Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 260, 1999 г.

А. И. Виноградов

Z-ФУНКЦИЯ СЕЛЬБЕРГА. ЛОКАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Памяти Л. А. Халфина (1932–1998)

Введение

В связи с гипотезой Линника [1] Сельберг ввел, хорошо известную сейчас, Z-функцию в работе [2]:

$$Z_{m,n}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(m,n;c)}{c^{2s}}, \quad \mathrm{Re}\, s > 3/4, \tag{0.1}$$

где $S(m,n;c)$ – сумма Клоостермана [3] модуля c и параметров $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$,

$$S(m,n;c) = \sum_{\substack{xy\equiv 1 \pmod c,\\ 1\leqslant x<c}} \exp\left(2\pi i \frac{mx+ny}{c}\right). \tag{0.2}$$

В той же работе [2] Сельберг предложил спектральный метод продолжимости Z-функции в левую полуплоскость $\mathrm{Re}\, s \leqslant 3/4$. Этот метод был затем дополнен и усовершенствован в работах [4, 5].

Здесь будет предложен еще один подход к изучению Z-функции, уточняющий работы [4, 5].

Для этого прежде всего разобьем ряд (0.1) на “ящики” вида:

$$Z_{m,n}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_{m,n}^{(k)}(s), \tag{0.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда Фундаментальных исследований, грант No. 99-01-00102.

Редакция приняла решение о публикации статьи А. И. Виноградова, выходящей за рамки тематики нашей серии ЗНС ПОМИ, учитывая желание автора быть опубликованным в сборнике, посвященном памяти Л. А. Халфина. Ред.

где

$$Z_{m,n}^{(k)}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(m,n;c)}{c^{2s}} \xi\left(\frac{c}{2^k}\right), \tag{0.4}$$

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0, & x \notin \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{0.5}$$

Характеристическую ξ-функцию (0.5) накроем гладкой финитной f-функцией на полуоси $x \geqslant 0$, которую определим пятью условиями:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, && 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ 0 \leqslant f(x) &\leqslant 1, && \frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ f(x) &= 1, && \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 \geqslant f(x) &\geqslant 0, && 1 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{4}, \\ f(x) &= 0, && x \geqslant 1 + \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{0.6}$$

На интервале подъема и спуска, т.е. $(\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2})$ и $(1 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{4})$, будем считать функцию f бесконечно гладкой, монотонной с ограниченными производными до любого фиксированного порядка включительно. При этом, не нарушая общности рассуждений, можно считать эту функцию симметричной относительно центральной точки ее носителя $x_0 = \frac{3}{4}$:

$$f(x) = f\left(\frac{3}{2} - x\right).$$

Из определения характеристической функции (0.4) и гладкой финитной функции (0.6) видно, что вторая мажорирует первую, при этом $\xi(x) = f(x)$ на интервале $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

В связи с этим введем гладкий аналог Z-функции "ящика" (0.4) вида:

$$Z_{f_k}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(m,n;c)}{c^{2s}} f_k(c), \tag{0.7}$$

где
$$f_k(c) = f\left(\frac{c}{2^k}\right).$$

Просуммировав все “ящики” (0.7) получим гладкий f-аналог Z-функции Сельберга (0.3):
$$Z_f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_{f_k}(s). \tag{0.8}$$

§1. Связь между функциями Z_f и $Z_{m,n}$

Z-функция (0.8) будет отличаться от исходной Z-функции Сельберга (0.3) тем, что на стыках двух соседних ящиков: $(k+1)$-го и k-го при $k \geqslant 0$, ядро суммирования из (0.3) будет учитываться дважды, как функцией $f_k(c)$, так и $f_{k+1}(c)$. При этом слева от стыка в k–ом ящике (1.8) мы имеем сумму:
$$\sum_{2^{k-1}<c\leqslant 2^k} (\,\cdot\,)\cdot[\,f_k(c)+f_{k+1}(c)\,], \tag{1.1}$$

где $f_k(c)=1$, т.к. k-й ящик является основным интервалом суммирования для функции $f_k(c)=f(\frac{c}{2^k})$, в то время, как $f_{k+1}(c) = f(\frac{c}{2^{k+1}})$ в k-ом ящике находится только на интервале подъема: $\frac{1}{4} \leqslant \frac{c}{2^{k+1}} \leqslant \frac{1}{2}$. Поэтому сумму (1.1) можно переписать в новом виде:
$$\sum_{2^{k-1}<c\leqslant 2^k} (\,\cdot\,)\cdot[\,1+f_{k+1}(c)\,]. \tag{1.2}$$

В правой стороне от k-го стыка, т.е. в $(k+1)$-ом ящике аналог суммы (1.1) имеет вид:
$$\sum_{2^{k}<c\leqslant 2^{k+1}} (\,\cdot\,)\cdot[\,f_k(c)+f_{k+1}(c)\,]. \tag{1.3}$$

В $(k+1)$-ом ящике справедливо равенство $f_{k+1}(c)=1$, т.к. он становится основным интервалом суммирования для $f_{k+1}(c)$, а функция $f_k(c)$ находится на спуске в этом ящике; при этом $f_k(c) = 0$, если $c \geqslant (1+\frac{1}{4})\cdot 2^k$. Поэтому не тривиальной частью суммы (1.3) является ее начальная часть:
$$\sum_{2^{k}<c\leqslant (1+\frac{1}{4})\cdot 2^{k}} (\,\cdot\,)\cdot[\,f_k(c)+1\,]. \tag{1.4}$$

Поэтому относительно k-го стыка из левого ящика (1.2) надо удалить часть суммы (1.2) с коэффициентом $f_{k+1}(c)$, а из части правого ящика (1.4) надо удалисть коэффициент $f_k(c)$.

Для этого надо заметить, что справедливо равенство:

$$\sum_{c=1}^{\infty} (\,\cdot\,) \cdot f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) =$$

$$= \sum_{2^{k-1} < c \leqslant 2^k} (\,\cdot\,) \cdot f_{k+1}(c) + \sum_{2^k < c \leqslant (1+\frac{1}{4}) \cdot 2^k} (\,\cdot\,) \cdot [\,f_k(c)\,]\,. \qquad (1.5)$$

Для доказательства этого равенства достаточно заметить, что из определения функции $f_k(c)$ в (0.7) следует равенство

$$f_{k+1}(c) = f_k\left(\frac{c}{2}\right).$$

Поэтому справедливо равенство:

$$f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = f_k(c) \cdot f_k\left(\frac{c}{2}\right). \qquad (1.6)$$

Но $f_k(\frac{c}{2}) = 0$, если $c \leqslant 2^{k-1}$ и $f_k(c) = 0$, если $c \geqslant (1+\frac{1}{4})2^k$.

Поэтому произведение (1.6) отлично от нуля только в интервале $2^{k-1} < c \leqslant (1+\frac{1}{4})2^k$. Но в левой части этого интервала

$$2^{k-1} < c \leqslant 2^k$$

справедливо равенство $f_k(c) = 1$. Отсюда получаем первое следствие

$$f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = f_{k+1}(c), \quad 2^{k-1} < c \leqslant 2^k. \qquad (1.7)$$

В правой части рассматриваемого интервала (носитель произведения (1.6))

$$2^k < c \leqslant \left(1+\frac{1}{4}\right) 2^k$$

справедливо равенство $f_{k+1}(c) = 1$. Откуда получаем второе следствие:

$$f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = f_k(c), \quad 2^k < c \leqslant \left(1+\frac{1}{4}\right) 2^k. \qquad (1.8)$$

Равенства (1.7) и (1.8) доказывают (1.5).

Следовательно, для получения исходной Z-функции Сельберга (0.3) из Z_f, определенной равенством (0.8), надо удалить из Z_f все стыковочные Z_{F_k}-функции (1.5) по всем $k \geqslant 0$, где для краткости мы ввели обозначение для произведения

$$\begin{gathered} F_k(c) = f_k(c) \cdot f_{k+1}(c) = f_k(c) \cdot f_k\left(\frac{c}{2}\right), \\ F(x) = f(x) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right), \end{gathered} \tag{1.9}$$

т.е. справедливо равенство

$$Z_{m,n}(s) = Z_f(s) - Z_F(s), \tag{1.10}$$

где

$$Z_F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_{F_k}(s). \tag{1.11}$$

Равенство (1.10) было получено в области абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s > 3/4$. Используя его мы сможем легко продолжить Z-функцию Сельберга в левую полуплоскость $\operatorname{Re} s \leqslant 3/4$. Но предварительно нам надо получить спектральное представление Z_f-функции. Это будет сделано в следующем параграфе.

§2. Спектральное представление

Из определения Z_f-функции (0.8) видно, что для ее спектрального представления достаточно получить такое представление для локальной Z_{f_k}-функции, определение которой приведено в равенстве (0.7). Для технического удобства в равенстве (0.7) мы сдвинем критическую прямую $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ влево на прямую $\operatorname{Re} s = 0$, т.е. заменим аналитический параметр s на $(\frac{1}{2} + s)$. И кроме того отнормируем функцию Z_{f_k} по параметрам m и n с помощью равенства:

$$Z^*_{f_k}\left(\frac{1}{2} + s\right) = \left(2\pi\sqrt{mn}\right)^{2s} \cdot Z_{f_k}\left(\frac{1}{2} + s\right), \tag{2.1}$$

т.к. параметры m и n фиксированы, поэтому нормировка (2.1) не меняет по существу аналитических свойств Z-функции, т.к. не добавляет к ней ни новых полюсов, ни нулей при аналитическом продолжении по s, т.к. по условию $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$.

Используя явный вид (0.7) для Z_{f_k} получаем явный вид $Z^*_{f_k}$ из определения (2.1):

$$Z^*_{f_k}\left(\frac{1}{2}+s\right) = \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S(m,n;c)}{c} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \cdot f\left(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{x \cdot 2^k}\right), \tag{2.2}$$

где $x = \frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}$ – спектральный параметр из работы [4].

Аналогичные свойства справедливы и для функции $Z^*_{F_k}(\frac{1}{2}+s)$.

В связи с этим равенство (1.10) можно переписать в нормированной форме:

$$Z^*_{m,n}\left(\frac{1}{2}+s\right) = Z^*_f\left(\frac{1}{2}+s\right) - Z^*_F\left(\frac{1}{2}+s\right). \tag{2.3}$$

Звездочки в этом равенстве означают нормировку (2.1) для равенств (0.1), (0.8) и (1.11).

По определению (0.6) функция f является финитной, бесконечно гладкой с носителем, отделенным от нуля. Поэтому сумма (2.2) удовлетворяет всем требованиям теоремы 2 [4] с весовой φ-функций вида

$$\varphi_k(x,f) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \cdot f\left(\frac{2\pi\sqrt{mn}}{x \cdot 2^k}\right). \tag{2.4}$$

Все перечисленные свойства справедливы и для функции $F(y) = f(y)\cdot f(\frac{1}{2}y)$, поэтому в (2.4) функцию f можно заменить на F:

$$\varphi_k(x,F) = \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \cdot F\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{x \cdot 2^k}\right). \tag{2.5}$$

В дальнейшем мы воспользуемся теоремой 2, [4] в варианте работы [6] (равенство (1.19)), где выделена в явном виде спектральная компонента, отвечающая классическим конечномерным пространствам:

$$Z^*_{f_k}\left(\frac{1}{2}+s\right) = Z^{\mathrm{cusp}}_k(f) + Z^{\mathrm{disc}}_k(f) + Z^{\mathrm{con}}_k(f). \tag{2.6}$$

Это равенство является символическим равенством (1.19), [6] для суммы (2.2) с весовой функцией (2.4). Оно же справедливо и при замене f на функцию F:

$$Z^*_{F_k}\left(\frac{1}{2}+s\right) = Z^{\mathrm{cusp}}_k(F) + Z^{\mathrm{disc}}_k(F) + Z^{\mathrm{con}}_k(F). \tag{2.7}$$

Наиболее важной составляющей в равенствах (2.6) и (2.7) является дискретная компонента, поэтому ее мы и рассмотрим в первую очередь:

$$Z_k^{\mathrm{disc}}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(m) \cdot \overline{\rho_j(n)}}{ch \pi \varkappa_j} \cdot \widehat{\varphi}_k(\varkappa_j, f), \tag{2.8}$$

где

$$\widehat{\varphi}_k(\varkappa_j, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, w > 0} \cos \pi w \, \Gamma(w - i\varkappa_j) \, \Gamma(w + i\varkappa_j) \, J_k(w, f) \, dw, \tag{2.9}$$

$$J_k(w, f) = \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^{-2w} \cdot \varphi_k(y, f) \cdot \frac{dy}{y} \tag{2.10}$$

функция φ_k в ядре (2.10) из равенства (2.4).

Равенство (2.8) остается справедливым, если в нем и равенствах (2.9), (2.10) функцию f заменить на F и вместо равенства (2.4) воспользоваться равенством (2.5). Отметим, что в равенстве (2.9) мы воспользовались преобразованным видом весовой функции по сравнению с работами [4] и [6].

Для преобразования интеграла (2.10) воспользуемся явным видом функции φ_k из равенства (2.4) и сделаем замену переменной интегрирования

$$x = \frac{2\pi\sqrt{m \cdot n}}{y \cdot 2^k}.$$

В результате равенство (2.10) преобразуется к новому виду:

$$J_k(w, f) = \left(\frac{2\pi\sqrt{m \cdot n}}{2^k}\right)^{2(s-w)} \cdot \Gamma_f\bigl(2(w - s)\bigr), \tag{2.11}$$

где

$$\Gamma_f(\omega) = \int\limits_0^{\infty} y^{\omega - 1} \cdot f(y) \, dy. \tag{2.12}$$

Ввиду того, что носитель функции f отделен от нуля, интеграл (2.12) является регулярной функцией во всей ω-плоскости.

Интегрируя его по частям любое фиксированное число $n \geqslant 0$ раз, трансформируем равенство (2.12) к новому виду:

$$\Gamma_f(\omega) = \frac{\Gamma(\omega)}{\Gamma(\omega + n)} \cdot \Gamma_{f^{(n)}}(\omega + n), \tag{2.13}$$

где Γ – классическая функция Гаусса–Эйлера, $f^{(n)}$ – производная порядка $n \geqslant 0$.

В связи с равенством (2.13) напомним, что для Γ-функции справедливо мультипликативное равенство

$$\Gamma(\omega + n) = \Gamma(\omega) \cdot \prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (k + \omega), \quad n \geqslant 1. \tag{2.14}$$

Поэтому из равенства (2.13) и (2.14) следует, что на любой вертикальной прямой $\operatorname{Re} \omega = \mathrm{const}$ функция $\Gamma_f(\omega)$ убывает со скоростю $|\operatorname{Im} \omega|^{-n}$, когда $|\operatorname{Im} \omega| \to \infty$. При этом $n \geqslant 1$ – может быть любым сколь угодно большим, но фиксированным. Поэтому для весовой функции $\widehat{\varphi}_k$ из равенства (2.9) справедлива оценка

$$\widehat{\varphi}_k(\varkappa_j, f) \ll \varkappa_j^{-3}, \quad \varkappa_j \to \infty, \tag{2.15}$$

которая обеспечивает абсолютную сходимость ряда (2.8) по $\varkappa_j$.

Действительно, часть интеграла (2.9) с условием $|\operatorname{Im} w| \geqslant \frac{1}{2}\varkappa_j$, благодаря равенству (2.13), оценивается величиной порядка

$$\varkappa_j^{-n+1}, \quad \varkappa_j \to \infty, \tag{2.16}$$

если контур $\operatorname{Re} w > 0$ подчинить условию $\operatorname{Re} w \in (0, \frac{1}{2})$.

Вторая часть интеграла (2.9) с условием $|\operatorname{Im} w| \leqslant \frac{1}{2}\varkappa_j$, благодаря оценке

$$\cos \pi w \cdot \Gamma(w - i\varkappa_j) \cdot \Gamma(w + i\varkappa_j) \ll \exp\left(- \frac{\pi}{2}\varkappa_j \right),$$

так же имеет порядок не больше величины (2.16). Поэтому полагая $n \geqslant 4$, получаем оценку (2.15).

Все перечисленные равенства и оценки, начиная с (2.8), остаются справедливыми, если в них заменить функцию f на F, т.е. для дискретной компоненты в (2.7).

§3. Полюса

Подставляя равенство (2.6) в аналог нормированного равенства (0.8), получаем спектральное разложение функции Z_f^*:

$$Z_f^*\left(\frac{1}{2} + s\right) = Z^{\mathrm{cusp}}(f) + Z^{\mathrm{disc}}(f) + Z^{\mathrm{con}}(f). \tag{3.1}$$

где

$$Z^{\rm disc}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k^{\rm disc}(f). \tag{3.2}$$

Аналогичные равенства справедливы для двух других компонент правой части равенства (3.1).

Подставляя (2.8) в (3.2) и меняя порядки суммирования, что законно в связи со свойствами функции $\Gamma_f(\omega)$, следующими из равенства (2.13), мы получили представление

$$Z^{\rm disc}(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(m)\overline{\rho_j(n)}}{ch\pi\varkappa_j}\,\widehat{\varphi}(\varkappa_j, f), \tag{3.3}$$

где

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\varphi}_k(\varkappa_j, f). \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.4) равенство (2.9) и меняя порядки суммирования и интегрирования, что законно в области абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s > 1/4$ при условии $\operatorname{Re}(s-w) > 0$, получаем равенство:

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j, f) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\operatorname{Re} w > 0 \\ \operatorname{Re}(s-w)>0}} \cos \pi w \cdot \Gamma(w - i\varkappa_j)\cdot\Gamma(w+i\varkappa_j)\cdot J(w,f)\,dw, \tag{3.5}$$

где

$$J(w,f) = \sum_{k=0}^{\infty} J_k(w,f). \tag{3.6}$$

Подставляя (2.11) в (3.6) и учитывая, что функция $\Gamma_f(\omega)$ от параметра k не зависит, мы получили геометрическую прогрессию вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k(s-w)}. \tag{3.7}$$

Эта прогрессия абсолютно и равномерно сходится в области $\operatorname{Re}(s-w) > \varepsilon > 0$ с любым фиксированным ε. Поэтому, заменяя условие $\operatorname{Re}(s-w) > 0$ на более сильное условие $\operatorname{Re}(s-w) > \varepsilon$,

$\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$, мы можем просуммировать прогрессию (3.7) и записать равенство (3.6) в новом виде

$$J(w,f) = \frac{(2\pi\sqrt{m\cdot n})^{2(s-w)}}{(1-4^{-(s-w)})}\cdot \Gamma_f(2(w-s)). \tag{3.8}$$

Это определение функции $J(w,f)$ мы и будем иметь в виду дальше для ядра правой части (3.5).

Все приведенные выше равенства, начиная с (3.1), остаются справедливыми, если в них заменить функцию f на F, Поэтому, подставляя (3.1) и аналог этого равенства для F в (2.3), получаем спектральное разложение для нормированной Z-функции Сельберга

$$Z^*_{m,n}\left(\frac{1}{2}+s\right) = Z^{\text{cusp}}(\varphi) + Z^{\text{disc}}(\varphi) + Z^{\text{con}}(\varphi), \tag{3.9}$$

где

$$Z^{\text{disc}}(\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(m)\overline{\rho_j(n)}}{ch\pi\varkappa_j}\,\widehat{\varphi}(\varkappa_j), \tag{3.10}$$

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j) = \widehat{\varphi}(\varkappa_j, f) - \widehat{\varphi}(\varkappa_j, F). \tag{3.11}$$

Аналогично (3.10) определяются и две другие спектральные компоненты правой части (3.9).

Подставляя (3.5) и аналог этого равенства для F в (3.11), получаем явный вид спектральной функции $\widehat{\varphi}$:

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\substack{\operatorname{Re} w>0\\ \operatorname{Re}(s-w)>0}} \cos\pi w\cdot\Gamma(w-i\varkappa_j)\cdot\Gamma(w+i\varkappa_j)\cdot J(w,f)\,dw, \tag{3.12}$$

где

$$J(w) = J(w,f) - J(w,F). \tag{3.13}$$

Подставляя (3.8) и аналог этого равенства для функции F в (3.13), получаем явный вид $J(w)$:

$$J(w) = \frac{(2\pi\sqrt{m\cdot n})^{2(s-w)}}{(1-4^{-(s-w)})}\cdot \Delta\Gamma(2(w-s)), \tag{3.14}$$

где

$$\Delta\Gamma(\omega) = \Gamma_f(\omega) - \Gamma_F(\omega). \tag{3.15}$$

Подставляя в (3.15) равенство (2.13) и его аналог для функции F, получаем аналог равенства (2.13) для $\Delta\Gamma(\omega)$:

$$\Delta\Gamma(\omega) = \frac{\Gamma(\omega)}{\Gamma(\omega+n)} \cdot \Delta\Gamma_n(\omega), \tag{3.16}$$

где

$$\Delta\Gamma_n(\omega) = \Gamma_{f^{(n)}}(\omega) - \Gamma_{F^{(n)}}(\omega).$$

Благодаря равенству (3.16), для весовой функции $\widehat{\varphi}$ из определяющего равенства (3.12) следует аналог оценки (2.15)

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j) \ll \varkappa_j^{-3}, \quad \varkappa_j \to \infty,$$

которая обеспечивает абсолютную сходимость ряда (3.10) по $\varkappa_j$. Эта оценка получается точно так же как и (2.15).

Чтобы продолжить спектральную компоненту (3.10) из области абсолютной сходимости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{4}$ в полосу $\operatorname{Re} s \in (0, \frac{1}{4})$ сдвинем контур $\operatorname{Re} w > 0$ с условием $\operatorname{Re}(s - w) > 0$ в интеграле (3.12) влево на прямую $\operatorname{Re} s = -\frac{3}{4}$. По теореме Коши о вычетах мы преобразуем равенство (3.12) к новому виду:

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j) = \cos \pi\varkappa_j \left[\Gamma(2i\varkappa_j) \cdot J(i\varkappa_j) + \right.$$
$$\left. \Gamma(-2i\varkappa_j) \cdot J(-i\varkappa_j)\right] + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w = -\frac{3}{4}} (\,\cdot\,)\, dw. \tag{3.17}$$

В правой части (3.17) два слагаемых в квадратных скобках являются двумя вычетами произведения двух Г-функций ядра в интеграле (3.12) в точке $w = \pm i\varkappa_j$. Интеграл на контуре $\operatorname{Re} w = -\frac{3}{4}$ в (3.17) имеет то же ядро, что и в (3.12). Но в отличие от (3.12) этот интеграл является регулярной функцией s в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -3/4$ и тем более в полуплоскости $\operatorname{Re} s \geqslant 0$. Это сразу же следует из явного вида (3.14) функции $J(w)$. До сих пор параметр s у нас был фиксирован в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{1}{4}$, поэтому из соображений простоты мы не вносили его в обозначение аргемента функции $J(w)$. С этого момента, когда мы начинаем продолжать $J(w)$ по параметру s в полуплоскость $\operatorname{Re} s < 1/4$, мы усложним символику функции $J(w)$, включив и параметр s, т.е. в левой части равенства (3.14) введем двойной аргумент:

$$J(w) \equiv J(w, s). \tag{3.18}$$

Исходя из этого нового обозначения мы видим, что функция $J(\pm i\varkappa_j, s)$ в правой части (3.17) имеет полюсные множители вида

$$\Big[1 - 4^{-(s \mp i\varkappa_j)}\Big]^{-1} \tag{3.19}$$

с полюсами в точках

$$(s \mp i\varkappa_j) = \frac{2\pi i n}{2 \cdot \log 2}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{3.20}$$

и одним и тем же вычетом в этих полюсах:

$$\operatorname*{Res}_{(3.20)} [\,\cdot\,]^{-1} = \tfrac{1}{2 \cdot \log 2}. \tag{3.21}$$

С другой стороны, сейчас хорошо известно (см. [4]), что на мнимой оси $\operatorname{Re} s = 0$, Z-функция Сельберга имеет полюса только в точках

$$(s \mp i\varkappa_j) = 0, \quad \text{т.е.} \quad s = \pm i\varkappa_j. \tag{3.22}$$

Поэтому полюса (3.20) для всех $n \neq 0$ являются наносными и связаны с локальным подходом, который мы используем для продолжимости Z-функции. Следовательно сумма вычетов всех мнимых полюсов (3.20), при каждом $\varkappa_j$, обращается в ноль.

Имея явный вид вычета (3.21) в полюсе (3.22) для множителя (3.19), получаем общий вычет функции $J(\pm i\varkappa_j, s)$ в полюсах (3.22) исходя из равенства (3.14)

$$\operatorname*{Res}_{s=\pm i\varkappa_j} J(\pm i\varkappa_j, s) = \frac{\Delta\Gamma(0)}{2 \cdot \log 2}, \tag{3.23}$$

где

$$\Delta\Gamma(0) = \Gamma_f(0) - \Gamma_F(0). \tag{3.24}$$

Поэтому для подтверждения правильности равенства (3.1) и (3.9) надо доказать, что правая часть (3.23) равна 1/2, т.е. что вычет локального определения Z-функции Сельберга (3.1) совпадает с ее вычетом при глобальном определении Z-функции в [2, 4].

Это мы сделаем в следующем параграфе.

§4. Совпадение вычетов

Введем аналог обозначения (3.18) для левой части равенства (3.17):

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j, s) \equiv \widehat{\varphi}(\varkappa_j). \tag{4.1}$$

Тогда из равенства (3.17) и (3.23) получаем вычеты функции (4.1) в полюсах (3.22):

$$\operatorname*{Res}_{s=\pm i\varkappa_j} \widehat{\varphi}(\varkappa_j, s) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}\,\pi\varkappa_j \cdot \Gamma(\pm 2i\varkappa_j) \cdot \frac{\Delta\Gamma(0)}{\log 2}. \tag{4.2}$$

Для того, чтобы доказать совпадение вычетов (4.2) с классическими (см. [4]) нам осталось доказать равенство

$$\frac{\Delta\Gamma(0)}{\log 2} = 1, \tag{4.3}$$

где $\Delta\Gamma(0)$ определено равенством (3.24). Для этого воспользуемся равенством

$$\Gamma_f(0) = \int_0^\infty f(y) \cdot \frac{dy}{y}, \tag{4.4}$$

которое следует из определения (2.12) при $\omega = 0$.

Подставляя в ядро интеграла (4.4) определение (0.6) функции f, трансформируем равенство (4.4) к новому виду:

$$\Gamma_f(0) = \int_{1/4}^{1/2} f(y)\,\frac{dy}{y} + \int_{1/2}^{1} \frac{dy}{y} + \int_{1}^{1+1/4} f(y)\,\frac{dy}{y}. \tag{4.5}$$

Для $\Gamma_F(0)$ справедлив аналог равенства (4.4):

$$\Gamma_F(0) = \int_0^\infty F(y)\,\frac{dy}{y}. \tag{4.6}$$

Из определения функции F:

$$F(y) = f(y) \cdot f\left(\frac{1}{2}y\right)$$

и свойств (0.6) функции f получаем систему определяющих равенств для функции F:

$$\begin{aligned} &F(y) = 0, && 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \\ &F(y) = f\left(\frac{1}{2}\cdot y\right), && \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$F(y) = f(y), \qquad 1 \leqslant y \leqslant 1 + \frac{1}{4},$$

$$F(y) = 0, \qquad y \geqslant 1 + \frac{1}{4}.$$

Подставляя систему (4.7) в (4.6), преобразуем это равенство к новому виду:

$$\Gamma_F(0) = \int\limits_{1/2}^{1} f\left(\frac{1}{2}y\right) \frac{dy}{y} + \int\limits_{1}^{1+1/4} f(y) \frac{dy}{y}. \tag{4.8}$$

Но первый интеграл правой части (4.8) равен первому интегралу правой части (4.5), а второй интеграл из (4.8) – третьему из (4.5), поэтому вычитая почленно равенства (4.8) из (4.5), получаем:

$$\Gamma_f(0) - \Gamma_F(0) = \log 2.$$

Это и есть равенство (4.3).

Хотя количество полюсов у Z-функции Сельберга на мнимой оси $\operatorname{Re} s = 0$ много больше при локальном определении чем при глобальном, тем не менее мнимая ось $\operatorname{Re} s = 0$ не является глухой границей для равенства (3.1) и его можно продолжить в левую полуплоскость $\operatorname{Re} s < 0$ с выделением новых серий полюсов на прямых

$$\operatorname{Re} s = -n, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.9}$$

с аналогичным совпадением вычетов в полюсах $s = \pm i\varkappa_j - n$ и равенством нулю суммы всех вычетов во всех "лишних" полюсах на прямых (4.9).

Но в приложениях удобно пользоваться равенствами (3.1) и (3.9) только в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ для того, чтобы не иметь дела с лишними полюсами и их вычетами. Раверства (3.1) и (3.9) в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ позволяют, в частности, получить оценку Гольдфельда–Сарнака [5] для Z-функции Сельберга.

§5. Оценка Гольдфельда–Сарнака

В пересчете на нормированную Z^*-функцию Сельберга в работе [5] была получена ее оценка ($s = \sigma + it$)

$$Z^*_{m,n}\left(\frac{1}{2} + s\right) \ll |t|^{1/2 - 2\sigma + 2\varepsilon}, \quad |t| \geqslant e, \quad \sigma \in \left[\varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon\right], \tag{5.1}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано.

При этом Гольдфельд и Сарнак в [5] использовали скалярное произведение рядов Пуанкаре–Сельберга и стандартную оценку для резольвенты автоморфного лапласиана.

В этом параграфе мы покажем, что оценка (5.1) следует из равенства (3.9). При этом мы снова ограничимся оценкой дискретной компоненты правой части (3.9), т.к. две другие оцениваются много проще.

Для получения оценки спектральной компоненты в (3.9) надо прежде всего оценить спектральную функцию $\widehat{\varphi}$

$$\widehat{\varphi}(\varkappa_j) \equiv \widehat{\varphi}(\varkappa_j, s)$$

по второму аргументу s, который является главным параметром. При этом мы будем рассматривать его только в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Поэтому для весовой $\widehat{\varphi}$-функции можно воспользоваться представлением (3.17). При этом задача оценки значительно упростится, если считать параметры $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$ константами, не зависящими от основного параметра s. В этом случае контур интеграла в правой части (3.17) следует сдвинуть влево на прямую $\operatorname{Re} w = -1 - 3/4$ и по теореме Коши выделить вторую серию полюсов на прямой $\operatorname{Re} w = -1$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w = -3/4} (\,\cdot\,) dw = -\cos \pi\varkappa_j \, [\, \Gamma(-1 + 2i\varkappa_j) \cdot J(-1 + i\varkappa_j) +$$

$$+ \Gamma(-1 - i\varkappa_j) \cdot J(1 - i\varkappa_j)] + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w = -1-3/4} (\,\cdot\,)\, dw. \tag{5.2}$$

По условию $\operatorname{Re} s > 0$. В этой области для интеграла правой части (5.2) легко получается оценка, не зависящая от параметра s:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} w = -1-3/4} (\,\cdot\,) dw \ll \varkappa_j^{-2-1/4}, \quad \varkappa_j \to \infty. \tag{5.3}$$

Из этой оценки сразу же следует, что вклад интеграла (5.3) в общую оценку ряда (3.10) есть величина $0(1)$.

Поэтому нам осталось оценить вклад от вычетов в правых частях (3.17) и (5.2).

Мы начнем с (3.17). Для этих вычетов воспользуемся известной оценкой

$$\cos \pi \varkappa_j \cdot \Gamma(\pm 2i\varkappa_j) \ll 1/\sqrt{\varkappa_j} \tag{5.4}$$

и оценокй

$$J(\pm i\varkappa_j) \ll \frac{1}{\sigma \cdot (1+ \mid \varkappa_j \pm t \mid^2)}, \tag{5.5}$$

которая следует из (3.14) и (3.16) при $n = 2$ и $\omega = 2(\pm i\varkappa_j - s)$. Поэтому вся внеинтегральная часть (3.17) имеет порядок не больше величины

$$\frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{\varkappa_j} \cdot [1 + (\varkappa_j - |t|)^2]}. \tag{5.6}$$

Отметим, что эта величина не тривиальна только для $\varkappa_j$, лежащих в интервале

$$\mid \varkappa_j - |t| \mid \leqslant \frac{1}{2}|t|. \tag{5.7}$$

В дополнительном интервале

$$\mid \varkappa_j - |t| \mid > \frac{1}{2}|t|$$

величина (5.6) не превосходт порядка

$$\frac{1}{\sigma \varkappa_j^{2,5}}$$

и дает вклад в оценку суммы (3.10) как величина порядка $1/\sigma$.

Для того, чтобы оценить вклад (5.6) на конечном интервале (5.7) разобьем этот интервал на единичные интервалы вида

$$r \leqslant \mid \varkappa_j - |t| \mid < r + 1 \tag{5.8}$$

по всем целым r из интервала

$$0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}|t|.$$

Если $\varkappa_j$ лежит в интервале (5.8), тогда (5.6) имеет порядок величины

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{|t|} \cdot (1 + r^2)}. \tag{5.9}$$

Таким образом мы свели оценку суммы (3.10) к оценке конечной двойной суммы вида

$$\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{|t|}}\sum_{r=0}^{1/2|t|}\frac{1}{(1+r^2)}\sum_{\substack{r\leqslant|\,\varkappa_j-|t|\,|<\\<r+1}}|\;\rho_j(m)\cdot\rho_j(n)\;|\,. \tag{5.10}$$

Наконец, используя оценку

$$2\;|\;\rho_j(m)\cdot\rho_j(n)\;|\leqslant|\;\rho_j(m)\;|^2+|\;\rho_j(n)\;|^2, \tag{5.11}$$

сведем оценку внутренней суммы в (5.10) к оценке суммы

$$\sum_{\substack{r\leqslant|\,\varkappa_j-|t|\,|<\\<r+1}}|\;\rho_j(m)\;|^2 \tag{5.12}$$

и плюс аналогичная сумма с параметром n вместо m.

Чтобы оценить сумму (5.11) воспользуемся теоремой 6, [4]. Ясно, что сумма (5.11) не превосходит остатка в теореме 6, [4].

Единственная тонкость здесь состоит в том, что в неявном виде сумма (5.11) содержит две суммы по интервалам

$$|t|+r\leqslant\varkappa_j\leqslant|t|+r+1$$

и

$$|t|-r-1\leqslant\varkappa_j\leqslant|t|-r. \tag{5.13}$$

Максимальный остаток в теореме 6, [4] будет для первого из интервалов (5.12). Поэтому суммы (5.11) по своему порядку не больше величины

$$(|t|+r)\cdot\log\left(|t|+r\right). \tag{5.14}$$

Мы исключили из оценки (5.13) влияние параметров m и n, т.к. по условию это константы, не зависящие от растущего параметра $|t|$.

Благодаря оценке (5.11) внутренняя сумма в (5.10) так же по своему порядку не больше величины (5.14). Поэтому вся сумма (5.10) по своему порядку не больше величины

$$\frac{\sqrt{|t|}}{\sigma}\cdot\log|t|. \tag{5.15}$$

Поэтому и оценка суммы вычетов правой части (3.17) по всем $\varkappa_j>0$ не превосходит порядка (5.15).

Чтобы оценить вычеты правой части (5.2) заметим, что для $J(-1 \pm i\varkappa_j)$ так же справедлива оценка (5.5).

Кроме того справедливо равенство

$$\Gamma(-1 \pm 2i\varkappa_j) = \frac{\Gamma(\pm 2i\varkappa_j)}{\pm 2i\varkappa_j}.$$

Поэтому в аналоге суммы (5.10) в этом случае коэффициент $1/\sqrt{|t|}$ будет заменен на $1/|t| \cdot \sqrt{|t|}$ и следовательно общий порядок аналога суммы (5.10) будет величиной порядка

$$\frac{\log |t|}{\sigma \cdot \sqrt{|t|}}.$$

Собирая все оценки вместе, получаем оценку дискретной компоненты из (3.9):

$$Z^{\mathrm{disc}}(\varphi) = \frac{\sqrt{|t|}}{\sigma} \log |t|.$$

Аналогичная оценка справедлива и для двух других компонент (3.9). Поэтому окончательно получаем:

$$Z^*_{m,n}\left(\frac{1}{2} + s\right) \ll \frac{\sqrt{|t|}}{\sigma} \log |t|. \tag{5.16}$$

Эта оценка справедлива в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 0$. В области $\mathrm{Re}\, s \geqslant \varepsilon > 0$, оценка (5.16) становится равномерной:

$$Z^*_{m,n}\left(\frac{1}{2} + s\right) \ll \sqrt{|t|} \cdot \log |t|. \tag{5.17}$$

Кроме того, в области $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1/4 + \varepsilon$ справедлива оценка

$$Z^*_{m,n}\left(\frac{1}{2} + s\right) \ll 1. \tag{5.18}$$

Используя принцип выпуклости, получаем оценку Гольдфельда–Сарнака (5.1) из оценок (5.17) и (5.18).

Отметим, что отказ от свободы изменения параметров m и n не принципиален. Усложнив счет, оценку (5.1) можно получить при любых $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. В этом случае константа в символе $\ll$ оценки (5.1) будет иметь вид:

$$\sqrt[4]{m \cdot n} \cdot \tau(m) \cdot \tau(n) \cdot \log^2(m+n), \tag{5.19}$$

где τ – функция числа делителей.

Если принять гипотезу Петерсона для веса 0, то множитель $\sqrt[4]{m \cdot n}$ в (5.19) можно убрать.

Литература

1. Ю. В. Линник, *Additive problems and eigenvalues of the modular operators.* Proc. Intern. Congr. Math. (Stockholm, 1962). Djursholm, 1963, pp. 270–284.
2. A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms.* Proc. Sympos. Pure Math., V. 8. Number Theory. Providence, R. T., Am. Math. Soc. (1965), pp. 1–15.
3. H. D. Kloosterman, *On the representation of number in the form* $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$. — Acta Math. **49** (1926), 407–464.
4. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. I. Сумма сумм Клоостермана.* — Мат. Сб. **111,** No. 3 (1980), 334–383.
5. D. Goldfeld, P. Sarnak, *Sums of Kloosterman sums.* — Invent. Math. **71** (1983), 243–250.
6. J.-M. Deshouillers, H. Jwaniec, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70,** No. 2 (1982), 219–283.

Vinogradov A. I. The Selberg Z-function.

A local version of the Selberg Z-function is used in order to extend it analitically and to prove some estimates in the critical band.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 4 июня 1999 г.