $L-1<0$ и (см. (3.3), (3.9))

$$(-\tau_2)^+ \leqslant \gamma^{-1}(\alpha_2 + tg_1\,\overline{\beta})(R + t|\alpha_1|/c). \qquad (3.10')$$

Отсюда и из (3.10′) легко получим (3.15).

Доказательство завершено.

Далее (см. (3.7) и (3.10′))

$$L'^2 \leqslant (1+2t)\eta^2\,\overline{\sigma}^2 + 2\eta^2 t^2 g_2\beta + \eta t^2\left(\sqrt{1-R} + \eta t(g_1+1)g_2\right)\overline{\beta}; \quad (3.19)$$

кроме того,

$$\ln L \geqslant \frac{1}{2}h^2\Big\{\alpha_2 - \left[2t^{-1} + 2t^{-2} + \eta^2\max\left(1+t, \gamma^{-1}(1+t^{-1})^2\right)\right]\overline{\sigma}^2 -$$

$$\left[\frac{1}{3}t + \eta t^2\left(\frac{1}{4} + \eta\left(g_2^2 - \frac{1}{4}\right)\right)\right]\overline{\beta} - 2\eta^2 t^2 g_3\beta\Big\}. \qquad (3.20)$$

В самом деле,

$$\ln L \geqslant L - 1 - \frac{1}{2}(L-1)^2/\gamma.$$

Остается воспользоваться (3.5), (3.10), (3.10′) и, вытекающими из (3.3) при $L-1\leqslant 0$ и (3.5) при $L-1>0$, оценками

$$(L-1)^2/\gamma \leqslant h^2\max\Big(R\gamma^{-1}(1+t^{-1})^2\,\overline{\sigma}^2, \eta^2(1+t)\,\overline{\sigma}^2 +$$

$$+\eta t^2\left(\frac{1}{4} + \eta\left(g_2^2 - \frac{1}{4}\right)\right)\overline{\beta} + 2\eta^2 t^2 g_3\beta\Big).$$

Наконец (см. (3.7), (3.9)–(3.10′)),

$$|L'L''| \leqslant c\eta\left\{\eta\,\overline{\sigma}^2 + \eta t g_1\beta + \left[t\sqrt{1-R} + \eta(t^2g_2 + t^2g_1 + t^3g_1g_2\right]\overline{\beta}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c\eta\left(g_0\eta\,\overline{\sigma}^2 + t\left(\sqrt{1-R} + \eta\,(g_0g_1 - 1)\right)\overline{\beta}\right). \qquad (3.21)$$

В заключение параграфа 3 приведем следующую лемму.

Лемма. *Пусть случайная величина Y имеет конечный третий абсолютный момент.*

Тогда

$$\mathbf{E}|Y - \mathbf{E}Y|^3 \leqslant \mathbf{E}|Y|^3 + 3|EY|\mathbf{E}Y^2 \leqslant 4\mathbf{E}|Y|^3. \tag{3.22}$$

Доказательство. При любых b и a

$$|b-a|^3 - |b|^3 = (|b-a| - |b|)\left((b-a)^2 + b^2 + |b(b-a)|\right) \leqslant |a|\frac{3}{2}((b-a)^2 + b^2).$$

Остается положить $b = Y$, $a = \mathbf{E}Y$ и взять от обеих частей неравенства математическое ожидание.

4. Вспомогательные результаты. 2

Обозначим через $V_l(y)$ функцию распределения случайной величины X_l, $l \geqslant 1$, и положим

$$\delta^2 = \sum_{l \geqslant 1} \mathbf{E}X_l^2 \mathbf{I}\left[\,|X_l| > c\,\right],$$

$$\lambda = c^{-1} \sum_{l \geqslant 1} \mathbf{E}|X_l|^3 \mathbf{I}\left[\,|X_l| \leqslant c\,\right], \quad \Lambda = \delta^2 + \lambda. \tag{4.1}$$

В дальнейшем, нами будут использоваться обозначения L_k, R_k, $\overline{\sigma}_k$, $k \geqslant 1$, полученные заменой в соответствующих формулах из (3.2) функции распределения V на V_k.

Пусть $\sum' \cdots = \sum\limits_{k \in J} \ldots$, где J – некоторое подмножество натуральных чисел, такое что

$$\overline{\sigma}^2 = {\sum}' \mathbf{E}X_k^2 \mathbf{I}\left[\,|X_k| \leqslant c\,\right] \geqslant 1 - \rho\delta^2, \tag{4.2}$$

где $\rho \geqslant 1$ – параметр, который будет выбран позже (заметим (см. (2.1)), что при $\rho = 1$ и $\sum' = \sum$, или $J \equiv N$, соотношение (4.2) превращается в равенство 7);

$$\eta_0 = \max_{k \in J} c^{-1}\sigma_k, \quad \gamma_0 = 1 - (1+t)\eta_0^2; \quad m(h) = {\sum}' L_k'/L_k. \tag{4.3}$$

Имеем, $m(h) = \Sigma'(L_k' - (L_k - 1)L_k'/L_k)$.

Отсюда, из (3.7), (3.10) и (4.2) следует, что если $\eta_0^2 \leqslant 0.2$ и $t = hc \geqslant 1$, то

$$m(h) \geqslant h(1 - \delta_1), \tag{4.4}$$

где

$$\begin{gathered} \delta_1 = A_1\delta^2 + A_2 \min(\sigma^2, \lambda) + A_3\lambda, \\ A_1 = \rho + t^{-1} + \eta_0^2(1+1.5t), \quad A_2 = \eta_0^2 t^2 (g_2 + g_3), \\ A_3 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\eta_0 t^2 + \eta_0^2 t^2 (g_1 g_2 - 1/2). \end{gathered} \tag{4.5}$$

Величина $A_1 = A_1(t, \eta_0)$ при $0 < t \leqslant \eta_0\sqrt{2/3}$ убывает, а $A_2 + A_3$ возрастает. Кроме того, $A_1 \geqslant A_2 + A_3$ при $t \leqslant \overline{t}(\eta_0)$, причем $\overline{t}'(\eta_0) < 0$, если $\eta_0 \leqslant 1/16$, и $\overline{t}(1/16) > 2.28$. Таким образом,

$$\delta_1 \leqslant \widetilde{\delta}_1 = A_1\Lambda, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2.28, \quad 0 \leqslant \eta_0 \leqslant 1/16. \tag{4.6}$$

Пусть $\Lambda \leqslant 1/16$, $\eta_0 \leqslant 1/16$ и $1 \leqslant \rho \leqslant 3/2$.

Уравнение

$$t(1 - \widetilde{\delta}_1) = \overline{\omega}, \quad 1 \leqslant \overline{\omega} \leqslant 2, \tag{4.7}$$

имеет решение $t^* = t^*(\overline{\omega}; \eta_0, \Lambda, \rho) \leqslant 2.28$, возрастающее по каждому аргументу (соответствующие частные производные положительны) и удовлетворяющее равенству

$$t^* = \overline{\omega} + \frac{\Lambda}{1-\rho\Lambda}(1+\rho\overline{\omega})(1+\theta\eta_0^2), \quad \frac{5}{8} \leqslant \theta < 3.16. \tag{4.8}$$

Действительно, оценка $t^* \leqslant 2.28$ вытекает из того, что левая часть равенства (4.7) при $t = 2.28$, $\rho = 3/2$ и $\Lambda = \eta_0 = 1/16$ больше 2.

Для проверки (4.8) заметим, что

$$\left(\frac{(t^* - \overline{\omega})(1-\rho\Lambda)}{(1+\rho\overline{\omega})\Lambda} - 1\right) \Big/ \eta_0^2 = \frac{(1+1.5t^*)t^*}{1+\rho\overline{\omega}} = \theta. \tag{4.9}$$

Учитывая, что $t^* \geqslant 1$, $\rho\overline{\omega} \leqslant 3$, отсюда получим оценку снизу $\theta \geqslant 5/8$. Для доказательства оценки сверху покажем, что θ возрастает, как функция $\overline{\omega}$. Это в самом деле так, поскольку, как несложно убедиться, $\theta'_{\overline{\omega}} > 0$ при $t^* < \overline{\omega} + \rho^{-1} - \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{1}{9} + (\overline{\omega} + \rho^{-1})^2}$, а правая часть последнего неравенства всегда больше 2.28. Итак,

$$\theta = \theta(\overline{\omega}, \eta_0, \Lambda, \rho) \leqslant \theta(2, \eta_0, \Lambda, \rho) = \overline{\theta}(\rho),$$

причем

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial\rho} < 0, \ \ 1 \leqslant \rho \leqslant \frac{3}{2}, \quad \text{откуда} \ \ \theta \leqslant \theta(2, \eta_0, \Lambda, 1) \leqslant \theta\left(2, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, 1\right) < 3.16.$$

Пусть всюду в дальнейшем

$$\begin{aligned} &\tau \geqslant 0, \quad 1 \leqslant \omega, \qquad \overline{\omega} = (1+\tau)\omega \leqslant 2, \\ &x \geqslant 1, \quad \overline{x} = (1+\tau)x, \quad c = \omega/x. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Будем предполагать, что (см. (4.1)–(4.3))

$$\eta_0 = \frac{x}{\omega} \max_{k \in J} \sigma_k \leqslant 1/16, \quad \Lambda = \Lambda(1/c) = \Lambda_\omega^{(x)}(x) \leqslant 1/16. \tag{4.11}$$

Из (4.4), (4.6), (4.7) и (4.11) при $t = t^*$ и $h = h_* = t^*/c = t^* x/\omega$ следует оценка

$$m(h_*) \geqslant \frac{x}{\omega} t^* \left(1 - \widetilde{\delta}_1(t^*)\right) = \overline{x}. \tag{4.12}$$

Положим

$$\begin{gathered} P' = \mathbf{P}\left(\Sigma' X_k \geqslant \overline{x},\ |X_k| \leqslant \frac{\omega}{x},\ k \in J\right); \\ h = h_*, \quad t = t^*. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Рассуждая так же, как в [5], получим

$$P' \geqslant \prod_{k \in J} L_k(h_*)\, e^{-h_* \overline{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\psi(h_* \widetilde{\sigma}) - 1.531\sqrt{2\pi}\, \widehat{L}\right), \tag{4.14}$$

где

$$\psi(\,\cdot\,) = (1 - \Phi(\,\cdot\,))/\Phi'(\,\cdot\,), \quad \widetilde{\sigma}^2 = m'(h_*), \quad \widehat{L} = \widetilde{\sigma}^{-3} \Sigma' \mathbf{E} \mid \widetilde{X}_k - \mathbf{E}\widetilde{X}_k \mid^3,$$

$\widetilde{X}_k$, $k \in J$ – “сопряженные” случайные величины, так что $\widetilde{\sigma}^2 = \mathbf{D}(\Sigma' \widetilde{X}_k)$, $m(h_*) = \mathbf{E}(\Sigma' \widetilde{X}_k)$ (см. (4.2), (4.3)).

Теперь оценим $\widetilde{\sigma}^2$. Имеем

$$\widetilde{\sigma}^2 = \Sigma'(L_k'' - (L_k'/L_k)^2 - (L_k - 1)L_k''/L_k).$$

Воспользовавшись (3.9), (3.12) и (3.15), $\beta = \overline{\sigma}^2$, получим при $\eta_0^2 \leqslant 0.2$ и $1 \leqslant t \leqslant 3$ (см. (4.3))

$$\widetilde{\sigma}^2 \leqslant 1 + \delta_2, \quad \text{где} \quad \delta_2 = (g_0 - 1)\Lambda. \tag{4.15}$$

Аналогично, по (3.9), (3.14), (3.19) при $\beta = \overline{\sigma}^2$, (3.12) и (4.3)

$$\widetilde{\sigma}^2 \geqslant 1 - \delta_3, \tag{4.16}$$

где

$$\delta_3 = A_4 \delta^2 + A_5 \lambda,$$

$$A_4 = \rho + \eta_0^2 \left(tg_0 + \gamma_0^{-2}(2g_0 - 1) \right), \tag{4.17}$$

$$A_5 = t + \eta_0 t^2 \left(\frac{1}{2} + \gamma_0^{-2} \sqrt{1 - \eta_0^2} \right) + \eta_0^2 t^2 \left(g_0 g_2 - 0.5 + \gamma_0^2\, t(g_1 + 1) g_2 \right).$$

Далее, обозначив $\widetilde{\sigma}^{-3}\,\omega/x$ через μ, и воспользовавшись неравенством (3.22) при $Y = \widetilde{X}_k$, получим (см. (4.1), (4.3), (4.10), (4.13))

$$\widehat{L} \leqslant \gamma_0^{-1}\, g_0\, \mu\lambda + 3\widetilde{\sigma}^{-3} \Sigma' |L'_k| L''_k / L'^{\,2}_k.$$

Отсюда и из (3.21) следует (заметим (см. (3.12) и (4.3)), что

$$\max_{0 \leqslant R \leqslant \eta_0^2} \frac{1 - R}{1 - R - t\eta_0^2} = \frac{1 - \eta_0^2}{\gamma_0})$$

$$\widehat{L} \leqslant \gamma_0^{-1} \mu (A_0 \lambda + A_7 \delta^2), \tag{4.18}$$

где

$$A_6 = g_0 + 3\gamma_0^{-1} \eta_0 t \left(\sqrt{1 - \eta_0^2} + \eta_0 (g_0 g_1 - 1) \right),$$

$$A_7 = 3\gamma_0^{-1}\, g_0\, \eta_0^2.$$

Вернемся к оценке (4.14). Функция $\psi(z)$ убывает, а $z\psi(z) = \int_0^\infty e^{-u - u^2/2z^2}\, du$ возрастает при $z > 0$. Поэтому

$$\psi(u) \geqslant \psi(\vartheta) \min \left(1, \vartheta/u \right), \ u, \ \vartheta > 0.$$

Пусть $u = h_* \widetilde{\sigma}$, $\vartheta = x$. Тогда ((4.7), (4.12), (4.15))

$$\psi(h_* \widetilde{\sigma}) \geqslant \psi(x) \min \left(1, \frac{\omega}{t^* \, \widetilde{\sigma}} \right) \geqslant \psi(x) \frac{1 - \widetilde{\delta}_1}{(1 + \tau)\sqrt{1 + \delta_2}} \geqslant$$

$$\geqslant \psi(x)(1 - \delta_4), \quad \text{где} \quad \delta_1 = \tau + \widetilde{\sigma}_1 + 0.5\delta_2. \tag{4.19}$$

Далее, по (4.2), (4.13) и (3.20) с учетом того, что коэффициент при $\overline{\sigma}^2$ больше, чем сумма коэффициентов при $\overline{\beta}$ и β, если $1 \leqslant t \leqslant 2.28$ и $0 \leqslant \eta \leqslant 1/16$,

$$\ln \prod_{k \in J} L_k = \Sigma' \ln L_k \geqslant \frac{1}{2} h_*^2 (1 - \delta_5), \tag{4.20}$$

где

$$\delta_5 = \left(\rho + (1 + t) \left(2t^{-2} + \eta_0^2 \max \left(1, \frac{1 + t}{\gamma_0 t^2} \right) \right) \right) \Lambda.$$

Имеем,

$$\frac{1}{2}h_*^2(1-\delta_5) - h_*\,\overline{x} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(h_*\sqrt{1-\delta_5} - \overline{x}\right)^2 -$$

$$-\tau(1+1/2\tau)x^2 - \left(1-\sqrt{1-\delta_5}\right)h_*\,\overline{x} \geqslant -x^2\delta_6, \tag{4.21}$$

где (см. (4.7), (4.12))

$$\delta_6 = \tau(1+1/2\tau) + \frac{(1+\tau)t^*\delta_5}{\omega(1+\sqrt{1-\delta_5})}.$$

По (4.14), (4.19)–(4.21) заключаем:

$$P' \geqslant \Phi(-x)\,e^{-\delta_6 x^2}(1-\delta_7), \tag{4.22}$$

$$\text{где}\quad \delta_7 = \delta_4 + \frac{1.531\sqrt{2\pi}}{x\psi(x)}x\widehat{L}.$$

5. Доказательства

Начнем с доказательства теоремы 2. Пусть всюду в дальнейшем $t = t^* = t^*(\overline{\omega}; n_0, \Lambda, \rho)$ обозначает решение уравнения (4.7) (см. также (4.1)–(4.3)). Из [12, леммы 1] следует, что

$$1 - F(x) \geqslant P_1 + P_2, \quad c \leqslant x + \varkappa, \tag{5.1}$$

где

$$P_1 = \mathbf{P}(S > x, \max_{k\geqslant 1} X_k \leqslant c), \quad P_2 = (1-\varepsilon)Q(x+\varkappa),$$

$$\varepsilon = Q(x+\varkappa) + \max_{k\geqslant 1}\mathbf{P}(S - X_k < -\varkappa),$$

$$Q(y) = \sum_{k\geqslant 1}\mathbf{P}(X_k > y)$$

(формально в [12] рассматривался случай $S = S_n$, $n < \infty$, однако результат сохраняет справедливость и при $n = \infty$).

Очевидно, что при $\rho = 1$, $\tau = 0$ и $J \equiv N$ (см. (4.2), (4.10), (4.13)) $P_1 \geq P'$ и, следовательно, можно воспользоваться соотношением (4.22). Нам требуется лишь подходящим образом оценить при условиях (4.10), (4.11) величины $\overline{\delta}_i = \delta_i/\Lambda_\omega(x)$, $i = 4$–7.

Имеем (см. (4.3), (4.13), (4.20))

$$\overline{\delta}_5 = 1 + (1+t)\big(2t^{-2} + \eta_0\max(1, K_t)\big), \quad \text{где} \quad \frac{1+t}{t^2(1-(1+t)\eta_0^2)}. \tag{5.2}$$

Учитывая, что K_t убывает, а $t = t^* \geqslant \omega$ по (4.8), отсюда заключаем:

$$\overline{\delta}_5 \leqslant \widetilde{\delta}_5 = f(t) + (1+t)K_\omega\, \eta_0^2, \quad f(t) = 1 + 2(1+t)t^2. \tag{5.3}$$

Далее ((4.21),(5.2)),

$$\overline{\delta}_6 \leqslant \frac{1}{\omega}\ \frac{t\widetilde{\delta}_5}{1+\sqrt{1-\widetilde{\delta}_5\Lambda}}, \quad t = t^*. \tag{5.4}$$

Из (4.8) следует, что

$$t - \omega = t^* - \omega \leqslant \delta = \frac{\Lambda}{1-\Lambda}(1+\omega)(1+3.16\eta_0^2). \tag{5.5}$$

Поэтому,

$$t^* f(t^*) \leqslant \omega f(\omega) + \delta(1 - 2\omega^{-2}) + \delta^2 2\omega^{-3}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим фнкцию $c(t^*) = K_\omega t^*(1+t^*)$. Обозначим через $\widetilde{\omega}$ решение уравнения $K_\omega = 1$. Учитывая, что $(c(t^*)/\omega)'_\omega > 0$ при $\widetilde{\omega} \leqslant \omega \leqslant 2$ (заметим, что $K_\omega = 1$ при таких ω) и $c(t^*)/\omega$ убывает (так же, как и t^*/ω) при $1 \leqslant \omega < \widetilde{\omega}$, получим

$$\max_{1\leqslant\omega\leqslant 2} \frac{c(t^*)}{\omega} =$$

$$= \max\left(\frac{c(t_1)}{1}, \frac{(t_2)}{2}\right) = c(t_1) = \frac{2}{1-2\eta_0^2} t_1(1+t_1) < 4.88, \tag{5.7}$$

где

$$t_\omega = t^*\left(\omega, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, 1\right), \quad \omega = 1 \ \text{ или } \ 2,$$

$$\text{и } \ t_1 = 1.1341\ldots, \quad t_2 = 2.2024\ldots.$$

Из (5.3), (5.6) и (5.7) следует, что

$$\frac{1}{\omega} t\widetilde{\delta}_5 \leqslant f(\omega) + \mu_1\delta + \mu_2\delta^2 + 4.88\eta_0^2, \tag{5.8}$$

где $\mu_1 = \frac{1}{\omega}(1-2\omega^{-2})^+$, $\mu_2 = 2\omega^{-4}$.

Оценим $\widetilde{\delta}_5\Lambda$. Поскольку $1 \leqslant \omega \leqslant t < 3$, а функция $\zeta(\omega) = (1+\omega)K_\omega/f(\omega)$ возрастает, то

$$\widetilde{\delta}_5 \leqslant f(\omega) + (1+\omega)K_\omega\eta_0^2 = f(\omega)(1+\eta_0^2\zeta(\omega)) \leqslant$$

$$\leqslant f(\omega)(1+\eta_0^2\zeta(2)) = f(\omega)(1+1.2\eta_0^2).$$

Отсюда заключаем (см. (4.11))

$$\widetilde{\delta}_5\Lambda \leqslant \Lambda f(\omega)(1+1.2\eta_0^2) < 1.0047 f(\omega)\Lambda < 0.314. \qquad (5.9)$$

Принимая во внимание оценку

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-\varepsilon}} \leqslant \min(1.094, 1+0.3\varepsilon), \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.314,$$

и то (см. (5.5), (4.11)), что

$$\delta = t^* - \omega \leqslant 1.08(1+\omega)\Lambda < 0.0675(1+\omega) < 0.2025 \qquad (5.10)$$

из (5.8), (5.9) получим (см. (5.3), (5.4)), обозначив $f(\omega)$ через f,

$$\overline{\delta}_6 = \delta_6/\Lambda \leqslant \frac{1}{2}f + 2.7\eta_0^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\Lambda\left(0.3015f^2 + 1.1816\frac{1+\omega}{\omega}(1-2\omega^{-2})^+ + 1.2761\left(\frac{1+\omega)}{\omega^2}\right)^2 2\Lambda\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}f + 2.7\eta_0^2 + \left(0.158f^2 + 0.591\frac{1+\omega}{\omega}(1-2\omega^{-2})^+\right)\Lambda, \qquad (5.11)$$

что соответствует (2.3).

Теперь оценим $\overline{\delta}_7 = \delta_7/\Lambda$ (см. (4.22)).

Вначале рассмотрим $\overline{\delta}_4$. Имеем ((4.19), (4.6), (4.15))

$$\overline{\delta}_4 = \delta_4/\Lambda = h(t) + \left(1+\frac{3}{2}t\right)\eta_0^2, \quad t = t^*, \qquad (5.12)$$

где $h(t) = 1 + t^{-1} + (e^t - 1)/2$.

Принимая во внимание оценку (5.10) и то, что $s(\delta) = \frac{h(\omega+\delta)-h(\omega)}{\delta}$ возрастает по δ, найдем

$$\overline{\delta}_4 \leqslant h(\omega) + 1.08(1+\omega)s(0.0675(1+\omega))\Lambda + (1.10125 + 1.60125\omega)\eta_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant h(\omega) + 0.1134\omega(1+\omega)^2(1+e^\omega)\Lambda + 1.44(1+\omega)\eta_0^2, \quad 1 \leqslant \omega \leqslant 2. \quad (5.13)$$

Рассмотрим сомножитель $x\widehat{L}$ во втором слагаемом из определения δ_7 (см. (4.22), (4.18)). Имеем,

$$x\widehat{L} \leqslant \omega\widetilde{\mu}(K_1 + K_2 + K_3)\Lambda, \quad \text{где} \quad \widetilde{\mu} = (1-\delta_3)^{-3/2}, K_1 = \gamma_0^{-1}g_0,$$

$$K_2 = 3\gamma_0^{-2} t\eta_0\sqrt{1-\eta_0^2}, \quad K_3 = 3\gamma_0^{-3}\eta_0^2 t(g_0 g_1 - 1). \tag{5.14}$$

Пусть $K = K_1 + K_2 + K_3$. Тогда

$$\frac{x\widehat{L}}{\omega\Lambda} \leqslant \widetilde{\mu}K = K + K(\widetilde{\mu} - 1). \tag{5.15}$$

Вычисления показывают, что при $\rho = 1$, $1 \leqslant \omega \leqslant 2$, $\eta_0 \leqslant 1/16$ и $t = t^*$ (см. (5.10) и (4.17)) $\delta_3 < A_5\Lambda < 0.2$ и, следовательно,

$$\widetilde{\mu} - 1 < 2\delta_3 < 2A_5\Lambda. \tag{5.16}$$

Далее, по (5.10) и (4.3)

$$1 + t^* < (1+\omega)(1+0.8\Lambda) < (1+\omega)1.0675,$$

$$\gamma_0 \leqslant 1 - (1+t^*)\eta_0^2 \leqslant 1 - 0.0042(1+\omega) \tag{5.17}$$

и

$$K_1 e^{-\omega} - 1 = \delta g_1(\delta)\gamma_0^{-1} + (1+t^*)\gamma_0^{-1}\eta_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant 1.08(1+\omega)1.123\Lambda + 1.082(1+\omega)\eta_0^2 \leqslant (1+\omega)(1.213\Lambda + 1.082\eta_0^2). \tag{5.18}$$

Аналогично, подствляя в выражение для A_5 и K_3 из (5.14) вместо t^*, $1+t^*$ и γ_0 из оценки (5.10), (5.17), учитывающие зависимость от ω, и $1/16$ вместо η_0, после вычислений (напоминаем, что $1 \leqslant \omega \leqslant 2$) получим

$$\begin{aligned} &A_5 < 0.375(1+e^{\omega}), \\ &K_3 < 1.8\omega e^{\omega}(1+e^{\omega})\eta_0^2. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Далее (см. (5.14), (5.10)) при $\zeta = \gamma_0^{-2}\sqrt{1-\eta_0^2}$

$$K_2 = 3\eta_0 t^*\zeta = 3\eta_0(\omega + \delta + t^*(\zeta - 1)) <$$

$$< 3\eta_0(\omega + 1.08(1+\omega)\Lambda + t^*(\zeta - 1)); \tag{5.20}$$

$$\zeta - 1 = \gamma_0^{-2} - 1 - \gamma_0^{-2}\left(1 + \sqrt{1-\eta_0^2}\right)\eta_0^2 < \gamma_0^{-2} - 1 - \frac{1}{2}\eta_0^2.$$

Учитывая (см. (5.7)), что

$$x = (1+t^*)\eta_0^2 < (1+2.2025)/256 < 0.01251,$$

$$\text{а} \quad (1-x)^{-2} - 1 < 2.0382x \quad \text{при} \quad x \leqslant 0.01251,$$

получим ((4.3), (5.17))

$$\gamma_0^{-2} - 1 < 2.0382(1+t^*)\eta_0^2 < 2.176(1+\omega)\eta_0^2,$$

и, следовательно, $\zeta - 1 < (2.176\omega + 1.676)\eta_0^2$. Отсюда и из (5.20) имеем в результате

$$K_2 < 3\eta_0(\omega + 1.08(1+\omega)\Lambda + 1.85e^{\omega}\eta_0^2). \tag{5.21}$$

Собирая (5.13), (5.15), (5.16), (5.19), (5.21) после некоторых округлений придем к неравенству

$$\overline{\delta}_7 < h(\omega) + 0.1134\omega(1+\omega)\zeta_\omega\Lambda + 1.44(1+\omega)\eta_0^2 +$$

$$+\frac{3.968\omega}{x\psi(x)}\left(e^{\omega} + 3\omega\eta_0 + c_1\Lambda + c_2\Lambda^2 + c_3\eta_0^2 + c_4\Lambda\eta_0 + c_5\Lambda\eta_0^2\right),$$

где $\zeta_\omega = (1+\omega)(1+e^{\omega})$,

$$\begin{aligned}
c_1 &= 0.75\zeta_\omega + 1.213(1+e^{\omega}),\\
c_2 &= 0.91e^{\omega}\zeta_\omega + 1.474\zeta_\omega,\\
c_3 &= 1.082(1+\omega)e^{\omega} + 1.8\omega e^{\omega}(1+e^{\omega}) + 0.347e^{\omega},\\
c_4 &= 2.25\omega(1+e^{\omega}) + 3.24(1+\omega),\\
c_5 &= 0.8115e^{\omega}\zeta_\omega + 1.35\omega e^{\omega}(1+e^{\omega})^2 + 1.315\zeta_\omega + 0.261e^{\omega}(1+e^{\omega}).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим слагаемое P_2.

Очевидно,

$$Q(x+\varkappa) \leqslant (x+\varkappa)^{-2}\Lambda\left(\frac{1}{x+\varkappa}\right) \leqslant (1+\varkappa)^{-2}\Lambda\left(\frac{1}{1+\varkappa}\right) \tag{5.22}$$

(напоминаем об условии (2.1) и о том, что $x \geqslant 1$).

Далее оценким $p_k = \mathbf{P}(S - X_k < -\varkappa)$, $k \geqslant 1$, $\varkappa \geqslant 0$. Положим $\overline{\sigma}^2 = 1 - \sigma_k^2$. Из [13] после соответствующих преобразований получим (распространение оценок из [13] на случай $n = \infty$ не вызывает проблем)

$$|p_k - \Phi(-\varkappa(\,\overline{\sigma})| \leqslant A(\,\overline{\sigma} + \varkappa)^{-2}\Lambda\left(\frac{1}{\overline{\sigma} + \varkappa}\right),$$

откуда

$$p_k \leqslant \Phi(-\varkappa) + A(\overline{\sigma} + \varkappa)^{-2}\Lambda\left(\frac{1}{\overline{\sigma} + \varkappa}\right), \tag{5.23}$$

где A – некоторая абсолютная постоянная.

Если $\varkappa \geqslant 1$ или $\overline{\sigma}^2 > 1/2$, то нужная нам оценка для P_2 с легкостью следует из (5.22), (5.23). Пусть $0 \leqslant \varkappa < 1$ и $\overline{\sigma}^2 \leqslant 1/2$, или $\sigma_k^2 > 1/2$. Будем также считать, что $A_3 \geqslant 12\sqrt{2}$. Нас интересует лишь случай

$$1 - \Phi(-\varkappa) - A_3(1+\varkappa)^{-2}\Lambda\left(\frac{1}{1+\varkappa}\right) > 0, \quad \text{или,}$$

$$\frac{(1-\Phi(-\varkappa))(1+\varkappa)^2}{A_3} > \Lambda\left(\frac{1}{1+\varkappa}\right) \geqslant \frac{1}{1+\varkappa}\Lambda(1),$$

при котором

$$\Lambda(1) < 4/A_3. \tag{5.24}$$

Пусть

$$\overline{\sigma}_k^2 = \int\limits_{|x|>1} x^2\, dV_k(x), \quad \underline{\sigma}_k^2 = \int\limits_{|x|\leqslant 1} x^2\, dV_k(x), \quad \beta_k = \int\limits_{|x|\leqslant 1} |x|^3\, dV_k(x).$$

Имеем при условии (2.1)

$$\sigma_k^3 = \sigma_k\, \overline{\sigma}_k^2 + \underline{\sigma}_k^{\,3} + \overline{\sigma}_k\, \underline{\sigma}_k^{\,2} \leqslant \overline{\sigma}_k^2 + \beta_k + \frac{1}{2}\,\overline{\sigma}_k^2 + \frac{1}{2}\underline{\sigma}_k^{\,4} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3}{2}\,\overline{\sigma}_k^2 + \beta_k\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}(\,\overline{\sigma}_k^2 + \beta_k).$$

Если $\sigma_k^2 > 1/2$, как мы предположили, то отсюда и из (5.24) следует

$$2^{-3/2} \leqslant \sigma_k^3 \leqslant \frac{3}{2}\Lambda(1) < \frac{6}{A_3}, \quad \text{что при} \quad A_3 \geqslant 12\sqrt{2}$$

приводит к противоречию.

Таким образом, интересующая нас оценка снизу для P_2 получена.

Теорема 2 доказана полностью.

Доказательство теоремы 1.

Пусть выполняется условие (2.1) и $x \geqslant 1$, $\varkappa \geqslant 0$; $\Lambda(x) \leqslant \lambda \leqslant 2^{-4}$. В качестве отправной точки доказательства возьмем неравенство (5.1).

Оценка снизу для слагаемого P_2 в нем не зависит от η и может считаться установленной.

Рассмотрим величину P_1 при $c = 1/x$, предполагая, что (см. начало п. 2)

$$\max_{l \geqslant 1} R_l \leqslant R_0 < 1/2. \tag{5.25}$$

Используя, как и ранее, оценки (3.3)–(3.9), (3.11) и оценку

$$L \geqslant e^{-t}(1 - R) \tag{5.26}$$

вместо (3.12), а также (3.10) вместо (3.10′), при помощи рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 2 (оценка P_1 при $\omega = 1$), придем к нужной оценке снизу для P_1, не используя информации о величине η (см. теорему 2). Для примера, аналоги величин δ_1 и $\widetilde{\delta}_1$ (см.(4.4)–(4.7), (3.12), (5.26), (4.1)) имеют вид

$$\delta_1 = \left(\rho + t^{-1} + (1 + t^{-1}) g_0 \frac{R_0}{1 - R_0}\right)\delta^2 + t(g_1 + g_2)\min(\delta^2, \lambda) + \left(\frac{1}{2}t + t^2 g_1 g_2\right)\lambda,$$

$$\widetilde{\delta}_1 = \rho + t^{-1} + (1 + t^{-1}) g_0 \frac{R_0}{1 - R_0},$$

если $1 \leqslant t \leqslant 1.2$, а R_0 близко к $1/2$.

Отметим, что аккуратные вычисления приводят к достаточно разумной величине постоянных A_1, A_2 (зависящих от R_0), которые тем не менее, много хуже их аналогов, учитывающих η.

Условие (5.25), при котором, в частности, справедлива теорема 1, имеем место, если $x^2\delta^2 \leqslant R_0$ (см. (4.1)). Пусть теперь

$$x^2\delta^2 > R_0. \tag{5.27}$$

Положим $J = \{k : R_k \leqslant R_0\}$, $J^c = N \setminus J$, $\#J^c$ – число элементов J^c. Тогда

$$R_0 \#J^c \leqslant \sum_{k \in J^c} R_k \leqslant \sum_{k \geqslant 1} R_k \leqslant c^{-2}\delta^2$$

и

$$\sum_{k \in J^c} \alpha_{2k} \leqslant \#J^c\, c^2 (1 - R_0) \leqslant (R_0^{-1} - 1)\delta^2$$

(см. обозначения в (4.1), (3.2)).

Отсюда (напоминаем об условии (2.1) и о том, что $c = 1/x$)

$$\sum_{k \in J^c} \sigma_k^2 \leqslant \delta^2(1 + (R_0^{-1} - 1)) = R_0^{-1}\,\delta^2 \tag{5.28}$$

и

$$\sum_{k\in J}\alpha_{2k} = 1-\delta^2-\sum_{k\in J^c} \geqslant 1-\delta^2-(R_0^{-1}-1)\delta^2 = 1-R_0^{-1}\,\delta^2. \quad (5.29)$$

Последнее неравенство является не чем иным, как условием (4.2) при $\rho = R_0^{-1}$.

Рассмотрим (см. (5.1)) выражение $P_1 = P_1(c)$ при $c = x$.

Легко убедиться в том, что

$$P_1 = P_1(x) \geqslant \mathbf{P}\left(\sum\nolimits' X_k \geqslant \overline{x}, \max_{k\in J} X_k \leqslant x\right),$$

$$\mathbf{P}\left(\sum\nolimits'' X_k > -\tau x, \max_{k\in J^c} X_k \leqslant x\right) = P^{(1)}\,P^{(2)}, \quad (5.30)$$

где $\sum' \ldots = \sum_{k\in J}\ldots$, $\sum'' \ldots = \sum_{k\in J^c}\ldots$, $\overline{x} = (1+\tau)x$, $1 > \tau > 0$.

Имеем, применяя неравенство Чебышева и (5.28), (см. также (4.1))

$$P^{(2)} \geqslant 1-\mathbf{P}\left(\sum\nolimits'' X_k \leqslant -\tau x\right) - \sum\nolimits'' \mathbf{P}(X_k > x) \geqslant$$

$$\geqslant 1-\frac{\delta^2}{R_0\tau^2x^2}-\frac{\delta^2}{x^2} > 1-\frac{2\delta^2}{R_0\tau^2x^2}. \quad (5.31)$$

Положим

$$\tau = \frac{\delta}{x}\,x_0, \quad x_0 = \left(\frac{R_0(1-e^{-1})}{2}\right)^{-1/2}. \quad (5.32)$$

Тогда

$$P^{(2)} \geqslant e^{-1}. \quad (5.33)$$

Далее, $P^{(1)} \geqslant P'$ (см. (4.13)), а для оценки снизу этой вероятности применимы соотношения (4.2) при $\rho = R_0^{-1}$, формулы (4.19)–(4.21), учитывающие зависимость от τ и ρ, и рассуждения в начале доказательства теоремы 1 – ведь при $k \in J$ предположение (5.25) выполняется. Итак, справедлива оценка (4.22), в которой

$$\delta_6 = 2\tau + \widetilde{A}_1(\tau,\rho)\Lambda(x), \quad \delta_7 = \tau + \widetilde{A}_2(\tau,\rho)\Lambda(x), \quad (5.34)$$

где величины $\widetilde{A}_i(\tau,\rho)$ равномерно ограничены в окрестностях $\tau = 0$ и $\rho = 1$.

Из (5.27), (5.32) следует, что

$$1 \leqslant R_0^{-1}\, x^2\, \delta^2 \quad \text{и} \quad x^2\tau = x\delta\varkappa_0 \leqslant \frac{\varkappa_0}{\sqrt{R_0}}\, x^2\delta^2.$$

Кроме того, если $\Lambda(x)$ достаточно мало, то $1 - \delta_6 \geqslant e^{-1}$. Последние оценки вместе с (5.1), (5.30), (5.33), (5.34) и (4.22) позволяют заключить, что вероятность P_1 из (5.1) не превосходит $(1-\Phi(x))e^{-A_1 x^2 \Lambda(x)}$, где A_1 – некоторая достаточно большая абсолютная постоянная.

Теорема 1, таким образом, полностью доказана.

Литература

1. L. V. Rozovsky, *On a lower bound for large deviation probabilities of sum of independent random variables with finite variances.* International Conference "Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics," St. Petersburg, June 24–28, Abstracts 1998, pp. 236–237.
2. M. G. Hahn, M. J. Klass, *Approximation of partial sums of arbitrary I.I.D. random variables and the precision of the usual exponential upper bound.* — Ann. Prob. **25, No. 3** (1997), 1451–1470.
3. С. В. Нагаев, *Некоторые уточнения вероятностных неравенств.* — Вестник МГУ, сер. мат. мех. **No. 6** (1996), 64–66.
4. S. N. Nagaev, *Lower bounds on large deviation probabilities for sums of independent random variables.* International Conference "Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics," St. Petersburg, June 24–28, Abstracts 1998, pp. 186–190.
5. А. Н. Архангельский, *Нижние оценки для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теор. вероятн. и ее примен. **34, No. 4** (1989), 625–635.
6. A. N. Kolmogoroff, *Über das Gesets des iterierten Logarithmus.* — Math. Ann. **101** (1929), 126–135.
7. W. Feller, *Generalization of a propability theorem of Cramer.* — Trans. Am. Math. Soc. **54, No. 3** (1943), 361–372.
8. Л. В. Розовский, *О коэффициентах ряда Крамера.* — Теория вероятн. и ее примен. **43, вып. 1** (1998), 161–166.
9. Л. В. Розовский, *Об одной теореме Феллера.* — Теория вероятн. и ее примен. **44 No. 1** (1999), 128–132.
10. S. V. Nagaev, *Large deviations of sums of independent random variables.* — Ann. Prob. **7, No. 5** (1976), 745–789.
11. С. В. Нагаев, *О вероятностях больших уклонений в банаховых пространствах.* — Матем. зам. **42, вып. 1** (1987), 145–156.
12. Л. В. Розовский, *Одна оценка для вероятностей больших уклонений.* — Матем. зам. **34, вып. 2** (1983), 309–313.
13. А. П. Бикялис, *Оценки остаточного члена в центральной предельной теореме.* — Литов. матем. сб. **6, вып. 3** (1966), 323–346.

14. V. Nikulin, L. Paditz, *A note on nonuniform CLT-bounds*. 7th Vilnius Conference on Prob. Theory, Abstracts 1998, pp. 358–359.

Rozovsky L. V. A lower bound for large deviation probabilities of sum of independent random variables with finite variances.

Our objective is to obtain nonasymptotic estimates from below for large deviation probabilities of sum of independent random variables which are more general, sharp and natural than analogous estimates of other authors.

Санкт-Петербургская
химико-фармацевтическая академия

Поступило 7 декабря 1998 г.