Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

А. Н. Глушаков, С. Е. Козлов

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ГРАНЯХ КАЛИБРОВОК ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Введение

В работе авторов [1] изучались топологические и метрические свойства некоторых подмножеств в пространствах бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ и 2-форм $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, построенных над евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. Настоящая статья является продолжением работы [1], опубликованной в этом же сборнике, что представляет авторам возможность рассматривать введение к [1] как вводную часть данной заметки. Ниже будем использовать основные обозначения и определения, данные в [1]. В первых двух параграфах доказано, что грани на единичных сферах $S^*_{2,n}$, $S_{2,n}$ комассы и массы (см. [1]) являются вполне геодезическими подмногообразиями многообразий крайних точек $\operatorname{ext} S^*_{2,n}$ и $\operatorname{ext} S_{2,n} = G^+_{2,n}$. Для сферы $S_{2,n}$ этот факт можно доказать компоновкой результатов работ [2, 3]. Мы приведем самостоятельное доказательство, использующее аппарат, разработанный для изучения грассмановых многообразий в их плюккеровой модели. В третьем параграфе этот аппарат и результаты предыдущих параграфов применяются для изучения внутренней геометрии комплексного проективного пространства. В частности, доказана одна теорема Вонга [4], ранее сформулированная им без доказательства.

§1. Грани сферы $S^*_{2,n}$ как вполне геодезические подмногообразия в $\operatorname{ext} S^*_{2,n}$

1.1. Введем обозначения для многообразия крайних точек единичной сферы комассы над подпространством $W \subset \mathbb{R}^n$

$$M^*_2(W) := \operatorname{ext} S^*_2(W) \subset \Lambda^2(\mathbb{R}^n).$$

При помощи скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ отождествим пространство бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ с пространством 2-форм $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ (см. [5]). Каждому бивектору $\omega \in S_{2,n}$ сопоставляется грань

Работа частично поддержана грантом научных школ, No. 96-15-96-075.

$G^*(\omega) = T_\omega \cap M_2^*(\mathbb{R}^n)$, где опорная гиперплоскость $T_\omega \subset \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ имеет уравнение $\langle \omega, x \rangle = 1$. Множество $M_2^*(W)$ является однородным многообразием группы $O(W)$. Его размерность при четной размерности $\dim W = 2k$ равна $k(k-1)$ (см. [1], (29)).

1.2. Рассмотрим какую-нибудь калибровку $\varphi \in M_2^*(W^{2k})$. Этой калибровке канонически (и биективно) соответствует некоторая ортогональная комплексная структура $J(\varphi)$ на пространстве W^{2k} (см. [1], 3.3). Действие оператора $J(\varphi)$ на элементах канонического разложения 2-формы φ задается по следующему правилу

$$\varphi = e_1 \wedge \bar{e}_1 + \ldots + e_k \wedge \bar{e}_k, \quad J(\varphi)e_i = \bar{e}_i, \quad J(\varphi)\bar{e}_i = -e_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{1}$$

Тем самым пространство W приобретает комплексную ориентацию, при которой базис $e(\varphi) := \{e_1, \bar{e}_1, \ldots, e_k, \bar{e}_k\}$ положительно ориентирован. При $k = 1$ многообразие $M_2^*(W^{2k})$ сводится к двоеточию. Пусть $k = 2$. Оператор Ходжа $* : \Lambda_2(W^4) \to \Lambda_2(W^4)$, соответствующий комплексной ориентации пространства W^4, ортогонален и самосопряжен (см. [6]). Поэтому, шестимерное пространство $\Lambda_2(W^4)$ разлагается в сумму Минковского двух своих ортогональных трехмерных подпространств, являющихся собственными подпространствами оператора $*$, отвечающими собственным числам ± 1

$$\Lambda_2(W^4) = \Lambda^+(W^4) + \Lambda^-(W^4).$$

Из (1) следует, что $\varphi \in \Lambda^+(W^4)$. Это включение справедливо и для любой другой калибровки $\widetilde{\varphi} \in M_2^*(W^4)$ с положительной ориентацией базиса $e(\widetilde{\varphi})$. При отрицательной ориентации калибровка принадлежит пространству $\Lambda^-(W^4)$. Так как все 2-формы из $M_2^*(W^4)$ по модулю равны $\sqrt{2}$, то

$$\operatorname{ext} S_{2,4}^* = M_2^*(W^4) = S^+(\sqrt{2}) \cup S^-(\sqrt{2}), \tag{2}$$

где через $S^\pm(\sqrt{2})$ обозначены двумерные сферы в подпространствах $\Lambda^\pm(W^4)$ с радиусом $\sqrt{2}$. Интересно сравнить формулу (2) с разложением для грассманиана $G_{2,4}^+$ (см. [6])

$$\operatorname{ext} S_{2,4} = G_{2,4}^+ = S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{3}$$

В [7], 3.2.3.4 построено кватернионное представление гладкого многообразия $G_{2,4}^+$ как произведения двух сфер. Заметим, что равенство (3), кроме гладкой, учитывает и риманову структуру обеих частей. При четной размерности пространства W многообразие $M_2^*(W)$ состоит из двух компонент связности, которые в четырехмерном случае реализованы как сферы из объединения (2).

Непосредственно проверяется, что бивекторы

$$f^1 := e_1 \wedge e_2 - \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2, \quad f^2 := e_1 \wedge \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \wedge e_2 \tag{4}$$

лежат в пространстве $\Lambda^+(W^4)$ и ортогональны к $\varphi \in S^+(\sqrt{2})$. Отсюда, с учетом (2), вытекает, что $f^1, f^2 \in T_\varphi M_2^*(W^4)$.

1.3. Пусть калибровка $\varphi \in M_2^*(W^{2k})$, $k \geqslant 2$ имеет разложение (1). Для каждой пары индексов $1 \leqslant i < j \leqslant k$ пространство $W_{ij} := \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}(e_i, \bar{e}_i, e_j, \bar{e}_j) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}(e_i, e_j)$ вещественно четырехмерно и является комплексно двумерным подпространством пространства $W_{\mathbb{C}}^k(J(\varphi))$. По правилу (4) построим набор 2-форм

$$f_{ij}^1 := e_i \wedge e_j - \bar{e}_i \wedge \bar{e}_j, \quad f_{ij}^2 := e_i \wedge \bar{e}_j + \bar{e}_i \wedge e_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k. \tag{5}$$

Лемма. *При $k \geqslant 2$ набор (5) является ортогональным базисом касательного пространства $T_\varphi M_2^*(W^{2k})$.*

Доказательство. Из определения (5) следует, что все элементы набора попарно ортогональны и их количество совпадает с размерностью многообразия $M_2^*(W^{2k})$. Остается показать, что все 2-формы f_{ij}^1, f_{ij}^2 касаются многообразия $M_2^*(W^{2k})$ в точке φ. Не нарушая общности, докажем это для пары $(i,j) = (1,2)$. Принадлежность 2-формы φ к многообразию $M_2^*(W^{2k})$ характеризуется тем, что в ее каноническом разложении [1], (13) все коэффициенты α^i равны единице. В [6] показано, что любой элемент пространства $\Lambda^+(W_{12})$ (см. п. 1.2) может быть разложен в сумму двух простых бивекторов с вполне ортогональными площадками и равными модулями. По построению, формы $e_1 \wedge \bar{e}_1 + e_2 \wedge \bar{e}_2$, f_{12}^1, $f_{12}^2 \in \Lambda^+(W_{12})$, поэтому, в силу сказанного, две окружности

$$\sigma_{12}^{1(2)}(t) := [(e_1 \wedge \bar{e}_1 + e_2 \wedge \bar{e}_2)\cos t + f_{12}^{1(2)} \sin t] + \sum_{i>2} e_i \wedge \bar{e}_i$$

принадлежит многообразию $M_2^*(W^{2k})$. Теперь наше утверждение следует из равенств $\sigma_{12}^{1(2)}(0) = \varphi$, $\dot{\sigma}_{12}^{1(2)}(0) = f_{12}^{1(2)}$. □

1.4. Теорема. *Любая грань $G^*(\omega)$ сферы $S_2^*(\mathbb{R}^n)$ лежит в многообразии $M_2^*(\mathbb{R}^n)$ как вполне геодезическое подмногообразие.*

Доказательство. По формуле [1], (38) грань $G^*(\omega)$ можно разложить в сумму Минковского

$$G^*(\omega) = \widetilde{\omega} + M_2^*(V_\omega^\perp), \quad \widetilde{\omega} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $\varphi \in M_2^*(V_\omega^\perp)$. В [1], 4.2 показано, что найдется такой ортонормированный набор $\{e_i, \bar{e}_i\}_{i=1}^r$, $r = \left[\frac{n}{2}\right]$, при котором $\varphi = e_1\wedge\bar{e}_1+\ldots+e_k\wedge\bar{e}_k$, $\widetilde{\omega} = e_{k+1}\wedge\bar{e}_{k+1}+\ldots+e_r\wedge\bar{e}_r$. Форма $\psi := \widetilde{\omega}+\varphi$ принадлежит многообразию $M_2^*(\mathbb{R}^n)$. Ортогональный базис $\{f_{ij}^{1(2)}\}$ пространства $T_\psi M_2^*(\mathbb{R}^n)$, построенный по лемме 1.3 для набора $\{e_i, \bar{e}_i\}_{i=1}^r$, можно разбить на две части $f_1 := \{f_{ij}^{1(2)}\}$, $j \leqslant k$ и $f_2 := \{f_{ij}^{1(2)}\}$, $j > k$. Множество f_1 служит базисом для грани $G^*(\omega)$, а все элементы множества f_2 ортогональны к пространству $\Lambda_2(V_\varphi)$. Касательные вектора любой кривой в грани $G^*(\omega)$ лежат в пространстве $\Lambda_2(V_\varphi)$. Поэтому, для любой кривой γ в грани $G^*(\omega)$ справедлива эквивалентность

$$\ddot{\gamma} \perp T_\gamma M_2^*(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \ddot{\gamma} \perp T_\gamma G^*(\omega),$$

откуда следует утверждение теоремы. □

§2. Свойства канонического вложения многообразия $\mathbb{C}P^{k-1}$ в грассманиан $G_2^+(\mathbb{R}^{2k}) \subset \Lambda_2(\mathbb{R}^{2k})$

2.1. Напомним некоторые канонические конструкции, связанные с комплексной структурой J на четномерном евклидовом пространстве V^{2k} (см. [7], 3.2). Комплексная структура J позволяет рассматривать пространство V^{2k} как k-мерное комплексное пространство $V_{\mathbb{C}}^k$. Поэтому определены естественные вложения комплексных грассмановых многообразий $\mathbb{C}G_p(V_{\mathbb{C}}^k)$ (с комплексной ориентацией) в вещественные грассманианы $G_{2p}^+(V^{2k})$. При $p = 1$ комплексное многообразие $\mathbb{C}G_1(V_{\mathbb{C}}^k)$ рассматривают как комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{k-1}$. Тем самым, последнее наделяется структурой комплексного многообразия. Отображение Хопфа

$$H : S^{2k-1}(V^{2k}) \to \mathbb{C}P^{k-1} = \mathbb{C}G_1(V_{\mathbb{C}}^k) \subset G_2^+(V^{2k})$$

сопоставляет каждому единичному вектору e его комплексную линейную оболочку в пространстве $V^k_{\mathbb{C}}$. Эту комплексную прямую можно рассматривать как 2-плоскость в евклидовом пространстве V^{2k}, снабженную комплексной ориентацией.

2.2. Плюккерово вложение P (см. [8], 6.2) сопоставляет каждой ориентированной 2-плоскости, проходящей через начало пространство V^{2k}, простой единичный бивектор $\omega \in \Lambda_2(V^{2k})$, однозначно этой плоскостью определяемый. Отождествляя элемент грассманиана $G^+_2(V^{2k})$ с его образом при плюккеровом вложении, будем считать, что $G^+_2(V^{2k}) \subset \Lambda_2(V^{2k})$. Конструкция п. 2.1 позволяет определить каноническое вложение

$$\mathbb{C}P^{k-1} \subset G^+_2(V^{2k}) \subset \Lambda_2(V^{2k}). \tag{6}$$

При этом, отображение Хопфа описывается простой формулой

$$H : S^{2k-1}(V^{2k}) \to G^+_2(V^{2k}), \quad h(e) = e \wedge ie. \tag{7}$$

Отображение Hявляется субмерсией сферы $S^{2k-1}(V^{2k})$ на $\mathbb{C}P^{k-1} \subset G^+_2(V^{2k})$ со слоем $S^1(\omega) = \{x \in V_\omega \mid |x| = 1\}$ $\forall \omega \in \mathbb{C}P^{k-1}$.

Теорема. *Пусть на евклидовом пространстве V^{2k} задана ортогональная комплексная структура J. Тогда комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{k-1}$, канонически вложенное в грассманово многообразие $G^+_2(V^{2k}) \subset \Lambda_2(V^{2k})$, совпадает с гранью $G(\varphi)$ для некоторой калибровки $\varphi \in M^*_2(V^{2k})$.*

Доказательство. По определению вложения (6) бивектор ω принадлежит подмногообразию $\mathbb{C}P^{k-1}$ тогда и только тогда, когда площадка V_ω голоморфна. Это условие совпадает с условием [1], (33) принадлежности ω к грани $G(\varphi)$ для калибровки $\varphi \in M^*_2(V^{2k})$, определенной равенством $\varphi = \Phi(J)$ (см. [1], п. 3). □

2.3. Рассмотрим гладкий путь $\gamma : t \mapsto \mathbb{C}P^{k-1}$. При помощи отображения Хопфа (7) поднимем путь γ в путь e на сфере S^{2k-1}. Тогда $\gamma = e \wedge ie$. Ортогональная комплексная структура J допускает единственное распространение евклидова скалярного произведения $\langle , \rangle$ в V^{2k} до эрмитова $(,)$ в $V^k_{\mathbb{C}}$. Разложим вектор $\dot e(0)$ по базису $e_1, ie_1, \dots, e_k, ie_k$, где базис $e_1, \dots, e_k$ унитарен в $V^k_{\mathbb{C}}$ и $e_1 = e(0)$:

$$\dot e(0) = \mu(ie_1) + f, \quad f = \sum_{j=2}^{k} (u^j e_j + v^j (ie_j)).$$

Тогда

$$\dot\gamma(0) = \dot e(0) \wedge ie(0) + e(0) \wedge i\dot e(0) = (\mu(ie_1) + f) \wedge ie_1 +$$

$$e_1 \wedge (-\mu e_1 + if) = f \wedge ie_1 + e_1 \wedge if, \quad f \perp e_1, ie_1.$$

Отсюда вытекает

Предложение. *Каноническое разложение любого единичного касательного к подмногообразию $\mathbb{C}P^{k-1}$ в точке $\omega = e_1 \wedge ie_1$ вектора имеет вид*

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2), \quad e_2 = ie_1, \quad n_2 = in_1. \tag{8}$$

Заметим, что в разложении (8) вектора e_1, n_1 образуют эрмитово-ортонормированную пару.

Теорема. *Подмногообразие $\mathbb{C}P^{k-1}$ грассманиана $G_2^+(V^{2k})$ вполне геодезическое.*

Доказательство. По теореме 2.2 многообразие $\mathbb{C}P^{k-1}$ совпадает с гранью $G(\varphi)$ некоторой калибровки φ, имеющей разложение (1). (Единичный вектор $X \in T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$, $\omega = e_1 \wedge ie_1$ можно представить в виде (8). По формуле [9], 11(9) геодезическая грассманиана $G_2^+(V^{2k})$, исходящая из точки ω в направлении X имеет натуральную параметризацию

$$\gamma(t) := \exp_\omega(tX) =$$

$$= \left(e_1 \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + n_1 \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \wedge \left(e_2 \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + n_2 \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{9}$$

Так как пары e_1, n_1 эрмитово-ортонормирована, то можно считать, что в разложении (1) вектор e_2 совпадает с n_1. Из (9) следует

$$\langle \varphi, \gamma(t) \rangle = \langle e_1 \wedge ie_1, \varphi \rangle \cos^2\frac{t}{2} + \langle n_1 \wedge in_1, \varphi \rangle \sin^2\frac{t}{2} = 1.$$

Значит вся геодезическая $\gamma(t)$ лежит в опорной гиперплоскости $T_\varphi : \langle \varphi, x \rangle = 1$, а, вместе с этим, и в $G(\varphi) = \mathbb{C}P^{k-1}$. □

Следствие. *Все грани* $G(\varphi)$, $\varphi \in S^*_{2,n}$ *сферы* $S_{2,n}$ *вполне геодезичны в* $G^+_{2,n}$.

Доказательство. В [1] показано, что любую грань $G(\varphi)$ можно представить как грань грассманиана $G(\widetilde{\varphi}) \subset G^+_2(V^{2k})$, $\widetilde{\varphi} \in M^*_2(V^{2k})$ для некоторого четномерного подпространства $V^{2k} \subset \mathbb{R}^n$. Из теорем 2.2, 2.3 следует, что эта грань вполне геодезична в $G^+_2(V^{2k}) \subset G^+_2(\mathbb{R}^n)$. Осталось заметить, что последнее включение вполне геодезическое (см. [10], 18.3). □

§3. Направления минимальной кривизны в многообразии $\mathbb{C}P^{k-1}$

3.1. На комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{k-1}$ вводится нормальная риманова метрика Фубини–Штуди (см., напр., [11, 12]). Относительно этой метрики пространство $\mathbb{C}P^{k-1}$ становится римановым однородным многообразием. Более того, эта метрика унитарно изотропна в том смысле, что два касательных направления в этом многообразии могут быть совмещены изометрией, индуцированной некоторым унитарным преобразованием пространства $V^k_{\mathbb{C}}$. Отсюда следует, что любая унитарно изотропная метрика на $\mathbb{C}P^{k-1}$ гомотетична метрике Фубини–Штуди. Из предложения 2.3 следует, что метрика на $\mathbb{C}P^{k-1}$, индуцированная вложением (6), унитарно изотропна, значит, пропорциональна метрике Фубини–Штуди. Так как это вложение вполне геодезическое, то для изучения внутренних вопросов геометрии многообразия $\mathbb{C}P^{k-1}$ можно использовать аппарат, разработанный для плюккеровых вложений грассманианов $G^+_2(V^{2k}) \subset \Lambda_2(V^{2k})$.

Комплексная структура $\widetilde{J}_\omega$ в касательном пространстве $T_\omega G^+_2(V^{2k})$, превращающая грассманиан $G^+_2(V^{2k})$ в кэлерово многообразие, индуцирована поворотом площадки V_ω на угол $\frac{\pi}{2}$ (см. [13]). Нетрудно показать, что это преобразование согласовано с канонической комплексной структурой на многообразии $\mathbb{C}P^{k-1} \subset G^+_2(V^{2k})$. Поэтому действие этой структуры на касательный вектор X (см. (8)) описывается простой формулой

$$\widetilde{J}_\omega X = \widetilde{J}_\omega\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} n_1 \wedge (-e_1) + e_2 \wedge n_2. \quad (10)$$

Так как вложение (6) вполне геодезическое, то комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{k-1}$, в силу (10), приобретает структуру кэлерова подмногообразия в кэлеровом многообразии $G_2^+(V^{2k})$.

3.2. В качестве иллюстрации к сказанному в предыдущем пункте рассмотрим задачу об определении двумерных направлений σ, соответствующих максимальной и минимальной секционным кривизнам многообразия $\mathbb{C}P^{k-1}$. В силу унитарной изотропности пространства $\mathbb{C}P^{k-1}$ эти кривизны совпадают с собственными числами самосопряженного оператора

$$L_X : T_\omega \mathbb{C}P^{k-1} \to T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}, \quad L_X(Y) := R(Y, X)X, \quad \langle Y, X\rangle = 0 \tag{11}$$

для вектора X, имеющего разложение (8). При $k = 1$ многообразие $\mathbb{C}P^{k-1}$ сводится к точке. При $k = 2$ в $T_\omega \mathbb{C}P^1$ существует только одно двумерное направление σ и

$$\begin{gathered} \exp_\omega \sigma = \mathbb{C}P^1 = \omega^- + S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \Lambda^+(V^4), \\ \omega^- \in S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad K_\sigma = 2 \end{gathered} \tag{12}$$

(см. п. 1.2). Вложение (6) вполне геодезическое, поэтому отображение $\exp_\omega$ в (12) мы рассматриваем как экспоненциальное отображение в объемлющем грассманиане. Формула (12) дает еще одну – риманову интерпретацию отождествления комплексной прямой $\mathbb{C}P^1$ с двумерной сферой. Нормировка метрики Фубини–Штуди, заданная вложением (6), такова, что кривизна этой сферы равна 2.

Пусть $k \geqslant 3$. Под $\bar{L}_X$ будем понимать распространение оператора L_X на касательное пространство $T_\omega G_2^+(V^{2k}) \supset T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$, заданное той же формулой (11). По теореме [14], 28.3 собственные числа оператора $\bar{L}_X$ исчерпываются набором $0, \frac{1}{2}, 2$. Через $\bar{\Sigma}_X(\varkappa)$ обозначим собственные подпространства оператора $\bar{L}_X$, отвечающие собственному значению $\varkappa$. Формула (8) и теорема [14], 28.3 позволяет охарактеризовать элементы пересечения $\Sigma_X(\varkappa) := \bar{\Sigma}_X(\varkappa) \cap T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$:

$$\begin{aligned} &\Sigma_X(0) = 0, \\ &\Sigma_X(2) = \operatorname{Lin}_{\mathbb{R}}(J_\omega X) = \operatorname{Lin}_{\mathbb{R}}(-n_1 \wedge e_1 + e_2 \wedge n_2), \\ &\Sigma_X\left(\frac{1}{2}\right) = \{Y \mid Y = n \wedge e_2 + e_1 \wedge in, \, (n_1, n) = (e_1, n) = 0\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, максимальное значение кривизны достигается в голоморфных площадках $\sigma_{\max}$, $J_\omega \sigma_{\max} = \sigma_{\max}$, и равно 2. Площадки σ с минимальным значением кривизны $\frac{1}{2}$ обладают свойством $J_\omega \sigma_{\min} \perp \sigma_{\min}$ (см. [15], 7.5(V)). По теореме [16], 1.1 значение $\varkappa = \frac{1}{2}$ является стационарным значением секционной кривизны на грассманиане $G_2^+(V^{2k})$, $k \geqslant 3$. Из третьей формулы в (13) и утверждения [16], 3.2 следует, что площадка $\sigma_{\min}$ является экстремальным двумерным направлением (см. [16], 1.1) в грассманиане $G_2^+(V^{2k})$, соответствующим стационарному значению $\varkappa = \frac{1}{2}$. Можно показать, что любое такое экстремальное направление σ в грассманиане $G_2^+(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 6$ касается вполне геодезического подмногообразия $\mathbb{C}P^2$, построенного над шестимерным ранговым подпространством $V(\sigma) \subset \mathbb{R}^n$.

Из (12) и второй формулы в (13) следует

$$\exp_\omega \sigma_{\max} = \omega^- + S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \Lambda^+(V_{\sigma_{\max}}),\ \ \omega^- \in S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \qquad (14)$$

Таким образом вполне геодезическое подмногообразие $\exp_\omega \sigma_{\max} \subset \mathbb{C}P^{k-1}$ вложено в евклидово пространство $\Lambda_2(V^{2k})$ как стандартная двумерная сфера, лежащая в некотором трехмерном аффинном подпространстве этого пространства.

3.3. В работе [4], §4 анонсировано утверждение о том, что при $k \geqslant 3$ множество $\exp_\omega \sigma_{\min}$ является вполне геодезическим подмногообразием в $\mathbb{C}P^{k-1}$, гомеоморфным вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. К сожалению, в последующих публикациях нам не удалось найти доказательства этого факта.

Теорема (Вонг). *Пусть в направлении двумерной площадки σ, касающейся многообразия $\mathbb{C}P^{k-1}$, $k \geqslant 3$ достигается минимальная секционная кривизна. Тогда множество геодезических, касающихся этой площадки, образуют вполне геодезическое подмногообразие, гомеоморфное проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.*

Доказательство. Формулы (8), (13) позволяют в площадке $\sigma \in T_\omega \mathbb{C}P^{k-1}$ выбрать ортогональную пару векторов

$$X = n_1 \wedge ie + e \wedge in_1, \quad Y = n_2 \wedge ie + e \wedge in_2,$$

где $\omega = e \wedge ie$, а тройка (e, n_1, n_2) эрмитово ортонормирована. Определим вектор-функции $n(\alpha) := n_1 \cos\alpha + n_2 \sin\alpha$,

$$e(t,\alpha) := e\cos t + n(\alpha)\sin t, \quad n(t,\alpha) := -e\sin t + n(\alpha)\cos t. \qquad (15)$$

Рассмотрим следующую параметризацию поверхности геодезических (см. [9], 11(9))

$$\Phi(t,\alpha)=\exp_\omega t(\cos\alpha X+\sin\alpha Y)=e(t,\alpha)\wedge ie(t,\alpha). \qquad (16)$$

Каждая координатная линия $\Phi(t,\alpha_0)$ этой параметризации является геодезической, исходящей из точки ω. Параметр t на этой геодезической пропорционален натуральному с коэффициентом $\sqrt{2}$, то есть $dt=\sqrt{2}\,ds$. Радиус инъективности грассманиана $G_2^+(V^{2k})$ равен $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (см. [9], 13.1). Поэтому открытый круг $B\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right):=\{t(\cos\alpha X+\sin\alpha Y),\ t<\pi\}\subset T_\omega\mathbb{C}P^{k-1}$ вкладывается в многообразие $\mathbb{C}P^{k-1}$ действием отображения (16). Для точек граничной окружности этого круга из (16) находим

$$\Phi(\pi,\alpha)=\Phi(\pi,\alpha+\pi)=n(\alpha)\wedge in(\alpha). \qquad (17)$$

Так как во всех точках (π,α_0) отображение Φ регулярно, а кривая $\Phi(t,\alpha_0)$ является замкнутой геодезической, то поверхность Φ является гладким подмногообразием в $\mathbb{C}P^{k-1}$, гомеоморфным $\mathbb{R}P^2$. Покажем, что вторая форма B этого подмногообразия обращается в ноль. Из радиальной геодезичности поверхности Φ следует, что $B(\Phi_t,\Phi_t)=0$. Векторное поле $\Phi_\alpha(t,\alpha_0)$ является полем Якоби вдоль геодезической $\Phi(t,\alpha_0)$. Грассманиан $G_2^+(V^{2k})$ наделен структурой риманова симметрического пространства, поэтому направление поля Якоби $\Phi_\alpha(t,\alpha_0)$ переносится параллельно вдоль геодезической $\Phi(t,\alpha_0)$ (см. [12], 31.2.5). Значит, $B(\Phi_t,\Phi_\alpha)=0$. В качестве исходного направления для отсчета углов α можно выбрать любой вектор $\cos\alpha X+\sin\alpha Y$, поэтому достаточно показать, что $B(\Phi_\alpha,\Phi_\alpha)=0$ при $\alpha=0$. Продифференцировав (16) и проделав рутинные выкладки, представим вторую производную $\Phi_{\alpha\alpha}(t,0)$ в виде линейной комбинации

$$\begin{gathered}\Phi_{\alpha\alpha}(t,0)=ae(t,0)\wedge ie(t,0)+\\ +bn(t,0)\wedge in(t,0)+c(n(t,0)\wedge ie(t,0)+e(t,0)\wedge in(t,0)).\end{gathered} \qquad (18)$$

Первые два слагаемых в (18) ортогональны к касательному пространству $T_{\Phi(t,0)}G_2^+(V^{2k})$, а третье слагаемое коллинеарно вектору $\Phi_t(t,0)$. Отсюда следует, что $B(\Phi_\alpha,\Phi_\alpha)=0$. $\square$

Доказанная теорема дает геометрическую характеристику экстремальным направлениям секционной кривизны грассманиана $G_2^+(\mathbb{R}^n)$, $n\geqslant 6$, соответствующим стационарному значению кривизны $\varkappa=\frac{1}{2}$ (см. [16]).

Литература

1. А. Н. Глушаков, С. Е. Козлов, *Геометрия сферы калибровок степени 2.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **261** (1999).
2. F. Morgan, *The exterior algebra $\Lambda^k\mathbb{R}^k$ and area minimization.* Linear Algebra Appl., **66**, (1985), 1–28.
3. B.-Y. Chen, T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces.* Duke Math. J., **45**, No. 2 (1978), 405–425.
4. Y.-C. Wong, *Sectional curvatures of Grassmann manifolds.* Proc. Nat. Acad. USA, **60**, No. 1 (1968), 75–79.
5. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М., Наука, 1987.
6. С. Е. Козлов, *Ортогонально совместимые бивекторы.* Укр. геометр. Сб., вып. 27 (1984), 68–75.
7. В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы.* М., Наука, 1977.
8. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть I, II.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **246** (1997), 84–107.
9. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть III.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **246** (1997), 108–129.
10. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть IV.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **252** (1998), 78–103.
11. S. Bochner, *Curvature in Hermitian metric.* Bull. Am. Math. Soc., **52** (1947), 179–195.
12. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* С.-Петербург, Наука, 1994.
13. Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2, М., Наука, 1981.
14. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть V.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **252** (1998), 104–120.
15. Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом.* М., Мир, 1975.
16. С. Е. Козлов, *Стационарные значения секционной кривизны в грассманианах бивекторов.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **261** (1999).

Glushakov A. N., Kozlov S. E. Geodesics on faces of calibrations of degree two.

It is proved that faces of unite spheres equipped with mass and comass norms are totally geodesic submanifolds in the manifolds of the extremal points of the spheres. The canonical embedding of the complex projective space $\mathbb{C}P^{k-1}$ in the Plücker model of the Grassmanian $G_2^+(\mathbb{R}^{2k}) \subset \Lambda_2(\mathbb{R}^{2k})$ is described, and certain of its properties are proved. As an application of these results, the two-dimensional sections in $\mathbb{C}P^{k-1}$ such that the curvature in these sections is minimal are characterized geometrically.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 сентября 1999 г.