Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

Ю. И. Бабенко

СТЕПЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ ОБЪЕДИНЕНИЯ ПРИЗМ

1. Статья дополняет работу [1], помещенную в этом же томе. Конечное множество точек $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{R}^3$ называется обладающим *степенными инвариантами* $I_1, \dots, I_p$, если для сферы S^2 с центром тяжести O множества $\{A_1, \dots, A_N\}$ и любой точки $M \in S^2$ сумма

$$I_k = \sum_{j=1}^{N} |A_j M|^{2k} \tag{1}$$

не зависит от выбора точки $M \in S^2$, причем эта независимость имеет место отдельно для $k = 1, \dots, p$.

2. На сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ фиксируем северный N и южный S полюсы. Пусть в S^2 вписана правильная призма Π с осью NS и m боковыми гранями. Вершины "верхнего" основания призмы обозначим $A_1, \dots, A_m$, а соответствующие вершины "нижнего" основания $A'_1, \dots, A'_m$. Призма Π вполне характеризуется числом m и полярным углом α, который образуют радиусы ON и OA_1, (рис. 1).

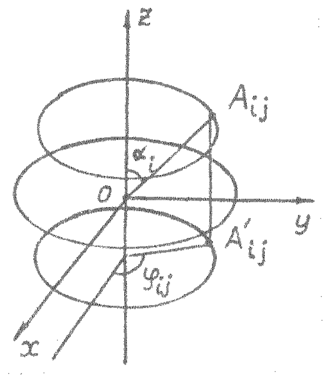

Рис. 1.

3. Теорема. *Пусть в сферу S^2 вписаны n соосных призм с числами боковых граней m_i и полярными углами α_i, $i = 1, \dots, n$. И пусть $\min m_i \geqslant 2n+2$. Тогда для того, чтобы множество вершин всех этих призм обладало инвариантами $I_1, \dots, I_{2n+1}$, достаточно, чтобы числа m_i и величины $x_i = \cos^2 \alpha_i$ удовлетворяли системе равенств*)*

$$\begin{aligned} &m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = \frac{1}{3}(m_1 + \dots + m_n) \\ &m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_n x_n^2 = \frac{1}{5}(m_1 + \dots + m_n) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &m_1 x_1^n + m_2 x_2^n + \dots + m_n x_n^n = \frac{1}{2n+1}(m_1 + \dots + m_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Согласно Теореме 1.5 из [1], для существования $2n+1$ инвариантов необходимо и достаточно, чтобы были независимыми от координат произвольной точки $M(\theta, \varphi) \in S^2$ суммы

$$\sigma_k = \sum_{i,j} \cos^{2k}(M, A_{ij}) + \sum_{i,j} \cos^{2k}(M, A'_{ij}), \tag{3}$$

где $k = 1, \dots, n$; $A_{ij}(\alpha_i, \varphi_{ij})$, $A'_{ij}(\pi - \alpha_i, \varphi_{ij})$, $\varphi_{ij} = \varphi_0 + \frac{2\pi}{m_i}(j-1)$, $j = 1, \dots, m_i$. Сгруппируем парами вершины A_{ij} и A'_{ij}. Тогда

$$\begin{aligned} &\cos(M, A_{ij}) = \cos\alpha_i \cos\theta + \sin\alpha_i \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_{ij}), \\ &\cos(M, A'_{ij}) = -\cos\alpha_i \cos\theta + \sin\alpha_i \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_{ij}). \end{aligned} \tag{4}$$

Ввиду следующего из [2], 1.320.5 тождества

$$\sum_{j=1}^{m_i} \cos^{2s}(\varphi - \varphi_{ij}) = m_i \frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}, \quad 2s < m_i, \tag{5}$$

требованиям (3) можно придать вид

$$\frac{\sigma_k}{2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{ (\cos\alpha_i \cos\theta)^{2k} + \binom{2k}{2} \frac{1}{2} (\cos\alpha_i \cos\theta)^{2k-2} (\sin\alpha_i \sin\theta)^2 + \right.$$

*)Теорема показывает неслучайность частных результатов пунктов 6.3–6.5 работы [1].

$$+\binom{2k}{4}\frac{3}{8}(\cos\alpha_i\cos\theta)^{2k-4}(\sin\alpha_i\sin\theta)^4+\dots \tag{6}$$

$$+\binom{2k}{2s}\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}(\cos\alpha_i\cos\theta)^{2k-2s}(\sin\alpha_i\sin\theta)^{2s}+\dots\Bigg\}.$$

Выражение (6) является полуинвариантом в том смысле, что оно не зависит от φ.

Мы утверждаем, что *при выполнении равенств* (2) правая часть равенства (6) есть не что иное как выражение

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^k(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^k \tag{7}$$

и потому не зависит от θ. Чтобы доказать это, убедимся в справедливости при всех $k=1,\dots,n$ и $s=1,\dots,k$ тождеств

$$\binom{k}{s}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^k=\binom{2k}{2s}\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{k-s}(1-x_i)^s. \tag{8}$$

Переписав условия (2) в компактной форме

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^k=\frac{1}{2k+1}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

и подставляя в (8), убеждаемся что требующие доказательства тождества принимают вид

$$\binom{k}{s}\frac{1}{2k+1}=\binom{2k}{2s}\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}\left\{\frac{1}{2(k-s)+1}-\binom{s}{1}\frac{1}{2(k-s)+3}+\right.$$

$$\left.+\binom{s}{2}\frac{1}{2(k-s)+5}-\dots+(-1)^s\frac{1}{2(k-s)+(2s+1)}\right\}. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$S(z)=\frac{z^{2(k-s)+1}}{2(k-s)+1}-\binom{s}{1}\frac{z^{2(k-s)+3}}{2(k-s)+3}+\binom{s}{2}\frac{z^{2(k-s)+5}}{2(k-s)+5}-\dots$$

Тогда

$$\frac{dS}{dz}=z^{2(k-s)}-\binom{s}{1}z^{2(k-s)+2}+\binom{s}{2}z^{2(k-s)+4}-\dots=$$

$$= z^{2(k-s)}(1-z^2)^s$$

$$S(1) = \int_0^1 z^{2(k-s)}(1-z^2)^s\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{k-s-1/2}(1-y)^s\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(k-s+1/2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(k+3/2)} \qquad (10)$$

([2], формулы 8.380.1 и 8.384.1).

Подставляя (10) в (9), имеем

$$\binom{k}{s}\frac{1}{2k+1} = \binom{2k}{2s}\frac{(2s)!}{2^{2s}(s!)^2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(k-s+1/2)\Gamma(s+1)}{\Gamma(k+3/2)}. \qquad (11)$$

Применяя формулу удвоения Г-функции [2], 8.335.1, убеждаемся что выражение (11) является тождеством для любых рассматриваемых k и s. Таким образом, соотношения (2) действительно обеспечивают существование $2n+1$ инвариантов. □

4. Замечание. В действительности выполнение равенств (2) является не только достаточным, но и необходимым условием для того, чтобы в условиях Теоремы 3 у множества всех вершин $\{A_{ij}, A'_{ij}\}$ были инварианты $I_1, \ldots, I_{2n+1}$. В этом можно убедиться на следующем пути. Равенство (6) можно разложить по степеням $\cos^2\theta$. Для независимости от θ должны обращаться в нуль коэффициенты при всех степенях $\cos^2\theta$ (кроме нулевой). При $k=1$ сразу получаем первое из равенств (2). Считая первые p из равенств (2) выполненными, можно из условия независимости от θ при $k=p+1$ вывести следующее из равенств (2). Такой способ вывода системы (2) более сложен, нежели использованный выше. Мы его не приводим, так как в настоящей статье важна достаточность равенств (2) для существования $I_1, \ldots, I_{2n+1}$.

5. В [1], п. 6.6 задан вопрос: есть ли в $\mathbb{R}^3$ конечные множества точек с числом инвариантов большем 7? (См. также [5].) Положительный ответ на этот вопрос дают следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим вписанные в сферу S^2 соосные призмы $\Pi_1, \ldots, \Pi_4$ с числами боковых граней $m_1 = m_2 = m_3 = 10$, $m_4 = 20$. При таких значениях m_i система (2), как показывает численный анализ, обладает вещественным решением

$$x_1 \approx 0.84677, \quad x_2 \approx 0.41646, \quad x_3 \approx 0.32647, \quad x_4 \approx 0.03848.$$

Поскольку все эти значения лежат в интервале (0,1), их можно принять за квадраты косинусов полярных углов призм $\Pi_1, \dots, \Pi_4$. У множества вершин объединения таких четырех призм имеются инварианты $I_1, \dots, I_9$.

Пример 2. Для призм $\Pi_1, \dots, \Pi_5$ с $m_1 = m_2 = m_3 = 12$, $m_4 = m_5 = 24$ у системы (2) есть вещественное решение

$$x_1 \approx 0.88980, \quad x_2 \approx 0.54606, \quad x_3 \approx 0.49478,$$

$$x_4 \approx 0.17929, \quad x_5 \approx 0.02206.$$

Придавая эти значения квадратам косинусов полярных углов призм $\Pi_1, \dots, \Pi_5$, получаем множество вершин с инвариантами $I_1, \dots, I_{11}$.

6. Пусть S^{d-1} – сфера в $\mathbb{R}^d$ с центром в центре тяжести множества точек $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{R}^d$ и $M \in S^{d-1}$. Будем говорить, что множество $\{A_1, \dots, A_N\}$ обладает *знакопеременными* степенными инвариантами $I_1, \dots, I_p$, если при каждом $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ сумма

$$I_k = \sum_{j=1}^{N} \delta(j) |A_j M|^{2k} \tag{12}$$

не зависит от выбора точки $M \in S^{d-1}$. Здесь каждое $\delta(j)$ может быть $+1$ или -1. Определение (1) есть частный случай (12), когда все $\delta(j) = 1$. Рассматривались также *инварианты с весом* [1, 3].

7. Пусть в сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ вписаны соосные призмы $\Pi_1 \dots, \Pi_n$ с $\min m_i \geqslant 2n + 2$ и полярными углами α_i, $i = 1, \dots, n$. В определении знакопеременных инвариантов $I_1, \dots, I_{2n+1}$ для множества вершин всех призм будем выбирать знак $\delta(j)$ зависящим только от номера i призмы, которой принадлежит вершина A_{ij}. Тогда достаточным условием существования у множества всех вершин призм $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ знакопеременных инвариантов $I_1, \dots, I_{2n+1}$ служит та же система равенств (2), в которой только числа m_i заменены на $-m_i$ для тех призм, которым сопоставляется $\delta(j) = -1$.

Пример 3. Рассмотрим систему призм Π_1, Π_2, Π_3 с $m_1 = m_3 = 8$, $m_2 = -8$. Тогда у системы (2) есть решение

$$x_1 \approx 0.61610, \quad x_2 \approx 0.46032, \quad x_3 \approx 0.17665.$$

Принимая эти x_i за квадраты косинусов полярных углов призм, получаем множество вершин со знакопеременными инвариантами $I_1, \dots, I_7$.

Естественно, что произвол в выборе знаков $\delta(i)$ расширяет возможность построения систем соосных призм Π_i со значительным числом инвариантов.

8. Теорема. *Сколь большое число $2n+1$ ни было бы задано, можно построить в $\mathbb{R}^3$ систему вписанных в сферу соосных призм $\Pi_1, \dots, \Pi_n$, множество вершин которых будет обладать знакопеременными инвариантами $I_1, \dots, I_{2n+1}$.*

Доказательство. Перепишем равенства (2) в виде

$$\begin{aligned}
&m_1\left(x_1 - \frac{1}{3}\right) + m_2\left(x_2 - \frac{1}{3}\right) + \ldots + m_n\left(x_n - \frac{1}{3}\right) = 0\\
&m_1\left(x_1^2 - \frac{1}{5}\right) + m_2\left(x_2^2 - \frac{1}{5}\right) + \ldots + m_n\left(x_n^2 - \frac{1}{5}\right) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (13)\\
&m_1\left(x_1^n - \frac{1}{2n+1}\right) + m_2\left(x_2^n - \frac{1}{2n+1}\right) + \ldots +\\
&\qquad\qquad + m_n\left(x_n^n - \frac{1}{2n+1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Для доказательства теоремы достаточно найти решение этой системы при котором каждое $x_i \in (0,1)$ а все m_i – целые положительные или отрицательные числа и $|m_i| \geqslant 2n+2$. Поскольку система (13) однородная относительно величин m_i, достаточно сделать все m_i рациональными. (После этого, увеличивая их в одно и то же число раз, можно сделать их целыми и удовлетворяющими условию $|m_i| \geqslant 2n+2$.)

При подсчете определителя Δ системы (13) как однородной линейной системы относительно неизвестных m_i воспользуемся обозначениями

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n\\
&\omega_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\omega_n = x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

для элементарных симметрических функций n аргументов; W для определителя Вандермонда

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

и обозначением

$$V_i = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i-1} & x_2^{i-1} & \dots & x_n^{i-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^{i+1} & x_2^{i+1} & \dots & x_n^{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} W \omega_{n-i}.$$

Последнее равенство относится к $i = 1, \dots, n-1$. Его вычисление мы не приводим. Ограничимся ссылкой на [4] стр. 27. Наконец, $V_n = (-1)^{n-1} W$.

Если определитель системы (13) разложить (по первой строке) в сумму двух определителей, отнеся в первый из них строку $(-1/3, -1/3, \dots, -1/3)$, а во второй – строку $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то первый из этих определителей будет равен $-\frac{1}{3} V_1$. Второй определитель, в свою очередь, разложим на два (по второй строке), отнеся в первую строку $(-1/5, -1/5, \dots, -1/5)$. Так приходим к равенству

$$\Delta = -\frac{1}{3} V_1 - \frac{1}{5} V_2 - \dots - \frac{1}{2n+1} V_n + x_1 x_2 \dots x_n W,$$

откуда

$$\Delta = \left(\omega_n - \frac{1}{3}\omega_{n-1} + \frac{1}{5}\omega_{n-2} - \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}\omega_1 + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right) W. \tag{14}$$

Формула (14) показывает, что нетривиальные решения системы (13) (в случае, когда все x_i различны) существуют только при условии

$$\omega_n - \frac{1}{3}\omega_{n-1} + \frac{1}{5}\omega_{n-2} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 0.$$

При этом одна из величин x_i (для определенности x_n) выражается через остальные следующим образом

$$x_n = \frac{\frac{1}{3}\bar{\omega}_{n-1} - \frac{1}{5}\bar{\omega}_{n-2} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}}{\bar{\omega}_{n-1} - \frac{1}{3}\bar{\omega}_{n-2} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}}, \qquad (15)$$

где $\bar{\omega}_i$ – элементарные симметрические функции от $n-1$ величин $x_1, \ldots, x_{n-1}$. При этом надо обеспечить, чтобы знаменатель не был равен нулю.

Если задать значения $x_1, \ldots, x_{n-1}$ различными, рациональными и достаточно малыми, то знаменатель (15) действительно не равен нулю, а значение x_n будет лежать в интервале (0,1) (близко к величине $(2n-1)/(2n+1)$) и также будет рациональным.

При так выбранных значениях x_i у системы (13) найдется ненулевое решение из рациональных чисел $m_1, \ldots, m_n$, что доказывает Теорему 8. $\square$

Подчеркнем, что знаки величин m_i не определены. Таким образом, установлено наличие знакопеременных инвариантов (13) сколь угодно высокого порядка, но не знакопостоянных инвариантов (1).

Упомянем, что существование множеств с произвольно большими числами инвариантов при положительных, но не целых $\delta(j)$ доказано совсем иным способом в [3].

Автор благодарит В. А. Залгаллера за полезное обсуждение.

Литература

1. Ю. И. Бабенко, В. А. Залгаллер, *Степенные инварианты некоторых точечных множеств.* Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999).
2. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Физматгиз. М. (1963).
3. В. В. Макеев, *О множествах с заданным числом степенных инвариантов.* Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999).
4. А. П. Мишина, И. В. Проскурин, *Высшая алгебра.* Физматгиз. М. (1962).
5. Yu. I. Babenko, *Power relations in a circumference and a sphere.* Norell Press. Landisville (1998).

Babenko Yu. I. Power invariants of joined coaxial prisms.

The paper is the addition to the article of Yu. Babenko and V. Zalgaller published in the same volume. A criterion indicating when the set in $\mathbb{R}^3$ of all vertices of several coaxial prisms inscribed in a sphere has power invariants $I_1, \ldots, I_n$ is given. A finite set in $\mathbb{R}^3$ with 11 invariants is constructed. If invariants with alternating signs are admitted, it is proved that using joined prisms one can obtain finite sets in $\mathbb{R}^3$ with any preassigned number n of invariants.

Российский научный центр
"Прикладная химия"

Поступило 8 февраля 1999 г.