Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

А. В. Судаков

КОНТРПРИМЕР К ГИПОТЕЗЕ О МОНОТОННОСТИ ИНТЕГРАЛА ПО ГАУССОВСКОЙ МЕРЕ

При изучении феномена существования типичных распределений (см., например, [1]) для пространств случайных величин второго порядка возникает интеграл

$$I(m) = \iint\limits_{E\oplus E} \varkappa(\mathcal{L}(X_1), \mathcal{L}(X_2))(m\otimes m)\, d(X_1, X_2),$$

где $E\oplus E$ — ортогональная сумма двух копий евклидова пространства E случайных величин X с дисперсиями, на котором задана вероятностная мера m, $\mathcal{L}(X_i) = \mathbf{P}\circ X_i^{-1}$; X_1 и X_2 — обозначение элементов этих копий, а $\varkappa$ — расстояние Канторовича, в одномерном случае задаваемое равенством $\varkappa(\mu,\nu) = \int |F_\mu(t) - F_\nu(t)|\, dt$. Для центрированных гауссовских мер m высказывалась проверенная для разнообразных частных случаев гипотеза о монотонности по m интеграла $I(m)$ (мы говорим, что центрированные гауссовские меры γ' и γ'' связаны соотношением $\gamma' < \gamma''$, если $\gamma'' = \gamma' * \gamma'''$ для некоторой гауссовской меры γ'''). Эта гипотеза оказалась неверной, и настоящая статья посвящена построению контрпримера.

В нашем примере пространство E двумерно и состоит из случайных величин X, принимающих два (возможно, совпадающих) значения с равными вероятностями. Иными словами, роль пространства E играет координатное пространство $\mathbb{R}^2$, и координаты (x, y) произвольной точки, по сказанному, определяют закон распределения. Можно, например, представить себе, что пространством элементарных событий служит $\Omega = \mathbb{R}^2$ — пространство, сопряженное с E, а вероятностная мера $\mathbf{P}$ представляет собой две равные нагрузки — по $\frac{1}{2}$ — на точках $\omega_1^0 = (1,0)$, $\omega_2^0 = (0,1)\in\Omega$. Гауссовские центрированные меры на пространстве E определяются каждая своей корреляционной квадратичной формой $q_\gamma(\omega)$, заданной на Ω: $q_\gamma(\omega) = \int_E (X,\omega)^2\gamma(dX)$, и при этом свертке гауссовских мер соответствует сумма корреляционных квадратичных форм. На пространствах $\mathbb{R}^2$ рассматривается также естественная евклидова метрика.

Итак, пусть $E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}$. Рассмотрим на этом пространстве центрированные одномерные гауссовские меры $\bar{\gamma}^\delta$ («растягиваемая», с единичной дисперсией, сосредоточенная на прямой $\delta x + y = 0$) и γ_{ε^2} («растягивающая», с дисперсией ε^2, сосредоточенная на прямой $x + y = 0$).

Теорема. *При достаточно малых положительных δ и ε выполняется неравенство $I(\bar{\gamma}^\delta * \gamma_{\varepsilon^2}) - I(\bar{\gamma}^\delta) < 0$.*

Рассмотрим сперва произвольные центрированные гауссовские меры на $E = \mathbb{R}^2$: растягиваемую $\bar{\gamma}$ и одномерную растягивающую γ с единичной дисперсией. Пусть $\varkappa\colon E \oplus E = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_+$ — расстояние по Канторовичу между парой распределений случайных величин $\varkappa(\mathcal{L}((x_1, y_1)), \mathcal{L}((x_2, y_2))) =: \varkappa(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{2}\min\{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, |x_2 - y_1| + |y_2 - x_1|\}$, пусть $\{\xi_{\sigma^2} : \sigma \in \mathbb{R}_+\}$ — семейство случайных векторов из $E \oplus E$ с двумерным «круглым» распределением $\gamma_{\sigma^2} \otimes \gamma_{\sigma^2}$, где $\gamma_{\sigma^2} = \gamma \circ \sigma^{-1}$ получается гомотетичным растягиванием γ в σ раз. Двумерное подпространство, на котором сосредоточены меры $\gamma_{\sigma^2} \otimes \gamma_{\sigma^2}$, обозначим L_γ. Для произвольного $z_0 \in E \oplus E$, как легко проверить,

$$\frac{d}{d\sigma^2}\mathbf{E}(\varkappa(z_0 + \xi_{\sigma^2})) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\int\limits_{L_\gamma} \Delta_{L_\gamma}\varkappa(z_0 + z)e^{-\frac{|z|^2}{2\sigma^2}}\,dz,$$

где Δ_{L_γ} — двумерный оператор Лапласа в евклидовой плоскости L_γ. Рассматривая производную по σ^2 математического ожидания $\varkappa$ на всем $E \oplus E$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma^2}\mathbf{E}_{\bar{\gamma}*\gamma_{\sigma^2}}(\varkappa) &= \int\limits_{E\oplus E} \mathbf{E}(\varkappa(\bar{z} + \xi_{\sigma^2}))\,\bar{\gamma}(d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_{E\oplus E}\left(\int\limits_{L_\gamma} \Delta_{L_\gamma}\varkappa(\bar{z} + z)\,\gamma_{\sigma^2}(dz)\right)\bar{\gamma}(d\bar{z}).\end{aligned}$$

Другими словами, для каждой точки $\bar{z} \in E \oplus E$ находится математическое ожидание случайной величины $\Delta_{L_\gamma}\varkappa(\bar{z} + z)$ по мере γ_{σ^2}, и полученная функция интегрируется по $\bar{\gamma}$.

Изучим поведение (обобщенной) функции $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$, заданной на двумерных слоях, параллельных L_γ. Лапласиан $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$ в любой точке пространства $E\otimes E$ есть сумма вторых частных производных функции $\varkappa$ по каким-нибудь двум ортогональным направлениям в плоскости L_γ. Поскольку функция $\varkappa$ — кусочно-линейная (кусочно-аффинная) на каждой сдвинутой плоскости L_γ (как и вообще на любом аффинном подпространстве), лапласиан $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$ равен нулю внутри участков линейности и является одномерной лебеговой мерой с некоторым коэффициентом на частях прямых (в нашем случае — лучах), являющихся границами участков линейности. Нам надо определить эти коэффициенты.

Если направления дифференцирования в ортогональной паре выбраны перпендикулярно и параллельно прямой излома, то вторая производная вдоль прямой излома равна нулю, и $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$ равен второй производной поперек излома. Коэффициент при одномерной δ-мере равен пределу разностей первых частных производных (поперек излома) за и перед изломом. Если же дифференцирование идет по произвольной паре ортогональных направлений, коэффициент при одномерной δ-мере равен сумме вторых производных по этим направлениям с коэффициентами, равными синусам углов между соответствующими направлениями дифференцирования и прямой излома.

Если $\bar\gamma$ сосредоточена на прямой (как в интересующем нас случае), то в $E\oplus E$ мера $\bar\gamma\otimes\bar\gamma$ сосредоточена на двумерном подпространстве $L_{\bar\gamma}$. Если $\bar\gamma$ и γ сосредоточены на разных прямых, то $L_{\bar\gamma}$ и L_γ пересекаются только по началу и $L_{\bar\gamma}+L_\gamma=\mathbb{R}^4$. Через каждую точку плоскости $L_{\bar\gamma}$ проходит ровно одна сдвинутая L_γ, и мы можем их индексировать точками $\bar z\in L_{\bar\gamma}$: $L_{\gamma,\bar z}$.

Пусть $x\bar s=y\bar c$ — уравнение прямой, на которой сосредоточена $\bar\gamma$, $\bar c^2+\bar s^2=1$. Тогда $L_{\bar\gamma}\ni\bar z=(b_1\bar c,b_1\bar s,b_2\bar c,b_2\bar s)$, и (b_1,b_2) суть координаты в естественной ортонормированной системе координат на $L_{\bar\gamma}$. Аналогично, пусть $xs=yc$ — уравнение прямой, на которой сосредоточена γ, $c^2+s^2=1$. Тогда $L_\gamma\ni z=(a_1c,a_1s,a_2c,a_2s)$, и (a_1,a_2) — координаты в естественной ортонормированной системе координат на L_γ. Поскольку $L_{\gamma,\bar z}=L_\gamma+\bar z$, система координат (a_1,a_2) естественно переносится на $L_{\gamma,\bar z}$, и $z\in L_{\gamma,\bar z}$ с координатами (a_1,a_2) будет иметь координаты $(a_1c+b_1\bar c,a_1s+b_1\bar s,a_2c+b_2\bar c,a_2s+b_2\bar s)$ в $\mathbb{R}^4$.

Поскольку $\varkappa$ — положительно однородная функция на $\mathbb{R}^4$, $\varkappa(\alpha z)=\alpha\varkappa(z)$, а также ввиду того, что $\varkappa$ зависит только от разностей координат аргумента, графики $\varkappa(z)$ на различных $L_{\gamma,\bar z}$

(рассматриваемых как аффинные плоскости) будут подобны друг другу. Более того, коэффициент подобия равен $b_1 - b_2$, т.е. для любых $\bar{z} \in L_{\bar{\gamma}}$, лежащих на некоторой прямой $b_1 - b_2 = \mathrm{const}$, графики функции $\varkappa(z)$ на $L_{\gamma,\bar{z}}$ будут конгруэнтными. Действительно, если мы увеличим b_1 и b_2 на $k(c-s)$ (для любого k), а a_1 и a_2 уменьшим на $k(\bar{c}-\bar{s})$, то каждая координата увеличится на $k(c\bar{s}-\bar{c}s)$, и значение $\varkappa$ останется неизменным.

У функции $\varkappa$ изломы могут иметь место только при совпадении какой-либо пары из четырех координат в $\mathbb{R}^4$: отрицательные (т.е. с отрицательной второй производной по некоторому направлению) при $x_1 = y_1$ или $x_2 = y+2$ и положительные при $x_1 = x_2$, $x_1 = y_2$, $y_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. У ограничения $\varkappa$ на любую аффинную плоскость изломы будут в общем случае лежать на соответствующих шести прямых.

Чтобы найти производную по σ^2 математического ожидания $\varkappa$ по мере $(\bar{\gamma}\otimes\bar{\gamma})*(\gamma_{\sigma^2}\otimes\gamma_{\sigma^2})$, нужно проинтегрировать по $\bar{\gamma}\otimes\bar{\gamma}$ (на $L_{\bar{\gamma}}$) значение интеграла от $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$ по γ_{σ^2} на $L_{\gamma,\bar{z}}$ как функции от $\bar{z} \in L_{\bar{\gamma}}$. При этом интеграл по плоскости $L_{\bar{\gamma}}$ можно представить в виде повторного интеграла по прямым $b_1 - b_2 = \mathrm{const}$ и потом по факторпространству таких прямых с фактор-мерой $\bar{\gamma}_\perp$ (очевидно, если дисперсия $\bar{\gamma}$ единичная, то и оба интеграла берутся по стандартной гауссовской мере).

Обозначим $b = b_1 - b_2$. Пусть $b_1 - b_2 = \mathrm{const}$, тогда все соответствующие $L_{\gamma,\bar{z}}$ изоморфны друг другу относительно заданной на них функции $\varkappa$. Будем рассматривать плоскость $\overline{L}_{\gamma,b}$, изоморфную каждой из них и с индуцированной на нее функцией $\varkappa$. Начала координат плоскостей $L_{\gamma,\bar{z}}$ при этом изоморфизме не совпадают; выберем в качестве начала в $\overline{L}_{\gamma,b}$ образ центров симметрии значений функции $\varkappa$ — точек, определяемых системой $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Обозначим l_b прямую, состоящую из образов точек $\bar{z}$. Она расположена параллельно главной диагонали, и расстояние от нее до начала плоскости $\overline{L}_{\gamma,b}$ равно $\left|\frac{(b_1-b_2)(\bar{c}-\bar{s})}{\sqrt{2}(c-s)}\right| = \left|\frac{b}{\sqrt{2}(c-s)}\right|$.

На самом деле корректнее было бы писать $\overline{L}_{\gamma,\bar{\gamma},b}$ вместо $\overline{L}_{\gamma,b}$, поскольку масштаб $\varkappa$ на плоскости зависит от выбора $\bar{c}$ и $\bar{s}$. Однако совокупность всех $\overline{L}_{\gamma,b}$ от выбора $\bar{\gamma}$ не зависит. Действительно, положение L_γ в $\mathbb{R}^4$ не зависит от выбора $\bar{\gamma}$, следовательно совокупность $L_{\gamma,\bar{z}}$, являющихся просто всевозможными сдвигами L_γ в $\mathbb{R}^4$, тоже не зависит от $\bar{\gamma}$ (хотя, конечно, положение точки $\bar{z}$ на $L_{\gamma,\bar{z}}$ зависит от $\bar{\gamma}$), а $\overline{L}_{\gamma,b}$ есть фактор-множество всех $L_{\gamma,\bar z}$ с одинаковым масштабом $\varkappa$. Если бы мы определили $b = (b_1 - b_2)\left(\frac{\bar s}{s} - \frac{\bar c - \bar s}{c - s}\right)$, то $\overline{L}_{\gamma,b}$ действительно не зависела бы от $\bar\gamma$, но такое определение усложнит дальнейшие выкладки.

Интегрирование на $L_{\gamma,\bar z}$ и потом по прямой $b_1 - b_2 = \mathrm{const}$ в $L_{\bar\gamma}$ можно представить как интегрирование на плоскости $\overline{L}_{\gamma,b}$ по мере, являющейся сверткой круглой меры $\gamma_{\sigma^2}\otimes\gamma_{\sigma^2}$ и гауссовской меры на прямой l_b, получающейся переносом меры на прямой $b_1 - b_2 = \mathrm{const}$ из $L_{\bar\gamma}$ в $L_{\bar\gamma}$. Дисперсия этой меры на l_b не зависит от $b_1 - b_2$ и равна $\left(\frac{\bar c - \bar s}{c - s}\right)^2$ (для стандартной $\bar\gamma$).

Вернемся теперь непосредственно к нашему случаю, когда γ сосредоточена на прямой $x + y = 0$, т.е. $c = -s = 1/\sqrt{2}$, и выясним как именно выглядит график $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$ на $L_{\gamma,\bar z}$. Отрицательные ребра будут расположены вертикально ($x_1 = y_1$) и горизонтально ($x_2 = y_2$), а положительные — параллельно главной диагонали ($x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$) и перпендикулярно ей ($x_1 = y_2$ и $y_1 + x_2$). Пусть для определенности на $L_{\gamma,\bar z}$ прямая $y_1 = y_2$ левее и выше прямой $x_1 = x_2$. На косом кресте $\{\, z \in L_{\gamma,\bar z} : x_1 < x_2,\ y_1 < y_2 \,\} \cup \{\, z \in L_{\gamma,\bar z} : x_1 < y_2,\ y_1 < x_2 \,\}$ функция $\varkappa$ постоянна (а именно, равна $|b_1 - b_2|\,|\bar c + \bar s|$). Множество точек положительного излома функции $\varkappa$ на $L_{\gamma,\bar z}$ совпадает с границей этого креста, а точки отрицательного излома образуют вертикальные и горизонтальные лучи, выходящие из углов этого креста (точек $x_1 = x_2 = y_2$, $x_1 = x_2 = y_1$, $y_1 = y_2 = x_2$ и $y_1 = y_2 = x_1$). Из соображений симметрии коэффициенты при δ-мерах, представляющих собой $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$, совпадают на положительных ребрах с одной стороны и на отрицательных с другой. Найдем эти коэффициенты.

Из отрицательных ребер рассмотрим идущий вверх луч ($x_1 = y_1$). Пусть $a_2 = \mathrm{const} \gg 0$, a_1 изменяется вблизи прямой $x_1 = y_1$. Слева от прямой $y_2 < x_1 < y_1 < x_2$, справа — $y_2 < y_1 < x_1 < x_2$. Следовательно, $\varkappa((x_1, y_1, x_2, y_2)) = x_1 - y_2 + x_2 - y_1 = (\bar x_1 + a_1 c) - (\bar y_2 + a_2 s) + (\bar x_2 + a_2 c) - (\bar y_1 + a_1 s) = \mathrm{const} + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_1) = \mathrm{const} + \sqrt{2}a_1$ слева от прямой и $\varkappa((x_1, y_1, x_2, y_2)) = y_1 - y_2 + x_2 - x_1 = (\bar y_1 + a_1 s) - (\bar y_2 + a_2 s) + (\bar x_2 + a_2 c) - (\bar x_1 + a_1 c) = \mathrm{const} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_1 - a_1) = \mathrm{const} - \sqrt{2}a_1$ справа от прямой (мы обозначаем $\bar z = (\bar x_1, \bar y_1, \bar x_2, \bar y_2)$). Следовательно, $\frac{\partial}{\partial a_1}\varkappa(z) = \sqrt{2}$ слева от прямой и $-\sqrt{2}$ справа, и, наконец, $\Delta_{L_\gamma}\varkappa\big|_{x_1 = y_1} = \frac{\partial^2}{\partial a_1^2}\varkappa(z)\big|_{x_1 = y_1} = -2\sqrt{2}\delta$.

Из положительных ребер рассмотрим луч $x_1 = x_2$, направленный вправо-вверх. В окрестности этого луча слева-сверху

$y_1 < y_2 < x_1 < x_2$ и $\varkappa((x_1, y_1, x_2, y_2)) = y_2 - y_1 + x_2 - x_1 = (\bar{y}_2 + a_2 s) - (\bar{y}_1 + a_1 s) + (\bar{x}_2 + a_2 c) - (\bar{x}_1 + a_1 c) = \mathrm{const} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_2 + a_1 + a_2 - a_1) = \mathrm{const}$, а справа-снизу — $y_1 < y_2 < x_2 < x_1$ и $\varkappa((x_1, y_1, x_2, y_2)) = y_2 - y_1 + x_1 - x_2 = (\bar{y}_2 + a_2 s) - (\bar{y}_1 + a_1 s) + (\bar{x}_1 + a_1 c) - (\bar{x}_2 + a_2 c) = \mathrm{const} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_2 + a_1 + a_1 - a_2) = \mathrm{const} + \sqrt{2}(a_1 - a_2)$. Слева-сверху $\frac{\partial}{\partial a_1}\varkappa(z) = \frac{\partial}{\partial a_2}\varkappa(z) = 0$; справа-снизу $\frac{\partial}{\partial a_1}\varkappa(z) = \sqrt{2}$, $\frac{\partial}{\partial a_2}\varkappa(z) = -\sqrt{2}$. Наконец, $\Delta_{L_\gamma}\varkappa\big|_{x_1 = x_2} = \frac{\partial^2}{\partial a_1^2}\varkappa(z)\big|_{x_1 = y_1} + \frac{\partial^2}{\partial a_2^2}\varkappa(z)\big|_{x_1 = y_1} = (\sin\frac{\pi}{4}(\sqrt{2} - 0) + \sin\frac{\pi}{4}(0 + \sqrt{2}))\delta = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\delta = 2\delta$.

Зафиксируем b и рассмотрим $\overline{L}_{\gamma,b}$. Образы точек $\{\bar{z} : (b_1 - b_2)(\bar{c} - \bar{s}) = b\}$ при отождествлении $L_{\gamma,\bar{z}}$ с $\overline{L}_{\gamma,b}$ образуют прямую l_b, параллельную главной диагонали. При $\bar{s} = 0$ и $\bar{c} = 1$ эта прямая совпадает с прямой $y_1 = y_2$, а при малом отрицательном $\bar{s}$ (и близком к единице $\bar{c}$) эта прямая сдвинется налево-вверх и будет пересекать два положительных ребра (перпендикулярно) и два отрицательных (под углом $\pi/4$). На l_b возникает (симметричная относительно средней точки для двух пересечений l_b с ребрами) гауссовская мера $\bar{\gamma}_b$, являющаяся переносом ограничения меры $\bar{\gamma} \otimes \bar{\gamma}$ на прямую $\{\bar{z} : b_1 - b_2 = b\}$. Как уже отмечалось, ее дисперсия равна $(\frac{\bar{c}-\bar{s}}{c-s})^2$ Нас интересует $\int_{L_{\gamma,b}} \Delta_{L_\gamma}\varkappa(z)\,(\gamma_b * (\gamma_{\sigma^2} \otimes \gamma_{\sigma^2}))(dz)$. При стремлении σ^2 к нулю этот интеграл стремится к $\int_{l_b} \Delta_{L_\gamma}\varkappa(z)\,\bar{\gamma}_b(dz)$, равному сумме нагрузок на пересекаемых ребрах, умноженных на плотность меры $\bar{\gamma}_b$ в точках пересечения и деленных на синус угла между l_b и пересекаемым ребром. Из соображений симметрии плотность меры $\bar{\gamma}_b$ в точках пересечения l_b с положительными ребрами совпадает; обозначим эту плотность p_{b+}. Аналогично для точек пересечения с отрицательными ребрами, обозначим эту плотность p_{b-}. Имеем:

$$\int\limits_{l_b} \Delta_{L_\gamma}\varkappa(z)\,\bar{\gamma}_b(dz) = 2\Big(\frac{1}{\sin(\pi/2)} \cdot 2 \cdot p_{b+} - \frac{1}{\sin(\pi/4)} \cdot 2\sqrt{2} \cdot p_{b-}\Big)$$
$$= 4p_{b+} - 8p_{b-}.$$

Отметим, что точки пересечения прямой l_b с положительными ребрами лежат внутри от точек пересечения с отрицательными ребрами, поэтому всегда $p_{b+} < p_{b-}$, и для каждого фиксированного b за счет выбора достаточно близкого к нулю отрицательного $\bar{s}$ мы можем сделать p_{b+} и p_{b-} как угодно близкими. Надо заметить, что при изменении $\bar{c}$ и $\bar{s}$ будут меняться и $\overline{L}_{\gamma,b}$ (т.е. масштаб графика $\Delta_{L_\gamma}\varkappa$), и дисперсия гауссовской меры на l_b; однако и масштаб, и дисперсия стремятся к ненулевым пределам при $\bar{s} \nearrow 0$, а точки пересечения l_b с ребрами в пределе попарно совпадают (но все вместе не сливаются). Следовательно, разность $4p_{b+} - 8p_{b-}$ удастся сделать отрицательной.

Однако при любых фиксированных $\bar{c}$ и $\bar{s}$ для достаточно больших b отношение p_{b+}/p_{b-} становится как угодно большим, поскольку с ростом b масштаб расположения ребер и l_b на $\overline{L}_{\gamma,b}$ растет, а дисперсия $\bar{\gamma}_b$ остается постоянной, и, следовательно, разность $4p_{b+} - 8p_{b-}$ становится положительной. Тем не менее, при достаточно близком к нулю $\bar{s}$ положительные значения подынтегральной функции приходятся на хвосты гауссовской меры $\bar{\gamma}_\perp$, и значение интеграла оказывается отрицательным. Покажем это.

Дисперсия меры $\bar{\gamma}_b$ равна $\left(\frac{\bar{c}-\bar{s}}{c-s}\right)^2 = \frac{(\bar{c}-\bar{s})^2}{2}$. Расстояние от центра симметрии прямой l_b (т.е. от центра меры $\bar{\gamma}_b$) до точек пересечения этой прямой с отрицательными ребрами равно $\frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 - b_2)\frac{\bar{c}-\bar{s}}{c-s} = \frac{1}{2}b(\bar{c}-\bar{s})$; аналогично, расстояние оттуда же до точек пересечения с положительными ребрами равно $\frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 - b_2)\left(\frac{\bar{c}-\bar{s}}{c-s} - \frac{\bar{s}}{s}\right) = \frac{1}{2}b(\bar{c}+\bar{s})$. Таким образом мы находим $p_{b-} = \frac{\bar{c}-\bar{s}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{b^2}{4}}$, $p_{b+} = \frac{\bar{c}-\bar{s}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{b^2(\bar{c}+\bar{s})^2}{4(\bar{c}-\bar{s})^2}}$. Наконец, выписываем интересующий нас интеграл:

$$\begin{aligned} I &= \int (4p_{b+} - 8p_{b-})\,\bar{\gamma}_\perp(db) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int (p_{b+} - 2p_{b-})e^{-\frac{b^2}{2}}\,db \\ &= \frac{2(\bar{c}-\bar{s})}{\pi\sqrt{2}}\int \left(e^{-\frac{b^2}{2}-\frac{b^2(\bar{c}+\bar{s})^2}{4(\bar{c}-\bar{s})^2}} - 2e^{-\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{4}}\right)db. \end{aligned}$$

При $\bar{s} \nearrow 0$ интеграл $I \to -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int e^{-\frac{3}{4}b^2}\,db < 0$. Таким образом, мы получили, что при достаточно близком к нулю отрицательном $\bar{s}$ при $\sigma^2 = 0$ производная $\frac{d}{d\sigma^2}\mathbf{E}_{\bar{\gamma}*\gamma_{\sigma^2}}(\varkappa) < 0$, а значит при достаточно малом σ^2 имеем $\mathbf{E}_{\bar{\gamma}}(\varkappa) > \mathbf{E}_{\bar{\gamma}*\gamma_{\sigma^2}}(\varkappa)$, что и требовалось доказать.

Литература

1. V. N. Sudakov, H. v. Weizsäcker, *Typical distributions: the infinite-dimensional*

approach. Abstracts of communications of the International conference "Asymptotic Methods in Probability and Mathematical Statistics", St. Petersburg, June 24–28, 1998.

Sudakov A. V. A counterexample to the conjecture on monotonicity of an integral with respect to Gaussian measure.

It is shown that for the Kantorovich metrics $\varkappa$ on probability measures for centered Gaussian measures γ defined on Euclidean space E of random variables X the integral

$$I(\gamma) = \iint\limits_{E \oplus E} \varkappa(\mathcal{L}(X_1), \mathcal{L}(X_2))(\gamma \otimes \gamma)\, d(X_1, X_2),$$

is not always monotonic in γ.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 декабря 1999 г.