Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

А. Н. Глушаков, С. Е. Козлов

ГЕОМЕТРИЯ СФЕРЫ КАЛИБРОВОК СТЕПЕНИ ДВА

Введение

Различные классы p-мерных минимальных поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определяются так называемыми калибровками (см. [1]). В пространстве p-форм $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ определяется некоторая норма Минковского, называемая комассой (см. ниже (1)). В пространстве p-векторов $\Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ комассе соответствует сопряженная норма, называемая массой. Эта норма играет важную роль в геометрической теории интегрирования (см. [2]) и теории потоков (см. [3]). Этим нормам соответствуют выпуклые единичные сферы $S^*_{p,n} \subset \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ и $S_{p,n} \subset \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ между которыми возникает отношение двойственности. Под калибровкой степени p понимают точку $\varphi \in S^*_{p,n}$. В теории минимальных подмногообразий пространства $\mathbb{R}^n$ особый интерес представляет строение граней $G(\varphi)$, отвечающих калибровке φ, которые определяются как пересечения множества крайних точек сферы $S_{p,n}$ с опорными к ней гиперплоскостями вида $\langle \varphi, x \rangle = d$, $x \in \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$. Этому вопросу посвящены многочисленные работы, в которых дана классификация граней калибровок для пар (p, n), когда $n \leqslant 8$ или $p = 2$ (см. обзорную статью [1]). В настоящей работе изучаются грани на сфере $S^*_{2,n}$.

В работе [4] построено каноническое изометрическое вложение касательного пространства к грассманиану $G^+_{p,n} \subset \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ в пространство бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$, оказавшееся весьма полезным в геометрии многообразий Грассмана. Кроме того, в сферы $S_{2,n}$ и $S^*_{2,n}$ естественно вкладываются многообразия $\mathbb{CP}^m$ (см. [5, 6]) и многообразие ортогональных комплексных структур на четномерном евклидовом пространстве (см. ниже п. 3.3). Поэтому изучение геометрии множества калибровок $S^*_{2,n} \subset \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ представляется нам оправданным.

Работа частично поддержана грантом научных школ, No. 96-15-96-075.

§1. Единичные сферы в нормах массы и комассы

1.1. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ индуцирует изометрический изоморфизм сопряженных друг с другом внешних алгебр $\bigoplus\limits_p \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ и $\bigoplus\limits_p \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$, при помощи которого мы отождествим эти пространства. В зависимости от контекста, символ $\langle x, y\rangle$ будем понимать как скалярное произведение в этих алгебрах, либо как действие элемента сопряженного пространства на вектор исходного.

1.2. *Нормой комассы* p-формы $\varphi \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ называется число

$$\|\varphi\|^* := \sup\{\langle\varphi, \omega\rangle, \omega \in G^+_{p,n} \subset \Lambda_p(\mathbb{R}^n)\}. \tag{1}$$

Здесь через $G^+_{p,n}$ обозначено грассманово многообразие единичных простых p-векторов. Единичную сферу в норме комассы с центром в начале пространства $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ обозначим $S^*_{p,n}$. Для $\omega \in \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ число

$$\|\omega\| := \sup\{\langle\varphi, \omega\rangle, \varphi \in S^*_{p,n}\} \tag{2}$$

называется *нормой массы*. Для любого $\xi \in \Lambda_p(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ справедливы неравенства

$$\|\xi\|^* \leqslant |\xi| \leqslant \|\xi\|. \tag{3}$$

Каждое из этих неравенств превращается в равенство тогда и только тогда, когда поливектор ξ прост. Точки сферы $S^*_{p,n}$ называются *калибровками степени* p. Единичную сферу массы обозначим $S_{p,n}$. В силу сопряженности построенных норм ([2], I.13), будет

$$\|\varphi\|^* = \sup\{\langle\varphi, \omega\rangle, \omega \in S_{p,n}\}. \tag{4}$$

Из равенств (2), (4) следует, что единичные шары $B_{p,n}$ и $B^*_{p,n}$ в нормах массы и комассы взаимно полярны относительно единичной евклидовой сферы $S^0_{p,n}$ пространств $\Lambda_p(\mathbb{R}^n) = \Lambda^p(\mathbb{R}^n)$ (см. [7], с. 28). Для крайних (экстремальных) точек шара $B_{p,n}$ справедлива формула (см. [9])

$$\operatorname{ext} B_{p,n} = G^+_{p,n} \subset S^0_{p,n}. \tag{5}$$

Откуда по теореме Крейна–Мильмана

$$B_{p,n} = \operatorname{conv} G^+_{p,n}. \tag{6}$$

1.3. Формулы (2), (4) позволяют заключить, что для любых $\omega \in S_{p,n}$, $\varphi \in S^*_{p,n}$ гиперплоскости

$$T_\omega : \langle \omega, x\rangle = 1, \quad x \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n), \quad T_\varphi : \langle \varphi, x\rangle = 1 \quad x \in \Lambda_p(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

являются опорными к сферам $S^*_{p,n}$ и $S_{p,n}$, соответственно. Множество

$$G(\varphi) := T_\varphi \cap G^+_{p,n} = T_\varphi \cap \operatorname{ext} B_{p,n} \tag{8}$$

называется *гранью (face) калибровки* φ. Пересечения

$$G^*(\omega) := T_\omega \cap \operatorname{ext} B^*_{p,n}, \quad \omega \in S_{p,n} \tag{9}$$

назовем *гранями сферы калибровок* $S^*_{p,n}$. Ниже, для $p = 2$, мы дадим классификацию граней сферы калибровок с точностью до преобразований группы $O(\mathbb{R}^n)$.

1.4. Двойственным объектом к набору $\operatorname{ext} X$ крайних точек выпуклого множества X является набор крайних (экстремальных) гиперплоскостей $\operatorname{ext}{}^*X$. Напомним, что гиперплоскость P называется экстремальной для множества X (см. [7], 6.5), если ее нельзя поместить внутри однопараметрического семейства $(1-t)P_1+tP_2$, $t \in [0,1]$ каких-либо гиперплоскостей P_1, P_2, содержащих X в одном из своих полупространств. Очевидно, каждая гиперплоскость $P \in \operatorname{ext}{}^*X$ является опорной к множеству X. Для каждой опорной гиперплоскости P выпуклого тела X через P^- обозначим замкнутое полупространство, содержащее X. Если начало евклидова пространства принадлежит внутренности тела X, то при поляритете относительно единичной сферы с центром в начале крайние точки множества X переходят в экстремальные гиперплоскости двойственного множества. Поэтому справедливо утверждение, двойственное к теореме Крейна–Мильмана (см. [7], 6.9):

$$X = \bigcap P^-, \quad P \in \operatorname{ext}{}^*X. \tag{10}$$

Так как шары $B_{p,n}$ и $B^*_{p,n}$ полярны относительно единичной сферы $S^0_{p,n}$, то из (5), (10) непосредственно следует

Предложение. *Имеет место формула*

$$B^*_{p,n} = \bigcap_{\omega \in G^+_{p,n}} T^-_\omega, \quad T_\omega : \langle \omega, x\rangle = 1. \tag{11}$$

Следствие. *Шаром максимального евклидова радиуса, вписанным в единичную сферу комассы* $S^*_{p,n} = \partial B^*_{p,n}$ *является единичный шар* $B^0_{p,n}$ *и*

$$S^*_{p,n} \cap B^0_{p,n} = G^+_{p,n} = \operatorname{ext} S_{p,n}. \tag{12}$$

§2. Крайние точки единичной сферы комассы

2.1. Рассмотрим произвольный бивектор $\omega \in \Lambda_2(\mathbb{R}^n)$. В работе [8] построено специальное разложение бивектора ω, называемое каноническим

$$\begin{gathered} \omega = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i \omega_i, \quad r = \left[\frac{n}{2}\right], \quad \omega_i \in G^+_{2,n}, \\ V_{\omega_i} \perp V_{\omega_j} \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad \alpha^1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha^r \geqslant 0. \end{gathered} \tag{13}$$

При этом набор $\{\alpha^i\}$ однозначно определяется по бивектору ω и

$$\|\omega\| = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i. \tag{14}$$

Для канонических разложений бивекторов $\omega, \widetilde{\omega}$ справедливо неравенство (см. [8])

$$\langle \omega, \widetilde{\omega} \rangle \leqslant \sum_{i=1}^{r} \alpha^i \widetilde{\alpha}^i. \tag{15}$$

Это неравенство обобщает неравенство Виртингера (см. [9], 1.8.2), оценивающее комассу μ-ой внешней степени некоторой специальной формы из $\Lambda^2(\mathbb{R}^{2m})$, для случая $\mu = 1$. Неравенство Виртингера использовалось при классификации граней калибровок второй степени (см. [5]) и для изучения калибровок комплексных прямых (см. [5, 6]). Из определения (1) и неравенства (15) непосредственно следует (напомним, что мы отождествили поливекторы и формы) выражение для комассы формы ω через ее каноническое разложение (13)

$$\|\omega\|^* = \alpha^1. \tag{16}$$

Теорема. *Пусть* $\omega \in \operatorname{ext} S^*_{2,n}$. *Тогда найдется такой набор* $\{e_i, \bar{e}_i\}_{i=1}^r$ *ортонормированных векторов из* $\mathbb{R}^n$, *что*

$$\omega = \sum_{i=1}^r e_i \wedge \bar{e}_i, \quad r = \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{17}$$

Обратно, любая 2-форма ω *вида* (17) *является крайней точкой сферы* $S^*_{2,n}$.

Доказательство. 1) Рассмотрим каноническое разложение для формы $\omega \in S^*_{2,n}$. Если все $\alpha^i = 1$, то, представляя ω_i в виде $e_i \wedge \bar{e}_i$, $|e_i| = |\bar{e}_i| = 1$, $\langle e_i, \bar{e}_i \rangle = 0$, получаем требуемое разложение (17). Из (16) вытекает, что $\alpha^1 = 1$. При $i > 1$ формы $\omega_{+,-} := (\omega - \alpha^i \omega^i \pm \omega_i) \in S^*_{2,n}$ и $\omega = ((\alpha^i + 1)/2)\omega_+ + (1 - (\alpha^i + 1)/2)\omega_-$. Из этого равенства, в силу экстремальности точки ω, вытекает, что $\alpha^i = 1$.

2) Пусть форма ω имеет вид (17). Рассмотрим каноническое разложение для произвольной формы $\widetilde{\omega} \in S^*_{2,n}$. Тогда

$$|\widetilde{\omega}|^2 = \sum_{i=1}^r (\alpha^i)^2 \leqslant r = |\omega|^2. \tag{18}$$

Поэтому сфера калибровок помещается в евклидовом шаре $B^0_{2,n}(\sqrt{r})$, граница которого содержит точку ω. Значит точка ω крайняя. $\square$

Из доказанной теоремы и неравенства (18) непосредственно вытекает

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{ext} S^*_{2,n} = S^*_{2,n} \cap S^0_{2,n}(\sqrt{r}). \tag{19}$$

Таким образом, единичный шар комассы в $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, как и единичный шар массы, можно представить как выпуклую оболочку некоторого подмножества евклидовой сферы.

2.2. При поляритете относительно единичной сферы $S^0_{2,n}$ полярой для каждой крайней точки $\varphi \in \operatorname{ext} S^*_{2,n}$ будет экстремальная гиперплоскость для сферы массы $S_{2,n}$. Легко видеть, что полярой точки φ является гиперплоскость T_φ, в силу (19), удаленная от начала на расстояние $1/|\varphi| = 1/\sqrt{r}$. По формуле (10) единичный шар массы является пересечением опорных полупространств этих гиперплоскостей. Поэтому, при $p = 2$, имеет место аналог формулы (12).

Теорема. *Шаром максимального евклидова радиуса, вписанного в единичную сферу массы $S_{2,n}$ является шар $B^0_{2,n}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$, $r=\left[\frac{n}{2}\right]$. При этом*

$$S_{2,n}\cap B^0_{2,n}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)=\frac{1}{r}\operatorname{ext}S^*_{2,n}. \tag{20}$$

§3. Крайние точки сферы калибровок и ортогональные комплексные структуры

3.1. Каноническое разложение (17) показывает, что множество $\operatorname{ext}S^*_{2,n}$ является орбитой группы $O(\mathbb{R}^n)$. В [8] дана топологическая классификация орбит $O(\mathbb{R}^n)\omega$ для любого $\omega\in\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$. Если $\omega\in\operatorname{ext}S^*_{2,n}$ и n четно, то

$$\operatorname{ext}S^*_{2,n}=O(\mathbb{R}^n)\omega\simeq O(n)/\bar{U}(r),\quad n=2r, \tag{21}$$

где через $\bar{U}(r)$ обозначен образ группы унитарных $r\times r$ матриц при стандартном вложении в $O(2r)$. Таким образом, при четном n многообразие $\operatorname{ext}S^*_{2,n}$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых является $SO(\mathbb{R}^n)$-орбитой своих точек. Эти орбиты совмещаются действием любого несобственного движения из $O(\mathbb{R}^n)$. При нечетном n

$$\operatorname{ext}S^*_{2,n}=O(\mathbb{R}^n)\omega\simeq O(n)/(\bar{U}(r)\times\mathbb{Z}_2),\ n=2r+1. \tag{22}$$

Здесь группа изотропии H_ω элемента $\omega\in\operatorname{ext}S^*_{2,n}$ представлена матрицами вида

$$\begin{pmatrix}\pm1 & 0\\ 0 & A(r)\end{pmatrix},\quad A(r)\in\bar{U}(r)\subset O(2r). \tag{23}$$

Значит при нечетном n многообразие $S^*_{2,n}$ связно.

3.2. Пусть каноническое разложение (17) формы $\omega\in S^*_{2,n}$ имеет вид

$$\omega=e_1\wedge\bar{e}_1+\ldots+e_k\wedge\bar{e}_k,\quad 1\leqslant k\leqslant r. \tag{24}$$

Ранговое пространство этой формы $V_\omega=\operatorname{Lin}\{e_i,\bar{e}_i\}_{i=1}^k$ имеет размерность $2k$. Определим комплексную структуру $J(\omega):V_\omega\to V_\omega$, $J^2(\omega)=-\mathrm{id}$ равенствами

$$J(\omega)e_i:=\bar{e}_i,\quad J(\omega)\bar{e}_i=-e_i,\quad 1\leqslant i\leqslant k. \tag{25}$$

Ниже будет показано, что оператор $J(\omega)$ не зависит от выбора разложения (24), поэтому обозначение $J(\omega)$ корректно. В комплексном пространстве $V_\omega(J(\omega))$ операция

$$(x,y) = \langle x,y\rangle - i\langle\omega, x\wedge y\rangle, \quad x,y\in V_\omega \tag{26}$$

является эрмитовым скалярным произведением (см. [10], 21.9). Так как $\mathrm{Re}(x,y)=\langle x,y\rangle$, то задано естественное включение группы унитарных преобразований $U(V_\omega(J(\omega)))$ в группу $O(V_\omega)$. Рассмотрим стабилизатор элемента ω

$$H_\omega := \{A\in O(V_\omega) \mid A\omega=\omega\} \tag{27}$$

в группе $O(V_\omega)$.

Предложение. *Для формы ω вида* (24) *справедливо*

$$H_\omega(V_\omega) = U(V_\omega(J_\omega)). \tag{28}$$

Доказательство. 1) Пусть $A\in H_\omega(V_\omega)$. Тогда $\forall x,y\in V_\omega$ будет

$$(Ax,Ay) = \langle Ax,Ay\rangle - i\langle\omega, Ax\wedge Ay\rangle = \langle x,y\rangle - \langle A\omega, A(x\wedge y\rangle =$$
$$= \langle x,y\rangle - i\langle\omega, x\wedge y\rangle = (x,y).$$

Комплексная линейность оператора A следует из цепочки эквивалентностей

$$AJ(\omega) = J(\omega)A \Longleftrightarrow \forall x,y\in V_\omega\ \ (A(ix),Ay) = (iAx,Ay) \Longleftrightarrow$$
$$(ix,y) = i(Ax,Ay).$$

2) Пусть $A\in U(V_\omega(J_\omega))$. Тогда $\forall x,y\in V_\omega$ будет

$$\langle\omega, x\wedge y\rangle = \langle A\omega, A(x\wedge y)\rangle = \langle A\omega, Ax\wedge Ay\rangle,$$
$$\langle\omega, x\wedge y\rangle = -\mathrm{Im}(x,y) = -\mathrm{Im}(Ax,Ay) = \langle\omega, Ax\wedge Ay\rangle.$$

Откуда следует $A\omega=\omega$. □

Предложение 3.2 позволает дать более геометричное описание многообразия $\mathrm{ext}\, S^*_{2,n}$. Фиксируем произвольный элемент $\omega\in \mathrm{ext}\, S^*_{2,n}$. Тогда

$$\mathrm{ext}\, S^*_{2,n} \simeq$$
$$\simeq \begin{cases} O(\mathbb{R}^n)/U(V_\omega(J(\omega))), & n=2r(V_\omega=\mathbb{R}^n),\\ O(\mathbb{R}^n)/(U(V_\omega(J(\omega)))\times\mathbb{Z}_2), & n=2r+1(V_\omega=\mathbb{R}^{2r}\subset\mathbb{R}^n).\end{cases} \tag{29}$$

Группа $\mathbb{Z}_2$ образована тождественным преобразованием $\mathbb{R}^n$ и зеркальной симметрией относительно гиперплоскости $V_\omega\subset\mathbb{R}^n$.

3.3. Рассмотрим четномерное евклидово пространство V^{2k}, $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Допустим, что для некоторой эрмитовой структуры J, $(\cdot,\cdot)$ на этом пространстве будет $\mathrm{Re}(\cdot,\cdot) = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда для любого $x \in V^{2k}$ $\langle Jx, x\rangle = -\mathrm{Im}(x,x) = 0$. Комплексные структуры, обладающие этим свойством, называются *ортогональными*. Легко проверить, что для любой ортогональной комплексной структуры J операция

$$(x,y) = \langle x,y\rangle - i\langle Jx,y\rangle \tag{30}$$

является единственным эрмитовым скалярным произведением на $V^{2k}(J)$, продолжающим евклидово скалярное произведение на V^{2k}. Так как $\langle Jx,y\rangle = -\langle Jy,x\rangle$, $\forall x,y \in V^{2k}$, то существует, причем единственная, 2-форма $\omega \in \Lambda^2(V^{2k})$, такая что

$$\langle Jx,y\rangle = \langle \omega, x\wedge y\rangle, \quad \forall x,y \in V^{2k}. \tag{31}$$

Отсюда, в частности, следует, что комплексная структура (25) не зависит от выбора канонического разложения ω и ортогональна. Множество ортогональных комплексных структур на евклидовом пространстве V^{2k} обозначим $J^0(V^{2k})$. Форму $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, определяемую соотношением (31) по комплексной структуре $J \in J^0(V^{2k})$, обозначим $\Phi(J)$.

Теорема. *Отображение $\Phi : J^0(V^{2k}) \to \Lambda^2(V^{2k})$ осуществляет каноническую биекцию множества ортогональных комплексных структур $J^0(V^{2k})$ на многообразие $\mathrm{ext}\, S_2^*(V^{2k})$ крайних точек сферы калибровок $S_2^*(V^{2k})$. При этом стабилизатор $H_{\Phi(J)} \subset O(V^{2k})$ формы $\Phi(J)$ совпадает с группой унитарных преобразований $U(V^{2k}(J))$.*

Доказательство. Инъективность отображения Φ непосредственно следует из (31). Если форма $\omega \in \mathrm{ext}\, S_2^*(V^{2k})$, то по теореме 2.1 ее можно представить в виде (24). Тогда ортогональная комплексификация $J(\omega)$, построенная в (25), принадлежит множеству $\Phi^{-1}(\omega)$. Пусть $J \in J^0(V^{2k})$. Рассмотрим какой-нибудь унитарный базис $e_1,\ldots,e_k$ пространства $V^{2k}(J)$. По теореме 2.1 будет

$$\widetilde{\omega} := (e_1\wedge ie_1 + \ldots + e_k \wedge ie_k) \in \mathrm{ext}\, S_2^*(V^{2k}).$$

Выражения $\langle Jx,y\rangle$ и $\langle\widetilde{\omega}, x\wedge y\rangle$ линейны по $x,y\in V^{2k}$ и совпадают на элементах базиса $e_1, ie_1,\ldots,e_k, ie_k$. Поэтому, с учетом (31), заключаем $\widetilde{\omega} = \Phi(\omega)$, что завершает доказательство биективности отображения Φ. Совпадение стабилизатора с подгруппой унитарных преобразований следует из предложения 3.2. $\square$

В процессе доказательства теоремы построено биективное соответствие между набором унитарных базисов пространства $V^{2k}(J)$, $J \in J^0(V^{2k})$ и множеством канонических разложений 2-форм $\Phi(J) \in \operatorname{ext} S_2^*(V^{2k})$. А именно

$$(e_1, \ldots, e_k) \to \Phi(J) = e_1 \wedge ie_1 + \ldots + e_k \wedge ie_k. \tag{32}$$

Соответствие (32) дает явное выражение для отображения Φ.

3.4. Пусть V^{2k} есть четномерное подпространство $\mathbb{R}^n$. Тогда $\operatorname{ext} S_2^*(V^{2k}) \subset S_{2,n}^*$. Поэтому для любого $\varphi \in \operatorname{ext}\ S_2^*(V^{2k})$ гиперплоскость T_φ является опорной к сфере массы $S_{2,n}$.

Лемма. *Пусть $\varphi \in \operatorname{ext} S_2^*(V^{2k})$ и $V^{2k}(J(\varphi))$ – комплексное пространство, порожденное ортогональной комплексной структурой $J(\varphi) := \Phi^{-1}(\varphi)$. Тогда*

$$\omega \in G(\varphi) \Longleftrightarrow \forall e \in V_\omega \ \ \operatorname{Lin}_{\mathbb{C}} e = V_\omega. \tag{33}$$

Доказательство. Представим φ в виде (24). Рассмотрим произвольный бивектор $\omega \in G_{2,n}^{+}$. Его можно разложить во внешнее произведение векторов $\omega = f \wedge \bar{f}$, где

$$f = \sum_{i=1}^{k} (u^i e_i + \bar{u}^i \bar{e}_i) + g, \quad \bar{f} = \sum_{i=1}^{k} (v^i e_i + \bar{v}^i \bar{e}_i) + \bar{g}, \quad g, \bar{g} \in V_\varphi^\perp,$$

$$\langle f, \bar{f} \rangle = 0, \quad |f| = |\bar{f}| = 1.$$

В [8] показано, что

$$\langle \varphi, \omega \rangle = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}^i = u^i, \quad v^i = -\bar{u}^i, \quad g = \bar{g} = 0. \tag{34}$$

Легко убедиться, что (33) $\Longleftrightarrow$ (34). $\square$

Эквивалентность (33) устанавливает биективное соответствие между точками грани $G(\varphi)$ и комплексными прямыми в $V^{2k}(J(\varphi))$, поэтому

$$G(\varphi) \simeq \mathbb{CP}^{k-1}, \quad \varphi \in \operatorname{ext} S_2^*(V^{2k}), \quad 1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{35}$$

§4. Классификация граней сфер массы и комассы

4.1. Перепишем каноническое разложение (13) бивектора ω, объединяя слагаемые с одинаковыми коэффициентами α^i:

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \beta^i \xi_i, \quad \beta^1 = \alpha^1, \quad \xi_1 = \sum_{i=1}^{p} \omega_i, \quad p \leqslant m, \quad \beta^1 > \ldots > \beta^m > 0. \tag{36}$$

В [8] показано, что все бивекторы ξ_i не зависят от выбора разложения (13), поэтому корректны обозначения

$$\widetilde{\omega} := \sum_{i=1}^{m} \xi_i = \sum_{\alpha^i > 0} \omega_i, \quad \bar{\omega} = \xi_1 = \sum_{i=1}^{p} \omega_i. \tag{37}$$

4.2. Теорема. *При любом $\omega \in S_{2,n}$ грань $G^*(\omega)$ разложима в сумму Минковского*

$$G^*(\omega) = \widetilde{\omega} + \operatorname{ext} S_2^*(V_\omega^\perp). \tag{38}$$

Доказательство. 1) Из определения (9) $G^*(\omega) = T_\omega \cap \operatorname{ext} S_{2,n}^*$, $\omega \in S_{2,n}$. Пусть точка x лежит в правой части (38). Из теоремы 2.1 и равенства (17) следует, что $x \in \operatorname{ext} S_{2,n}^*$. Так как

$$\langle x, \omega \rangle = \langle \widetilde{\omega}, \omega \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i = \|\omega\| = 1,$$

то $x \in T_\omega$.

2) Пусть $x \in G^*(\omega)$. Тогда

$$1 = \langle x, \omega \rangle = \sum_{\alpha^i > 0} \alpha^i \langle x, \omega_i \rangle \leqslant \sum_{\alpha^i > 0} \alpha^i = 1.$$

Отсюда следует, что для любого j, при котором $\alpha^j > 0$, справедливо равенство $\langle x, \omega_j \rangle = 1$. Значит $\omega_j \in G(x)$ и по лемме 3.4 $\omega_j = e_j \wedge Je_j$, $J = J(x)$. Поэтому набор $e_1, \ldots, e_k$ (при $\alpha^k > 0$, $\alpha^{k+1} = 0$) является эрмитово ортонормированным и по построению $\widetilde{\omega} = e_1 \wedge ie_1 + \ldots + e_k \wedge ie_k$. Дополним этот набор до унитарного базиса пространства V_x^{2r}. Тогда из (32) следует, что

$$x = \sum_{i \leqslant k} e_i \wedge Je_i + \sum_{i > k} e_i \wedge Je_i = \widetilde{\omega} + y, \quad y \in \operatorname{ext}{}_2^*(V_\omega^\perp). \quad \square$$

Из доказанной теоремы следует, что все грани сферы калибровок являются транслятами многообразий $\mathrm{ext}\, S_2^*(\mathbb{R}^{2m})$, $\mathbb{R}^{2m} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant m \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1$. При этом сами сдвиги принадлежат многообразиям $\mathrm{ext}\, S_2^*((\mathbb{R}^{2m})^\perp)$. Таким образом, с точностью до преобразования из $O(\mathbb{R}^n)$, получается ровно $\left[\frac{n}{2}\right]$ граней, геометрия которых характеризуется формулами (29), (38).

4.3. Предложение. *Пусть* $\omega \in S_{2,n}^*$. *Тогда*

$$G(\omega) = G(\widetilde{\omega}), \quad \widetilde{\omega} \in \mathrm{ext}\, S_2^*(V_{\widetilde{\omega}}). \tag{39}$$

Доказательство. Пусть $x \in G(\omega)$. Тогда

$$1 = \langle \omega, x\rangle = \langle \widetilde{\omega}, x\rangle + \sum_{i>p} \alpha^i \langle \omega_i, x\rangle. \tag{40}$$

Так как для любого $\omega \in S_{2,n}^*$ $\langle \omega, x\rangle \leqslant 1$ и во втором слагаемом (40) (если оно есть) все $\alpha^i < 1$, то все $\langle \omega_i, x\rangle = 0$. Значит $G(\omega) \subset G(\widetilde{\omega})$. Обратное включение следует из леммы 3.4. □

4.4. Следствие (см. [5, 6]). *Все грани калибровок описываются формулой (35). С точностью до преобразования из $O(\mathbb{R}^n)$ их ровно $\left[\frac{n}{2}\right]$ штук.*

Литература

1. F. Morgan, *Area-minimizing surfaces, faces of grassmannians, and calibrations.* Math. Month., **95**, No. 9 (1988), 813–822.
2. Х. Уитни, *Геометрическая теория интегрирования.* М., ИЛ, 1960.
3. Г. Федерер, У. Х. Флеминг, *Целочисленные потоки и минимальные поверхности.* М., Мир, 1973.
4. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть III.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **246** (1997), 108–129.
5. F. Morgan, *On the singular structure of two-dimensional area minimizing surfaces in $\mathbb{R}^n$.* Math. Ann., **261** (1982), 101–110.
6. J. Dadok, R. Harvey, and F. Morgan, *Calibrations on $\mathbb{R}^8$.* Trans. Math., **307**, No. 1 (1988), 1–40.
7. T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper.* Berlin, Springer, 1934; N.Y., 1948.
8. С. Е. Козлов, *Ортогонально совместимые бивекторы.* Укр. геометр. Сб., вып. 27 (1984), 68–75.
9. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М., Наука, 1987.
10. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть IV.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **252** (1998), 78–103.

Glushakov A. N., Kozlov S. E. The geometry of the sphere of the gauges of degree two.

We construct a canonical bijection between the set of extremal points of the unit sphere $S^*_{2,2k} \subset \Lambda^2(\mathbb{R}^{2k})$ (in the norm of cocharge) and the manifold of orthogonal comples structures in $\mathbb{R}^{2k}$. Under this bijection the unitary basises correspond to the expansion of the forms which *re* the conjugate norm of the charge. Using this correspondence we give the classification of t facets of the sphere $S^*_{2,n}$ and the known classification of the facets of the set which is polar to that sphere.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 8 августа 1999 г.