Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

Б. П. Харламов

АСИМПТОТИКА КРИВОЙ С ЗАДАННОЙ В НУЛЕ ПЛОТНОСТЬЮ ТОЧКИ ПЕРВОГО ВЫХОДА ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Рассматривается стандартный винеровский процесс $w(t)$, $t \geq 0$ и область $G \subset R_+ \times R$, ограниченная в окрестности точки (0,0) гладкими кривыми $-g_a(t)$, $g_b(t)$, $(t \geqslant 0)$, где g_a, g_b – кривые верхнего класса Хинчина. Предполагается, что $(\exists T > 0)$ $(\forall t : 0 < t < T)$ $g_a(t)$, $g_b(t) > 0$ и $G \cap \{(t,x) : 0 < t < T\} = \{(t,x) : -g_a(t) < x < g_b(t)\}$. Такую область мы называем *окрестностью нуля верхнего класса*. Мы будем также иметь дело с окрестностями нуля симметричными, для которых $g_a = g_b$, и неограниченными снизу, для которых $g_a = \infty$.

Рассмотрим момент первого выхода $\sigma_G(w) = \inf\{t \geq 0 : (t, w(t)) \notin G\}$. Нас интересуют плотности f_a и f_b распределения точки первого выхода:

$$P(\sigma_G \in dt, w(\sigma_G) < 0) = f_a(t)dt, \quad P(\sigma_G \in dt, w(\sigma_G) > 0) = f_b(t)dt$$

$(0 < t < T)$ относительно лебеговой меры по оси t, а также соответствующие им плотности

$$F_a : \; F_a(t) = f_a(t)\Big/\sqrt{1 + (g_a'(t))^2}, \quad F_b : \; F_b(t) = f_b(t)\Big/\sqrt{1 + (g_b'(t))^2}$$

относительно лебеговой меры по кривым (если они существуют).

В работе обсуждаются результаты, связанные с *обратной проблемой первого выхода для винеровского процесса: найти кривые верхнего класса с заданными распределениями точки первого выхода из окрестности нуля верхнего класса, ограниченной этими кривыми.* Эти результаты касаются асимптотики решения обратной проблемы первого выхода при $t \to 0$. По существу, задача состоит в нахождении разбиения верхнего класса Хинчина на подклассы, все функции в которых имеют одну и ту же плотность точки

Поддержано грантом РФФИ 97-01-01168.

первого выхода (относительно лебеговой меры на кривой) в точке 0+. Естественным представителем такого подкласса является *uds*-кривая с заданной плотностью (кривая равномерного распределения). Полученные результаты отражают поведение *uds*-кривых в нуле. Эти кривые имеют порядок роста в нуле вида $\sqrt{t \log \frac{1}{t}}$ вместо привычного закона повторного логорифма. Дифференциация этих кривых по различным плотностям проявляется в виде некоторой добавки под знаком логарифма. Сама хинчиновская граница соответствует бесконечной плотности точки первого выхода в нуле. В основе исследования лежит следующая теорема сравнения плотностей.

Теорема 1. *Пусть G_1, G_2 – две окрестности начальной точки процесса, обе – из верхнего класса и с кусочно гладкими границами, которые пересекаются в точке $p = (t, x)$. Пусть g_1, g_2 – функциональные представления этих границ, так что $g_1(t) = g_2(t) = x$. Если*

$$G_1 \cap ((0,t) \times R) \subset G_2 \cap ((0,t) \times R)$$

тогда

$$f_{g_1}(t) \leq f_{g_2}(t),$$

где плотности и производные понимаются в смысле “слева” (внутренняя плотность меньше, чем наружная).

Доказательство приведено в статье [2].

Смысл утверждения состоит в том, что в точке пересечения границ “внутренняя” плотность меньше, чем “наружная”, несмотря на тот очевидный факт, что вероятность пересечения внутренней границы на интервале $(0, t]$ больше, чем наружной.

Это свойство дает нам способ оценки плотности для неизвестной кривой как сверху, так и снизу. Подходящий объект для сравнения – это неограниченная снизу окрестность нуля, верхняя граница которой – прямая $l:\ x = b + k\,t$ ($b > 0$, $-\infty < k < \infty$) с плотностью распределения точки первого выхода на эту прямую (относительно лебеговой меры на оси t) вида

$$f_l(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(b + k\,t)^2}{2t}\right),$$

(см. [1] формула 2.0.2). В следующей теореме мы используем эту плотность для оценки кривой с заданной в нуле плотностью точки первого выхода. Для простоты изложения мы формулируем теорему для симметричных областей G_1, G_2, для которых $g_{a_i} = g_{b_i} \equiv g_i$ $(i = 1, 2)$, где g_i – кривая верхнего класса Хинчина. Плотности распределения точки первого выхода на верхнюю и нижнюю границу области G_i в симметричном случае одинаковы. Мы обозначим их общее значение F_{g_i}.

Теорема 2. *Для любого $c > 0$ существуют кривые верхнего класса g_1 и g_2, для которых $\overline{\lim}_{t\to 0} F_{g_1}(t) \le c$ и $\underline{\lim}_{t\to 0} F_{g_2}(t) \ge c$, причем, $g_1(t)/g_2(t) \to 1$ $(t \to 0)$. В качестве примера могут быть взяты кривые*

$$g_1(t) = \sqrt{t \log \frac{1}{t 2\pi c^2}},$$

$$g_2(t) = \sqrt{(1-\alpha) t \log \frac{4\alpha}{t 2\pi c^2}},$$

где $\alpha = 1/\log(1/t)$.

Доказательство. Первое из этих неравенств легко проверяется с использованием теоремы сравнения плотностей, где плотность распределения на границе выпуклого множества сравнивается с плотностью распределения на касательной прямой в точке касания. Второе неравенство требует более сложных выкладок. В этом случае плотность на заданной кривой сравнивается с плотностью на деформированной кривой, полученной заменой части кривой ее хордой.

Докажем первое неравенство. Пусть $g_1(t) = \sqrt{t \log \frac{1}{t 2\pi c^2}}$. По теореме сравнения плотностей имеем

$$F_{g_1}(t) \le \frac{g_1(t) - g_1'(t) t}{\sqrt{2\pi t^3 (1 + (g_1'(t))^2)}} \exp\left(-\frac{g_1^2(t)}{2t}\right)$$

$$\le \frac{g_1(t) - g_1'(t) t}{\sqrt{2\pi t^3} g_1'(t)} \exp\left(-\frac{g_1^2(t)}{2t}\right) = c \cdot \left(\frac{g_1(t)}{t g_1'(t)} - 1\right) = c \cdot \frac{\log \frac{1}{t 2\pi c^2} + 1}{\log \frac{1}{t 2\pi c^2} - 1} \le c \cdot (1+\epsilon)$$

для любого $\epsilon > 0$ при достаточно малых t.

Докажем второе неравенство. Пусть $g_2(t) = \sqrt{(1-\alpha) t \log \frac{4\alpha}{t 2\pi c^2}}$, где $\alpha = \alpha(t) = 1/\log(1/t)$. Прежде всего докажем эквивалентность односторонне- и двусторонне-ограниченных множеств.

Рассмотрим множество $A = \{(t,x) : x < g_2(t)\}$. Пусть $f_A(t)\,dt = P(\sigma_A \in dt)$. При этом $f_A(t) = f_{g_2}(t) + \epsilon_1$, где

$$\epsilon_1 = \int_0^t f_{g_2}(s) f_{A(s)}(t-s| - g_2(s))\,ds,$$

$f_{A(s)}(t-s|x)\,ds = P_x(\sigma_{A(s)} \in (t-s, t-s+ds))$ и $A(s) = \{(t,x) : x < g_2(t+s)\}$. По теореме сравнения имеем

$$f_{A(s)}(t-s|-g(s)) \le \frac{g_2(s)+g_2(t)-g_2'(t)(t-s)}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} \exp(-\frac{(g_2(s)+g_2(t))^2}{2(t-s)})$$

$$\le \frac{2g_2(t)}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} \exp(-\frac{(g_2(t))^2}{2(t-s)}) \le \frac{2g_2(t)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{(g_2(t))^2}{2t}).$$

Последнее сравнение мы получаем, находя максимум по s функции

$$\frac{1}{\sqrt{s^3}} \exp(-\frac{(g_2(t))^2}{2s}),$$

который будет в точке $s = g_2^2(t)/3 > t$. Отсюда

$$\epsilon_1 \le \frac{2g_2(t)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp(-\frac{(g_2(t))^2}{2t}) \int_0^t f_{g_2}(s)\,ds.$$

Оцениваем интеграл:

$$J(t) \equiv \int_0^t f_{g_2}(s)\,ds \le \int_0^t f_A(s)\,ds \le \int_0^t \frac{g_2(s)}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp(-\frac{g_2^2(s)}{2s})\,ds$$

$$= \int_0^t \frac{\sqrt{s(1-\alpha(s))\log\frac{4\alpha(s)}{s2\pi c^2}}}{\sqrt{2\pi s^3}} (\frac{s2\pi c^2}{4\alpha(s)})^{\frac{1-\alpha(s)}{2}}\,ds$$

$$\le C_1 \int_0^t \frac{\sqrt{\log\frac{4\alpha(s)}{s2\pi c^2}\log\frac{1}{s}}}{s^{\frac{1+\alpha(s)}{2}}}\,ds \le C_2 \int_0^t \frac{1}{s^{\frac{1+\epsilon}{2}}} = C_3 t^{\frac{1-\epsilon}{2}},$$

где $\epsilon > 0$ – произвольно малая величина, $C_1, C_2, \ldots$ – положительные константы. Подставляя и далее значение g_2 в формулу для ϵ_1, получаем

$$\epsilon_1 \le 2C_2 t^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} \cdot C_3 t^{\frac{1-\varepsilon}{2}} = C_4 t^{-\varepsilon}.$$

Для плотностей относительно меры Лебега по кривой получаем соотношение:

$$F_A(t) - F_{g_2}(t) = \epsilon_1/\sqrt{1+(g_2'(t))^2} \le \epsilon_1/g_2'(t) \le C_4 t^{-\epsilon}/g_2'(t).$$

Легко показать, что для данного класса логарифмических кривых справедливы соотношения $\sqrt{t}/g_i(t) \to 0$ и $g_i(t)/(tg_i'(t)) \to 2$ $(t \to 0)$, где $i = 1, 2$. Отсюда $F_A(t) - F_{g_2}(t) \le C_5 t^{1-\epsilon}/g_2(t) \to 0$, что и требовалось доказать: асимптотики плотностей первого выхода из односторонне- и двусторонне-ограниченных областей совпадают.

Заменим хордой часть выпуклой вверх кривой g_2 между точками $\alpha(t)t$ и t. С помощью этой деформированной кривой мы можем оценить плотность f_A снизу

$$f_A(t) \ge \int_{-\infty}^{g_2(\alpha t)} \bar{f}_{\alpha t}(x) \frac{g_2(\alpha t) - x}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\, dx,$$

где $\bar{f}_s$ – распределение точки первого выхода винеровского процесса из множества $A \cap ((0,s) \times R)$ на вертикальную границу. При этом

$$\bar{f}_{\alpha t}(x) = f_{\alpha t}(x) - \int_0^{\alpha t} f_A(s) f_{\alpha t - s}(x - g_2(s))\, ds,$$

где f_s – плотность распределения винеровского процесса в момент времени $s > 0$. Отсюда

$$F_A(t) \ge$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{1+(g_2'(t))^2}} \int_{-\infty}^{g_2(\alpha t)} f_{\alpha t}(x) \frac{g_2(\alpha t) - x}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\, dx - \epsilon_2,$$

где

$$\epsilon_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{1+(g_2'(t))^2}} \int_{-\infty}^{g_2(\alpha t)} (\int_0^{\alpha t} f_A(s) f_{\alpha t - s}(x - g_2(s))\, ds) \frac{g_2(\alpha t) - x}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \times$$

$$\times \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\, dx \le \frac{1}{\sqrt{1+(g_2'(t))^2}}\, m(t) \int_0^{\alpha t} f_A(s)\, ds,$$

где

$$m(t) \equiv \max_{x<g_2(\alpha t)} \frac{g_2(\alpha t) - x}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)}) =$$

$$= \frac{\sqrt{(g_2(t)-g_2(\alpha t))^2 + 4(t-\alpha t)} - (g_2(t)-g_2(\alpha t))}{2\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \times$$

$$\times \exp(-\frac{(\sqrt{(g_2(t)-g_2(\alpha t))^2 + 4(t-\alpha t)} + (g_2(t)-g_2(\alpha t)))^2}{8(t-\alpha t)})$$

$$\leq \frac{2(t-\alpha t)}{(g_2(t)-g_2(\alpha t))\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \exp(-\frac{(g_2(t)-g_2(\alpha t))^2}{2(t-\alpha t)})$$

$$\leq \frac{2}{g_2(t)(1-2\sqrt{\alpha})\sqrt{2\pi(t-\alpha t)}} \exp(-\frac{(g_2(t))^2(1-2\sqrt{\alpha})^2}{2(t-\alpha t)})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-\alpha)t\log\frac{4\alpha}{t2\pi c^2}}(1-2\sqrt{\alpha})\sqrt{2\pi(1-\alpha)t}} (\frac{t2\pi c^2}{4\alpha})^{\frac{(1-2\sqrt{\alpha})^2}{2}}$$

$$\leq C_7 \frac{\sqrt{\log\frac{1}{t}}\; t^{-\frac{1+4\sqrt{\alpha}}{2}}}{\sqrt{\log\frac{4\alpha}{t2\pi c^2}}} \leq C_8 t^{-\frac{1+4\sqrt{\alpha}}{2}}.$$

Отсюда, используя оценку интеграла, получаем

$$\epsilon_2 \leq C_3 C_8 \frac{t^{-\frac{4\sqrt{\alpha}+\epsilon}{2}}}{\sqrt{1+(g_2'(t))^2}} \leq C_9 \frac{t^{1-\frac{4\sqrt{\alpha}+\epsilon}{2}}}{g_2(t)} \to 0 \quad (t \to 0).$$

Для любого $k > 0$ при достаточно малых t имеем

$$\int_{-\infty}^{g_2(\alpha t)} f_{\alpha t}(x) \frac{g_2(\alpha t) - x}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\, dx$$

$$\geq \int_{-k\sqrt{\alpha t}}^{k\sqrt{\alpha t}} f_{\alpha t}(x) \frac{g_2(\alpha t) - x}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}} \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\, dx.$$

Покажем, что в пределах интегрирования подынтегральная функция имеет положительную вторую производную по x:

$$((g_2(\alpha t) - x)\exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)}))'' = \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\times$$

$$\times(-2\frac{g_2(t)-x}{t-\alpha t}-\frac{g_2(\alpha t)-x}{t-\alpha t}+\frac{(g_2(\alpha t)-x)(g_2(t)-x)^2}{(t-\alpha t)^2})$$

$$\geq \exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\frac{g_2(t)-x}{t-\alpha t}\Big[(-3+\frac{(g_2(\alpha t)-x)(g_2(t)-x)}{(t-\alpha t)})\Big].$$

Знак второй производной определяет выражение в квадратных скобках, которое при любом k при достаточно малых t будет положительным. Действительно, имеем

$$\frac{(g_2(\alpha\, t)-k\sqrt{\alpha\, t})}{\sqrt{t}}=\sqrt{(1-\alpha(\alpha\, t))\frac{\log\frac{4\alpha(\alpha\, t)}{\alpha\, t2\pi c^2}}{\log\frac{1}{t}}}-k\sqrt{\alpha}=$$

$$=\sqrt{(1-\frac{1}{\log(\alpha\, t)})(1+\frac{\log\frac{2}{\pi c^2}}{\log\frac{1}{t}}-\frac{\log(\alpha\,\log(\alpha\, t))}{\log\frac{1}{t}})}-k\sqrt{\alpha}>\frac{1}{2}$$

при всех достаточно малых t. Тем более это справедливо для отношения

$$\frac{(g_2(t)-k\sqrt{\alpha t})}{\sqrt{t}}\to\infty\quad(t\to 0).$$

Применяя неравенство Иенсена получаем оценку

$$\int\limits_{-k\sqrt{\alpha t}}^{k\sqrt{\alpha t}} f_{\alpha t}(x)\frac{g_2(\alpha t)-x}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}}\exp(-\frac{(g_2(t)-x)^2}{2(t-\alpha t)})\,dx$$

$$\geq \int\limits_{-k\sqrt{\alpha t}}^{k\sqrt{\alpha t}} f_{\alpha t}(x)\,dx\cdot\frac{g_2(\alpha t)}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}}\exp(-\frac{(g_2(t))^2}{2(t-\alpha t)})$$

$$\geq (1-\epsilon)\frac{\sqrt{(1-\alpha(\alpha\, t))\,\alpha\, t\,\log\frac{4\alpha(\alpha\, t)}{\alpha\, t2\pi c^2}}}{\sqrt{2\pi(t-\alpha t)^3}}\sqrt{\frac{t2\pi c^2}{4\alpha}}$$

$$\geq (1-2\epsilon)\,\frac{c}{2}\,\frac{\sqrt{\log\frac{4\alpha(\alpha\, t)}{\alpha\, t2\pi c^2}}}{\sqrt{t}}.$$

Отсюда

$$F_A(t)\geq\frac{1}{\sqrt{1+(g_2'(t))^2}}(1-2\epsilon)\,\frac{c}{2}\,\frac{\sqrt{\log\frac{4\alpha(\alpha\, t)}{\alpha\, t2\pi c^2}}}{\sqrt{t}}-\epsilon_2$$

$$\geq (1-3\epsilon)\frac{c}{2}\,\frac{\sqrt{t\log\frac{4\alpha(\alpha\, t)}{\alpha\, t\, 2\pi c^2}}}{tg_2'(t)} - \epsilon_2$$

$$\geq (1-4\epsilon)\,c\frac{\sqrt{t\log\frac{4\alpha(\alpha\, t)}{\alpha\, t\, 2\pi c^2}}}{g_2(t)} - \epsilon_2 \geq (1-5\epsilon)\,c - \epsilon_2.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *справедливо* $F_{g_b}(0+) = \infty$ *и* $F_{g_a}(0+) = 0$, *где*

$$g_b(t) = (1-\varepsilon)\sqrt{t\log(1/t)}, \quad g_a(t) = (1+\varepsilon)\sqrt{t\log(1/t)}.$$

Доказательство следует из сравнения функций:

$$g_b(t) \leqslant g_2(t) \leqslant g_1(t) \leqslant g_a(t)$$

при всех достаточно малых t.

Литература

1. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Birkhäuser Verlag, 1996.
2. Б. П. Харламов, *Обратная проблема первого выхода для винеровского процесса.* — Записки научных семинаров ПОМИ **244** (1997), 302–314.

Harlamov B. P. Asymptotics for curve with the density given in zero, of a point of the first exit for Wiener process.

In the work the outcomes connected to an inverse problem of the first exit for Wiener process are considered: to find a curve of the upper class with the given distribution of the point of the first exit from region limited to this curve. The evaluations for curve with the density given in zero, of a point of the first exit are found.

Институт
проблем машиноведения РАН

Поступило 16 февраля 1999 г.