Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

**Л. В. Розовский**

# ОЦЕНКА ИНТЕГРАЛА ОТ МОДУЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОБОБЩЕННОГО ПУАССОНОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ИНТЕРВАЛУ МАЛОЙ ДЛИНЫ

## Результаты

Пусть

$$h(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - 1)\,dH(x),$$

где $H(x)$ – неубывающая функция.

Функция $e^{h(t)}$ является модулем характеристической функции некоторого обобщенного пуассоновского распределения, и нас, так же как в [1], будут интересовать оценки интегралов вида $I_\Delta = \int_\Delta e^{h(t)}dt$, где $\Delta$ – произвольный интервал достаточно малой длины $|\Delta|$. Необходимость в оценках такого рода возникает при вычислении скорости сходимости моментов в центральной предельной теореме, при оценивании функции концентрации сумм независимых случайных величин, в локальных теоремах и некоторых других задачах теории вероятностей (например, [1–7]).

В дальнейшем используются обозначения

$$B^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dH(x), \quad \gamma = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3\,dH(x).$$

**Лемма 1.** *Пусть*

$$dH(x) = 0 \quad \textit{при} \quad |x| > l > 0. \tag{1}$$

Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ No. 99-01-00724 и грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199.

*Тогда при любом* $\delta \in (0,2)$ *и* $\Delta$, $|\Delta| \leqslant \delta/l$,

$$B\, I_\Delta \leqslant C_\delta = \max\left(\frac{\delta}{\sqrt{e(1-\frac{\delta}{2})}},\ 2\sqrt{\frac{\pi}{1-\frac{\delta}{6}}}\right). \tag{2}$$

Минимум $C_\delta/\delta$ достигается при $\delta_* = 1.86021\ldots$ и

$$B\, I_\Delta|_{\delta=\delta_*} < 2.2942\,\delta_* < 4.2677. \tag{3}$$

**Лемма 2.** *Пусть* $\gamma < \infty$. *Тогда при любом* $\delta \in (0,2)$ *и* $\Delta$, $|\Delta| \leqslant \delta B^2/\gamma$,

$$B\, I_\Delta \leqslant \max\left(\frac{2\delta}{\sqrt{e(1-\frac{\delta}{2})^3}},\ \sqrt{\frac{2\pi}{\rho(\max(v_*, \eta-\xi_\delta))}}\right). \tag{4}$$

*Здесь*

$$\xi_\delta = \min\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta}{4},\quad \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right),\quad \eta = \frac{1}{2}-\frac{\delta}{12},$$

$v_*$ – *единственный на интервале* $(0,\eta)$ *корень уравнения*

$$g(v) = 2v^3 - 3\eta v^2 - \frac{\delta^2}{4\pi}v + \eta^3 = 0,$$

*а*

$$\rho(v) = v\exp\left(\frac{4\pi(\eta-v)^3}{\delta^2 v}\right).$$

*Кроме того, если* $0 \in \Delta$, *то*

$$B\, I_\Delta \leqslant 2\sqrt{\frac{\pi}{1-c_0\delta}},\quad 0<\delta<\frac{1}{3c_0}, \tag{5}$$

*где*

$$c_0 = \sup_{x>0}\frac{\cos x - 1 + x^2/2}{x^3} = 0.09916\ldots.$$

**Замечание.** Пусть $\delta^* = 1.2711\ldots$ – корень уравнения

$$(1+\delta)^2 = 5 + \left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3\pi}\right)\delta^3. \tag{6}$$

Тогда, если $0<\delta\leqslant\delta^*$, то в (4) $\rho(\max(v_*, \eta-\xi_\delta)) = \rho(v_*)$.

Отметим, что минимум по $\delta$ правой части (4), деленной на $\delta$, достигается при $\delta_* = 1.11912\ldots$ и

$$B\,I_\Delta|_{\delta=\delta_*} < 4.15005\,\delta_* < 4.6445. \tag{7}$$

Леммы 1 и 2 уточняют леммы 3–5 из [1]. Применение оценок (7), (3) и (5) (при $\delta = 2\delta_*$), позволяет уменьшить величины постоянных $c_1$, $c_2$, $c_4$, $c_5$ из теорем 1 и 2 этой работы. Так, справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** *В соотношениях* (2), (3) *из* [1] *можно заменить* $c_1 = 2.128815$ *на* $1.81676$, $c_2 = 6.6383125$ *на* $4.70263$, $c_4 = 2.34584$ *на* $2.01725$ *и* $c_5 = 4.86119$ *на* $2.59967$.

Заметим еще, что оценки для $B\,I_\Delta$ с худшей по сравнению с [1] зависимостью от $\delta$ являются следствием леммы 3.1 из [6]. Нижеследующий результат уточняет эту лемму, имея, кроме того, более предпочтительную на наш взгляд формулировку.

**Лемма 3.** *Пусть* $t_0 \in \Delta$ – *точка для которой* $h(t_0) = \max\limits_\Delta h(t)$. *Тогда* $\forall t \in \Delta$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - 1)dH(x) \leqslant -\frac{1}{2}u^2\,B^2 + \widehat{c}|u|^3\gamma, \tag{8}$$

*где*

$$u = t - t_0, \quad \widehat{c} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = 0.438832\ldots.$$

**Замечание.** В предположении (1) утверждение леммы 3 при $|u| \leqslant \sqrt{2}/l$ имеет место с постоянной $\widehat{c} = 1/6$. В частности,

$$h(t) \leqslant -\frac{1}{4}u^2\,B^2\left(1 - \frac{|u|\,l}{3}\right), \quad |u| \leqslant \sqrt{2}/l.$$

Отметим, что ограничение $\gamma < \infty$ не слишком существенно, поскольку при любом $l > 0$

$$h(t) \leqslant h_l(t) = \int\limits_{-l}^{l} (\cos tx - 1)dH(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\cos tx - 1)dH_l(x),$$

что позволяет использовать леммы 1–3, заменяя в их формулировках $B^2$ на $B_l^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dH_l(x)$, $\gamma$ на $\gamma_l = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3 dH_l(x)$ и $t_0$ на $t_{0,l} : h(t_{0,l}) = \max\limits_{\Delta} h_l(t)$.

Приведем одно следствие вышесказанного и леммы 1.

**Следствие.** *Пусть $v_1(t), \dots, v_n(t)$ – характеристические функции случайных величин $X_1, \dots, X_n$. При всех $a$, $\lambda > 0$, $\beta > 0$ и $\delta \in (0, 2)$*

$$\int\limits_a^{a+\lambda} \left| \prod_{j=1}^n v_j(t) \right|^\beta dt \leqslant \frac{C_\delta}{\widetilde{B}(2\delta/\lambda)\sqrt{\beta}}, \tag{9}$$

*где*

$$\widetilde{B}_n^2(l) = \sum_{j=1}^n \int\limits_{|x| \leqslant l} x^2 d\widetilde{V}_j(x),$$

*а $\widetilde{V}_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, являются функциями распределения симметризованных случайных величин $X_j$.*

При $\delta = \pi/2$ (и $C_\delta = 2\sqrt{\frac{\pi}{1-\pi/12}}$) оценка (9) уточняет аналогичную оценку из [7], в которой множитель, соответствующий $C_\delta$, равен $3\pi\sqrt{\pi/2} = 11.8122\dots$.

Отметим также, что если случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют нулевые средние и конечные дисперсии, такие что $\sum\limits_{j=1}^n \mathbf{D}X_j = B^2 < \infty$, а $l$ удовлетворяет условию

$$\Lambda(l) = \frac{1}{B^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{E} X_j^2 I[|X_j| > l] \leqslant 1/6,$$

то

$$\int\limits_a^{a+\lambda} \left| \prod_{j=1}^n v_j(t) \right|^\beta dt < \min_{0<\delta<2} \frac{C_\delta\,[1 + \frac{\lambda l}{\delta}]}{B\sqrt{\beta}} < \frac{4.2677 + 2.2942\lambda l}{B\sqrt{\beta}}.$$

Заметим, что если $\Lambda(B) \leqslant 1/12$, то здесь можно положить

$$l = \frac{12}{B^2} \sum_{j \geqslant 1} \mathbf{E}|X_j|^3 I[|X_j| \leqslant B].$$

Для проверки следствия применим справедливую при всех положительных $l$ оценку

$$\left|\prod_{j=1}^{n} v_j(t)\right|^{\beta} \leqslant e^{\frac{1}{2}\beta\sum_{j=1}^{n}(|v_j(t)|^2-1)} \leqslant e^{h(t)},$$

где

$$h(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{|x|\leqslant l}(\cos tx - 1)d\widetilde{H}(x), \ \ \widetilde{H}(x) = \beta\sum_{j\geqslant 1}\widetilde{V}_j(x).$$

Остается воспользоваться леммой 1 при $\Delta = (a, a+\lambda)$ и $l = 2\delta/\lambda$.

Второе утверждение следует из оценки (9) при $\lambda = \delta/l$, аддитивности интеграла и неравенства $\widetilde{B}_n^2(2l) \geqslant B^2(2 - 6\Lambda(l)) \geqslant B^2$, которое можно найти в [8].

## Доказательства

Можно показать (см. [6, (3.5)] или [1, (9)]), что в обозначениях леммы 3

$$h(t) \leqslant -\frac{1}{4}u^2\, B^2 + \frac{1}{12}|u|^3\gamma + h(t_0) + \frac{u^2}{2}\widetilde{H}(t_0), \tag{10}$$

где

$$\widetilde{H}(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2(1-\cos tx)dH(x).$$

Если выполнено условие (1), то $\widetilde{H}(t_0) \leqslant -l^2 h(t_0)$. Отсюда и из (10) следует замечание к лемме 3.

Теперь, как и [1],

$$\widetilde{H}(t_0) \leqslant \gamma^{2/3}\,|h(t_0)|^{1/3}, \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\frac{u^2}{2}\widetilde{H}(t_0) - |h(t_0)| \leqslant \gamma|u|^3\,\nu\Big(\frac{|h(t_0)|}{|u|^3\gamma}\Big),$$

где $\nu(v) = \frac{1}{2}v^{1/3} - v$.

С учетом того, что $\max\limits_{v>0}\nu(v) = \frac{1}{3\sqrt{6}}$, отсюда и из (10) получим оценку (8). Лемма 3 доказана.

Пусть

$$\xi \geqslant \frac{1}{B^2}\widetilde{H}(t_0), \quad \lambda = |h(t_0)|, \quad L = \gamma/B^3$$

и

$$\tau(v) = v^2\left(\frac{1}{2} - \frac{|v|L}{6} - \xi\right). \tag{12}$$

Перепишем соотношение (10) следующим образом

$$h(t) \leqslant -\lambda - \frac{1}{2}\tau(uB), \quad t \in \Delta, \quad u = t - t_0. \tag{13}$$

Функция $\tau(v)$ четная и возрастает при $0 \leqslant v \leqslant v_0 = (2-4\xi)/L$. Поэтому, если

$$\varepsilon B L \leqslant 2 - 4\xi, \tag{14}$$

где $\varepsilon = |\Delta|$, то

$$B\, I_\Delta \leqslant e^{-\lambda} \int\limits_{B(\Delta - t_0)} e^{-\frac{1}{2}\tau(v)} dv \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\lambda} \max_{p\in[0,1]} \int\limits_{(p-1)\varepsilon B}^{p\varepsilon B} e^{-\frac{1}{2}\tau(v)} dv \leqslant e^{-\lambda} \int\limits_{|v| \leqslant \frac{\varepsilon B}{2}} e^{-\frac{1}{2}\tau(v)} dv. \tag{15}$$

Докажем лемму 1. Пусть выполняется условие (1) и $|\Delta| = \varepsilon \leqslant \delta/l$, где $0 < \delta < 2$. Положим $\bar{l} = l/B$, $\xi = \bar{l}^{\,2}\lambda$. Очевидно,

$$B\, I_\Delta \leqslant e^{-\lambda}\delta/\bar{l}. \tag{16}$$

Если

$$\bar{l}^{\,2}\lambda > \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\delta,$$

то

$$\bar{l}^{\,-1} e^{-\lambda} \leqslant \sup_{\bar{l}>0} \bar{l}^{\,-1} e^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta)/\bar{l}^{\,2}} = \frac{1}{\sqrt{e(1-\frac{1}{2}\delta)}}. \tag{17}$$

Пусть теперь

$$\bar{l}^{\,2}\lambda \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\delta.$$

Поскольку $L \leqslant \bar{l}$, отсюда вытекает (14). Кроме того,

$$\frac{\varepsilon B}{2} \leqslant \frac{\delta}{2\bar{l}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\bar{l}}.$$

Поэтому (см. (14), (15) и замечание к лемме 3)

$$B\,I_\Delta \leqslant e^{-\lambda} \int\limits_{|v|\leqslant \frac{\delta}{2\bar{l}}} e^{-\frac{1}{2}\tau(v)}dv \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|v|\leqslant \frac{\delta}{2\bar{l}}} e^{-\frac{1}{2}v^2(\frac{1}{2}-\frac{|v|\bar{l}}{6})}dv < \sqrt{2\pi}\,(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\delta)^{-1/2}. \tag{18}$$

Из (16)–(18) следует оценка (2). Лемма 1 доказана.

Пусть теперь $\xi = L^{2/3}\lambda^{1/3}$ (см. (11), (12)) и $|\Delta| = \varepsilon \leqslant \frac{\delta}{BL}$. Тогда, если

$$\xi \geqslant \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta,$$

то

$$\lambda \geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta\right)^3 / L^2$$

и аналогично (16), (17)

$$B\,I_\Delta \leqslant \sup_{\gamma>0} \gamma^{-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta\right)^3 / L\right\} = \delta\left(2e\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta\right)^3\right)^{-1/2}. \tag{19}$$

Пусть теперь

$$\delta < 2(\sqrt{2}-1) \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{2\sqrt{2}} \leqslant \xi < \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta.$$

Тогда

$$B\,I_\Delta \leqslant \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\delta\right)^{-1/2}. \tag{20}$$

В самом деле (см. (12), (15)),

$$-\lambda + \frac{1}{2}\xi v^2 \leqslant 0 \longleftrightarrow |v| \leqslant \frac{1}{L}\xi\sqrt{2},$$

но

$$\frac{1}{L}\xi\sqrt{2} \geqslant \frac{\varepsilon B}{2} = \frac{1}{L}\frac{\delta}{2},$$

если $\xi \geqslant \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$. Остается воспользоваться оценкой (18) при $\bar{l} = L$.

Пусть, наконец,

$$\xi < \xi_\delta = \min\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\delta, \frac{\delta}{2\sqrt{2}}\right). \tag{21}$$

Из (12), (14), (15) следует, что

$$B\,I_\Delta \leqslant \sqrt{2\pi}e^{-\lambda}\left(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon BL}{12}-\xi\right)^{-1/2}, \quad \xi<\xi_\delta.$$

Кроме того, всегда $B\,I_\Delta \leqslant e^{-\lambda}\frac{\delta}{L}$. Таким образом, при условии (21)

$$B\,I_\Delta \leqslant \min\left(e^{-\lambda}\frac{\delta}{L}, e^{-\lambda}\sqrt{2\pi}(\eta-\xi)^{-1/2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant\xi<\xi_\delta} e^{-\lambda}\min\left(\frac{\delta}{L}, \sqrt{2\pi}(\eta-\xi)^{-1/2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\lambda>0} e^{-\lambda}A = \max(A_1, A_2), \tag{22}$$

$$A_1 = \sup_{0<\lambda<\overline{\lambda}} A, \quad A_2 = \sup_{\lambda\geqslant\overline{\lambda}} A,$$

где

$$A = \max_{L^2\leqslant\xi_\delta^3/\lambda}\min\left(\frac{\delta}{L}, \sqrt{2\pi}(\eta-\xi)^{-1/2}\right), \quad \eta=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\delta.$$

Пусть

$$\overline{\lambda} = 2\pi\xi_\delta^3\delta^{-2}(\eta-\xi_\delta)^{-1}.$$

Тогда с учетом того, что $\frac{\delta}{L}$ убывает, а $\sqrt{\frac{2\pi}{\eta-\xi}}$ возрастает (от $\sqrt{\frac{2\pi}{\eta}}$ до $\sqrt{\frac{2\pi}{\eta-\xi_\delta}}$) при $0\leqslant L\leqslant\sqrt{\xi_\delta^3/\lambda}$ (напоминаем, что $\xi=L^{2/3}\lambda^{1/3}$),

$$A_2 = \sup_{\lambda\geqslant\overline{\lambda}} e^{-\lambda}\max_{0\leqslant\xi<\xi_\delta}\sqrt{\frac{2\pi}{\eta-\xi}} = e^{-\overline{\lambda}}\sqrt{\frac{2\pi}{\eta-\xi_\delta}}, \tag{23}$$

$$A_1 = \sup_{0<\lambda<\overline{\lambda}} e^{-\lambda}\frac{\delta}{L},$$

где

$$L = L(\lambda) = \left\{L : \frac{\delta}{L} = \sqrt{\frac{2\pi}{\eta-\xi}}\right\}. \tag{24}$$

Учитывая, что

$$\lambda = L^{-2}(\eta-2\pi L^2\delta^{-2})^3 \tag{25}$$

отсюда получим

$$A_1 = \max_{L:\lambda\leqslant\overline{\lambda}} e^{-\lambda}\frac{\delta}{L},$$

где $\lambda$ определено в (25). Имеем, положив $A_3 = A_1^{-2}$, в обозначениях леммы 2

$$A_3 = \frac{1}{2\pi}\min\rho(v), \tag{26}$$

где min берется по множеству

$$\{v : 0 \leqslant v \leqslant \eta,\ (\eta - v)^3 \leqslant v\,\xi_\delta^3\,(\eta-\xi_\delta)^{-1}\}.$$

Далее,

$$\rho'(v) = -\frac{4\pi}{(v\delta)^2}\rho(v)g(v).$$

Поскольку $g(0) > 0$, $g(\eta) < 0$ и $g'(v) < 0$, $0 \leqslant v \leqslant \eta$, найдется единственный корень $v_*$ уравнения $g(v) = 0$, $0 \leqslant v \leqslant \eta$, причем $\rho(v_*) = \min\limits_{0\leqslant v\leqslant\eta}\rho(v)$.

Пусть $v^*$ – единственный корень уравнения $(\eta - v)^3 = v\,\xi_\delta^3/(\eta - \xi_\delta)$, то есть $v^* = \eta - \xi_\delta$.

Легко понять, что в (26)

$$\min\rho(v) = \rho(\max(v_*, v^*)),$$

или

$$A_3 = \frac{1}{2\pi}\rho(\max(v_*, \eta - \xi_\delta)),$$

где $g(v_*) = 0$.

Учитывая, что (см. (23))

$$A_2 = \left(\frac{\rho(v^*)}{2\pi}\right)^{-1/2},$$

получим

$$B\,I_\Delta \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\,\rho(\max(v_*, \eta-\xi_\delta))\right)^{-1/2}, \quad \xi < \xi_\delta, \tag{27}$$

а имея в виду (19), (20), и то, что

$$A_1 \geqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\eta}}$$

(см. (24)), приходим к оценке (4), $0 < \delta < 2$.

Для проверки замечания к лемме 2 заметим, что условие $v_* > \eta - \xi_\delta$ равносильно неравенству $g(\eta - \xi_\delta) > 0$. Несложно убедиться в том, что (см. (21)) это условие выполняется, если $0 < \delta \leqslant 2(\sqrt{2}-1)$ и если $2(\sqrt{2}-1) < \delta \leqslant \delta^*$ (см. (6)). Таким образом, если $0 < \delta \leqslant \delta^*$, то $v_* > \eta - \xi_\delta$ и $\rho(\max(v_*, \eta - \xi_\delta)) = \rho(v_*)$.

Оценка (5) получается с помощью стандартных, аналогичных (18), рассуждений, если иметь в виду соотношение

$$h(t) = -\frac{t^2}{2}B^2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\cos tx - 1 + \frac{1}{2}t^2x^2\right) dH(x) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{t^2}{2}B^2 + \widetilde{c}|t|^3\gamma.$$

## Литература


1. С. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян, *Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **XLI**, № 3 (1996), 655–665.
2. C.-G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law.* — Acta Math. **77** (1945), 1-125.
3. B. von Bahr, *On the convergence rate of moments in the central limit theorem.* — Ann. Math. Statist. **36** no. 3 (1965), 808–818.
4. P. Hall, *Bounds on the rate of convergence of moments in the central limit theorem.* — Ann. Probab. **10** no. 4 (1982), 1004–1018.
5. А. Б. Мухин, *Локальные предельные теоремы для плотностей сумм независимых случайных векторов.* — Изв. АН УзССР, Сер. физ.-мат. наук **1** (1984), 32–35.
6. A. Yu. Zaitsev, *On the Gaussian approximation of convolutions under multidimensional analogues of S. N. Bernstein's inequality condition.* — Probab. Th. Rel. Fields **74** (1987), 535–566.
7. А. Б. Мухин, *О концентрации распределений сумм независимых случайных величин. II.* — Изв. АН УзССР, Сер. физ.-мат. наук **6** (1973), 18–23.
8. Л. В. Розовский, *О точности нормального приближения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 129–137.



Rozovsky L. V. An estimate of the integral of the module of a generalized Poisson distribution characteristic function in a small length interval.

In the note new estimates for the integrals of generalized Poisson distribution characteristic function in intervals of sufficient small length are obtained. The typical applications of such estimates are the following: the evaluation of a convergence rate of moments in the CLT, estimates of concentration functions, local limit theorems.



Санкт-Петербургская
Химико-Фармацевтическая Академия


Поступило 14 марта 1999 г.