Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

В. А. Залгаллер, А. Л. Ионес

О ТРЕУГОЛЬНИКЕ МИНИМАЛЬНОГО ПЕРИМЕТРА, ОПИСАННОМ ВОКРУГ ВЫПУКЛОГО N-УГОЛЬНИКА

§1. Введение

1.1. Настоящая статья относится к вычислительной геометрии. Цель статьи дать геометрическое обоснование и предложить схему алгоритма численного решения следующей задачи. На плоскости задан (координатами последовательных вершин) выпуклый n-угольник P_n, $n > 3$. Требуется *найти треугольник наименьшего периметра, описанный вокруг* P_n. Эта задача оказывается сложнее, чем может показаться на первый взгляд.

Начнем с более общего вопроса: найти охватывающий P_n k-угольник минимального периметра $n > k \geqslant 3$. Нам неизвестен алгоритм численного решения такой задачи. Но некоторые свойства искомого k-угольника легко установить. (О свойствах описанного k-угольника минимальной площади см. [1].)

1.2. *Среди k-угольников, содержащих P_n, существует хотя бы один k-угольник Q минимального периметра.*

Действительно, пусть $K(O, R)$ – описанный круг для P_n, O – его центр, R – радиус, и пусть $2p_0$ – периметр правильного k-угольника, описанного вокруг $K(O, R)$. Рассмотрим все содержащие P_n выпуклые многоугольники с числом вершин $\leqslant k$ и периметром $\leqslant 2p_0$. Минимизирующую периметр последовательность достаточно выбирать среди них. Вершины таких многоугольников не выходят из круга $K(O, p_0)$. По компактности среди этих многоугольников есть хоть один с минимальным периметром. Ввиду $n > k$ и выпуклости P_n минимальный многоугольник Q не совпадает с P_n. Если бы число вершин у Q было $< k$, то у многоугольника Q была бы вершина, окрестность которой можно срезать, уменьшив периметр. $\square$

1.3. *Пусть Q – выпуклый k-угольник минимального периметра, содержащий P_n. Тогда хоть одна сторона Q содержит в себе сторону n-угольника P_n.*

Допустим, что это не так. Тогда на каждой стороне A_iA_{i+1} многоугольника Q есть ровно одна вершина B_i многоугольника P_n. (Если вершина B_i попала в вершину многоугольника Q, то она единственна для каждой из двух прилегающих сторон многоугольника Q; в этом случае придаем ей два номера.) Обозначим $c_i = |B_i\,B_{i+1}|$. Тогда при обозначениях, ясных из рис. 1,

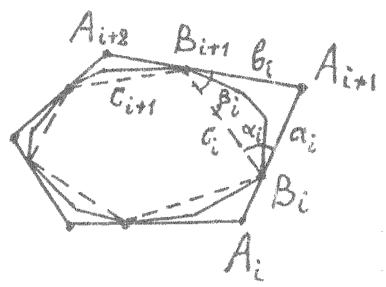

Рис. 1.

имеем для периметра p многоугольника Q значение

$$p = \sum_{i=1}^{k}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\sin(\alpha_i+\beta_i)}(\sin\alpha_i + \sin\beta_i). \tag{1}$$

(Когда B_i в вершине Q, то $B_i = B_{i+1}$, $c_i = 0$. Это только уменьшает число слагаемых в сумме (1).)

Повернем каждую сторону k-угольника Q вокруг лежащей на этой стороне точки B_i на один и тот же малый угол $x > 0$. Это меняет α_i на $\alpha_i - x$, β_i на $\beta_i + x$ и не меняет $\alpha_i + \beta_i$. Тогда

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\sin(\alpha_i+\beta_i)}\big(\sin(\alpha_i - x) + \sin(\beta_i + x)\big),$$

откуда

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\sin(\alpha_i+\beta_i)}\big(-\cos(\alpha_i - x) + \cos(\beta_i + x)\big),$$

$$p''(x)\bigg|_{x=0} = -\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i}{\sin(\alpha_i+\beta_i)}\big(\sin\alpha_i + \sin\beta_i\big) = -p < 0.$$

Отрицательность второй производной исключает минимальность p в исходном положении. □

1.4. Для плоского выпуклого k-угольника с циклически занумерованными вершинами $A_1, \ldots, A_{k+1} = A_1$ назовем *вневписанным кругом* стороны A_iA_{i+1} круг, который касается стороны A_iA_{i+1} и продолжений сторон $A_{i-1}A_i$, $A_{i+2}A_{i+1}$ и расположен относительно прямой A_iA_{i+1} по другую сторону, нежели сам многоугольник.

1.5. *Если P_n – выпуклый n-угольник, $3 \leqslant k < n$, и Q есть k-угольник минимального периметра, содержащий P_n, то у многоугольника Q точки q_i касания его стороны A_iA_{i+1} с ее вневписанным кругом принадлежат не только Q, но и P_n.*

Действительно, пусть для некоторой стороны A_iA_{i+1} это не так. Тогда, см. рис. 2, часть $Q_{i-1}A_iA_{i+1}q_{i+1} = q_{i-1}r_{i-1} + q_{i+1}r_{i+1}$

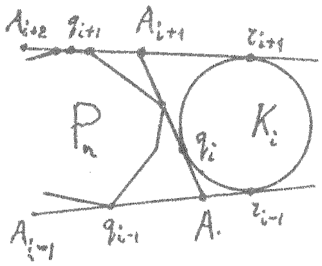

Рис. 2.

периметра многоугольника Q можно уменьшить. Достаточно у многоугольника Q снять сторону A_iA_{i+1}, затем круг K_i, непрерывно изменяя его так, чтобы сохранять его касания с лучами $A_{i-1}A_i$ и $A_{i+2}A_{i+1}$, приблизить к многоугольнику P_n до первого контакта с P_n в некоторой новой точке q_i', и через q_i' провести новую сторону $A_i'A_{i+1}'$, нестрого разделяющую P_n и круг K_i в его новом положении. □

1.6. Нам удобно характеризовать точки q_i как точки касания вневписанных кругов. Но те же точки q_i при их численном поиске можно характеризовать отношением, в котором точка q_i делит сторону A_iA_{i+1}:

$$\frac{A_iq_i}{q_i\,A_{i+1}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma_i}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_{i+1}}{2}}, \tag{2}$$

где γ_i, γ_{i+1} – углы многоугольника Q при вершинах A_i, A_{i+1}.

1.7. Свойства 1.3 и 1.5 характеризуют стационарные положения при поиске k-угольника минимального периметра, но ввиду трудной обозримости всех таких положений эти свойства не дают еще эффективного алгоритма для нахождения такого k-угольника.

Перейдем к случаю $k = 3$, в котором можно продвинуться дальше.

§2. Задачи о треугольнике

2.1. Задача 1. *Для выпуклого n-угольника P_n найти содержащий его треугольник минимального периметра. (Найти все такие треугольники, если их несколько.)*

Задача 2. Пусть L – прямая, идущая вдоль фиксированной стороны выпуклого n-угольника P_n. Найти среди треугольников, содержащих P_n и имеющих основание на прямой L, треугольник ABC наименьшего периметра с основанием AB на прямой L.

Ввиду свойства 1.3 для решения задачи 1 достаточно решить не более, чем n задач 2 и выбрать из полученных треугольников имеющие наименьший периметр. (При наличии у P_n симметрии число задач 2 будет меньше, чем n.)

Далее, мы сосредоточимся на задаче 2.

2.2. Как и в 1.2 и 1.5 легко проверить, что хоть один минимальный треугольник T существует, и вневписанные круги его боковых сторон касаются этих сторон в точках, принадлежащих не только T, но и P_n.

2.3. Назовем содержащий P_n треугольник ABC с основанием AB на прямой L *стационарным*, если точки P и Q касания вневписанных кругов K_A и K_B его боковых сторон AC и BC принадлежат многоугольнику P_n, рис. 3. Искомые в задаче 2 треугольники T обязательно стационарные.

Отметим, что *у каждого стационарного треугольника ABC длины отрезков AP и BQ равны между собой.* Действительно, $DB = AE$ как равные полупериметру треугольника ABC. Поэтому $DA = BE$, но $AP = AD$, $BQ = BE$. $\square$

2.4. Лемма. *В условиях задачи 2 может существовать не более одного стационарного треугольника ABC, у которого каждый из углов $\angle A$, $\angle B$ не превосходил бы $\pi/2$.*

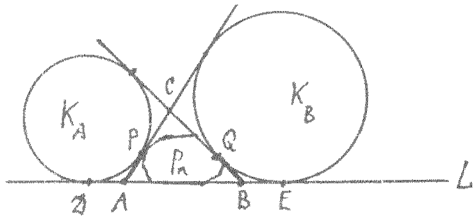

Рис. 3.

Действительно, пусть T – один из таких стационарных треугольников, рис. 3. Тогда увеличение радиуса круга K_B требует уменьшения радиуса круга K_A. Но первое увеличение связано с ростом отрезка BQ, а второе уменьшение связано (пока $\angle A \leqslant \pi/2$) с укорочением отрезка AP. Поэтому равенство $AP = BQ$ не может повториться дважды при $\angle A \leqslant \pi/2$ и $\angle B \leqslant \pi/2$. $\square$

В §3 мы встретимся со случаями неединственности стационарных треугольников и возможной неединственности (см. (3.14)) минимального треугольника в задаче 2. При этом один из углов $\angle A$, $\angle B$ будет тупым. Именно появление тупых углов при основании AB осложняет задачу 2.

2.5. Выделим особый случай, в котором задача 2 легко решается.

Теорема. *Если выпуклый n-угольник P_n имеет ось симметрии, перпендикулярную прямой L, то решение задачи 2 единственно и этим решением является некоторый равнобедренный треугольник T с основанием AB на прямой L.*

Доказательство. Пусть l – перпендикулярная к L ось симметрии n-угольника P_n и ABC – любой содержащий P_n треугольник с основанием на L. Симметризуем по Шварцу треугольник ABC относительно прямой L. Полученный симметризацией треугольник $A'B'C'$ тоже будет содержать P_n, а периметр у $A'B'C'$ будет меньше, чем у ABC, если треугольник ABC не был равнобедренным. Поэтому искомый треугольник T минимального периметра равнобедренный, притом стационарный. По лемме 2.4 он единственен. $\square$

2.6. Пример. Пусть P_4 – прямоугольник с длинами сторон a и b, а прямая L идет вдоль стороны a, рис. 4. Искомый равнобедренный треугольник ABC должен иметь Q точкой касания вневписанного круга стороны BC, что, согласно 1.6, равносильно требованию

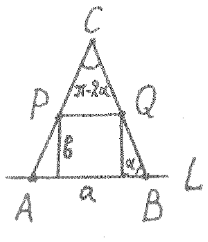

Рис. 4.

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi-2\alpha}{2}}.$$

Но

$$BQ = \frac{b}{\sin\alpha}, \quad QC = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi-2\alpha}{2}}.$$

Это дает для нахождения угла α уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{2b}{a}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Периметр такого треугольника

$$2p = (1+\cos\alpha)\left(\frac{a}{\cos\alpha} + \frac{2b}{\sin\alpha}\right).$$

В частности:

при $a = 1,\ b = 1$ находим $\alpha \approx 1.072,\ 2p \approx 6.46$;
при $a = 1,\ b = 2$ находим $\alpha \approx 1.182,\ 2p \approx 9.60$;
при $a = 2,\ b = 1$ находим $\alpha \approx 0.949,\ 2p \approx 9.32$.

2.7. В условиях теоремы 2.5 легко предложить вычислительный алгоритм поиска минимального треугольника T. Нумеруем $A_0, A_1, \ldots, A_m$ левые вершины P_n, в направлении от прямой L, притом начиная только с той вершины A_0, после которой сторона A_0A_1 наклонена к L в сторону многоугольника P_n. Обозначаем $B_0, B_1, \ldots, B_m$ симметричные им вершины. Начиная с равнобедренного треугольника, боковые стороны которого идут вдоль сторон A_iA_{i+1} и B_iB_{i+1}, где $i = \left[m/2\right]$. Строим для этого треугольника точку касания круга K_A. Если она попала на участок A_iA_{i+1}, то треугольник уже искомый. В противном случае она укажет, к какому следующему ребру A_jA_{j+1} целесообразно обратиться: к номеру j, среднему между 0 и i, или к среднему между i и $m-1$. Так мы, сужая каждый раз вдвое интервал номеров, либо получим решение, либо придем к ситуации, когда выбор A_kA_{k+1} рекомендует перейти к $A_{k-1}A_k$, а выбор $A_{k-1}A_k$ рекомендует перейти к A_kA_{k+1}. В этом случае остается решить задачу для прямоугольника (см. 2.6) с вершинами A_k и B_k в роли P и Q на рис. 4.

2.8. Замечание. В условиях теоремы 2.5 необходимый признак 2.2, аналогичный 1.5, является и достаточным для минимальности треугольника в задаче 2. Это делает доказательным следующий пример, который показывает, что в задаче 1 признаки 1.3 и 1.5 достаточными не являются. В условиях рис. 5 для заштрихованного шестиугольника P_6 решениями всех задач 2 являются либо треугольник $A_1A_2A_3$, либо $B_1B_2B_3$. Признаки 1.3 и 1.5 выполняются для каждого из них. Но только первый из них является минимальным по периметру.

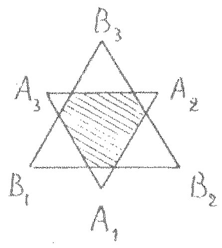

Рис. 5.

Прежде чем перейти к описанию возможного алгоритма решения задачи 2 (см. §4), обратимся к вспомогательному материалу, изложенному в §3.

§3. Двухточечная задача

3.1. Пусть на декартовой плоскости выше оси x фиксированы две различные точки P и Q. Зададимся вопросом: *сколько может быть треугольников ABC с основанием AB на оси x (притом сонаправленным с этой осью), таких, что точка P лежит на стороне AC, точка Q – на стороне BC и вневписанные круги этих сторон касаются их в точках P и Q?* В настоящем §3 мы будем называть именно такие треугольники стационарными.

Ввиду инвариантности относительно подобия считаем, не теряя общности, что координаты точек $P(0,1)$, $Q(a,k)$, где $0 < k \leqslant 1$. У стационарных треугольников, согласно 2.3, $AP = BQ$. Поэтому при $k = 1$ стационарный треугольник обязан быть равнобедренным, притом при заданном a, согласно 2.5, – единственно возможным. При $k < 1$ не может быть стационарных треугольников при $a \leqslant 0$, т.к. это исключает возможность $AP = BQ$. Поэтому далее считаем $0 < k < 1$, $a < 0$.

3.2. Пусть ABC – стационарный треугольник, рис. 6, рис. 7.

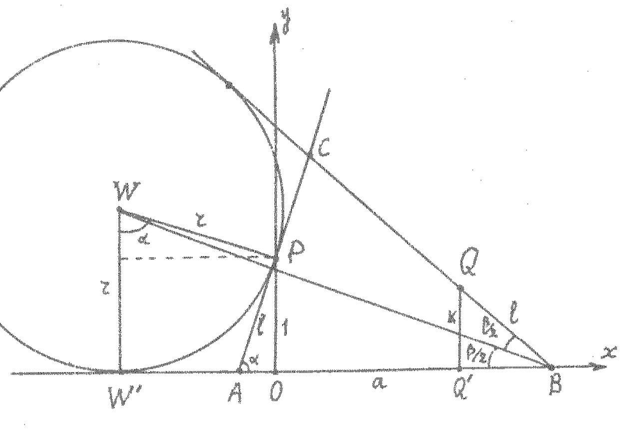

Рис. 6.

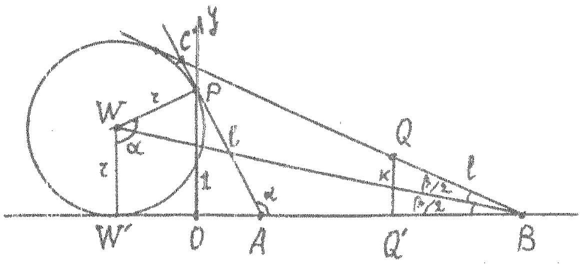

Рис. 7.

(На рис. 6, 7 не изображен вневписанный круг стороны BC, но его контакт со стороной BC именно в точке Q обеспечивается равенством $AP = BQ$.) Угол β обязательно острый: иначе лучи AP и BQ расходились бы, не образуя треугольник. Угол β ограничен снизу требованием, чтобы точка P лежала внутри стороны AC. (Это требует $\operatorname{tg}\beta > (1-k)/a$.) Равенство $AP = BQ$ влечет соотношение

$$\sin\beta = k\sin\alpha. \tag{4}$$

Оно накладывает ограничения и на α, но угол α может быть и острым, как на рис. 6, и тупым, как на рис. 7.

Полупериметр $p = W'B$ треугольника ABC допускает два представления:

$$p = W'B = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

$$p = W'O + OQ' + Q'B = r\sin\alpha + a + k\operatorname{ctg}\beta.$$

Поэтому соблюдение равенства

$$r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = r\sin\alpha + a + k\operatorname{ctg}\beta \tag{5}$$

является необходимым признаком стационарного треугольника.

3.3. Выразим все входящие в равенство (5) величины через a, k и вспомогательную величину $t := \operatorname{ctg}\alpha/2 > 0$. Имеем

$$\sin\alpha = \frac{2t}{t^2+1}, \quad \cos\alpha = \frac{t^2-1}{t^2+1};$$

из трапеции $W'WPO$ следует $r = 1 - r\cos\alpha$, откуда

$$r = \frac{1}{1-\cos\alpha} = \frac{t^2+1}{2};$$

из (4) находим

$$\sin\beta = \frac{2kt}{t^2+1}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{(t^2+1)^2 - 4k^2t^2}}{t^2+1}.$$

Обозначим

$$\Delta = \sqrt{(t^2+1)^2 - 4k^2t^2} = \sqrt{(t^2+1-2k^2)^2 + 4k^2(1-k^2)}, \qquad (6)$$

тогда

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\Delta}{2kt}, \quad \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{1+\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{t^2+1+\Delta}{2kt}.$$

Теперь равенство (5) принимает вид

$$4ka = t^3 + (2-4k)t + \frac{1}{t} + \left(t + \frac{1-2k}{t}\right)\Delta. \qquad (7)$$

При фиксированном k, $0 < k < 1$, величины a и p выражаются как функции от t:

$$p = \frac{t^2+1}{4kt}(t^2+1+\Delta), \quad a = p - t - \frac{\Delta}{2t}.$$

На рис. 8 приведен (достаточно типичный) график этих двух функций при $k = 0.7$. (На рис. 8 присутствует график еще одной функции $p_0(k, a(t))$, которая будет интересовать нас ниже в 3.8.)

3.4. Если при фиксированном k, $0 < k < 1$, задать значение $t > 0$, то этим будет определено положение луча AP и радиус $r = \frac{t^2+1}{2} > 1/2$ круга K_A. Равенство (4), где $0 < \beta < \pi/2$, определит наклон луча BQ. Изменения значения a при фиксированных k и t лишь параллельно сдвигают луч BQ в направлении оси x. При этом существует единственное значение a, при котором луч BQ касается "сверху" круга K_A. Поэтому *равенство* (7) *является не только необходимым, но и достаточным признаком стационарности треугольника с такими* k, t, a.

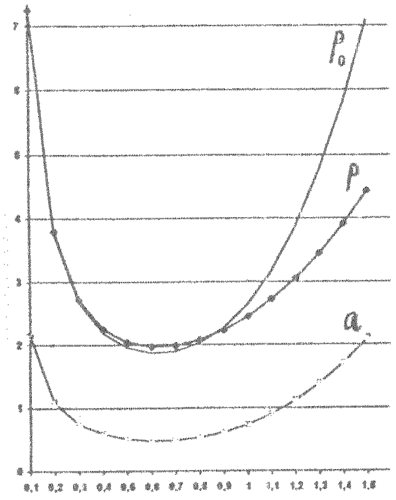

Рис. 8.

3.5. Лемма. *При фиксированном k, $0 < k < 1$, величина a, определяемая равенством* (7), *является строго выпуклой функцией от t при $t > 0$.*

Доказательство. 1) Дифференцируя по t равенство (7), получаем

$$4ka' = 3t^2 + (2-4k) - \frac{1}{t^2} + \left(1 + \frac{2k-1}{t^2}\right)\Delta + \\ +2\frac{(t^2+1-2k)(t^2+1-2k^2)}{\Delta}. \qquad (8)$$

Обозначим в (8) $u := t^2$. Нам достаточно доказать, что $\frac{da'}{du} > 0$. Дифференцируя (8) по u, придем к равенству:

$$4ku\Delta\frac{da'}{du} = (3u^2+1)\Delta + (1-2k) + u(1-2k)(1-2k^2) + \\ +3u^2(u+1-2k^2) + 8u^2(u+1-2k)\frac{k^2(1-k^2)}{\Delta^2}. \qquad (9)$$

2) При $0 < k < 1/2$ все слагаемые правой части (9) положительны. Поэтому далее считаем $1/2 \leqslant k < 1$.

3) Пусть $u > 2$. Тогда $\Delta > \sqrt{9 - 8k^2} > 1$. Два последних слагаемых в (9) положительны. Второе и третье слагаемые даже если они оба отрицательны, по абсолютной величине не превосходят вместе $1+u$; они с избытком погашаются первым слагаемым. Так что при $u > 2$ правая часть (9) положительна.

4) Остается проследить положительность правой части (9) в прямоугольнике

$$\frac{1}{2} \leqslant k < 1, \quad 0 < u \leqslant 2. \tag{10}$$

На рис. 9 приведен график правой части (9) над прямоугольником (10), построенный по программе “Maple”. На исключенной стороне $u = 0$ прямоугольника (10) правая часть (9) равна $2-2k$. А на исключенной стороне $k = 1$ она равна O при $0 \leqslant u \leqslant 1$ и равна $(u-1)(6u^2+2)$ при $u \geqslant 1$. На рис. 10 приведен фрагмент графика рис. 9 в окрестности точки $u = 1$, $k = 1$.

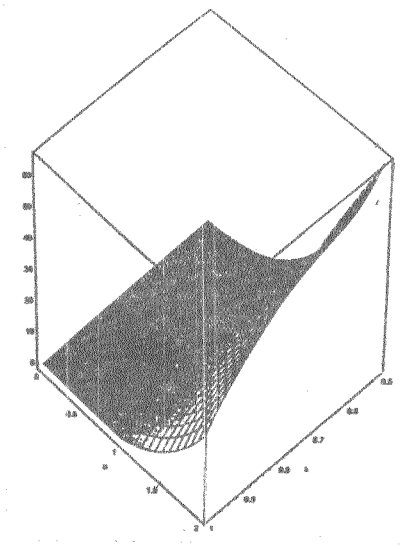

Рис. 9

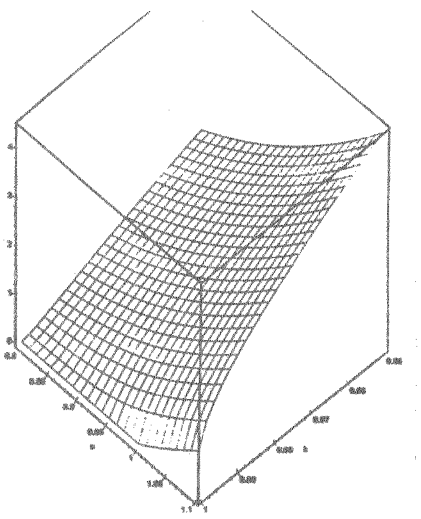

Рис. 10.

Таким образом правая часть (9) положительна при всех $0 < k < 1$, $u > 0$, что доказывает лемму.

3.6. Функция $a(t)$, определенная при фиксированном k, $0 < k < 1$, равенством (7) неограниченно растет при $t \to 0$ и при $t \to \infty$. Из доказанной в лемме 3.5 строгой выпуклости этой функции следует, что она при каждом k имеет единственный минимум $\mu(k) = \min_{t>0} a(k,t)$, который легко найти численно, требуя обращения в нуль правой части (8). В таблице 1 приведены значения функции $\mu(k)$ и значения $t_\mu(k)$, при которых достигается этот минимум.

Таблица 1

k	$\mu(k) = \min a(t)$	$t_\mu(k)$
$\searrow 0$	$\nearrow \infty$	$\searrow 1/\sqrt{3}$
0.05	29.0466	0.5775
0.10	13.6394	0.5781
0.15	8.4982	0.5790
0.20	5.9251	0.5803
0.25	4.3805	0.5820
0.30	3.3511	0.5842
0.35	2.6170	0.5868
0.40	2.0684	0.5899
0.45	1.6440	0.5937
0.50	1.3075	0.5981
0.55	1.0354	0.6033
0.60	0.8124	0.6095
0.65	0.6278	0.6169
0.70	0.4743	0.6257
0.75	0.3463	0.6366
0.80	0.2400	0.6504
0.85	0.1528	0.6685
0.90	0.0831	0.6942
0.95	0.0307	0.7372
$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\nearrow 1$

3.7. Теперь легко ответить на вопрос, поставленный в 3.1.

Теорема. *При $a < \mu(k)$ для точек $P(0,1)$ и $Q(a,k)$, $0 < k < 1$, не существует ни одного стационарного треугольника. При $a = \mu(k)$ существует один стационарный треугольник. При $a > \mu(k)$*

стационарных треугольников два. Одному из них соответствует $t < t_\mu(k)$, *другому* $t > t_\mu(k)$.

Это непосредственно следует из рассмотренных свойств функции $a(t)$.

3.8. Зная ответ на вопрос 3.1, обратимся к следующей задаче. Пусть на плоскости (x, y) фиксированы точки $P(0,1)$ и $Q(a,k)$, $a > 0$, $0 < k < 1$. *Среди треугольников* ABC, *у которых основание* AB *лежит на оси* x, *сторона* AC *содержит точку* P, *а сторона* BC *содержит точку* Q, *найти треугольник наименьшего периметра.*

Не исключается, что треугольник ABC вырождается в дважды покрытый отрезок PT, рис. 11. В этом случае $A = B = T$, $C = P$. У такого вырожденного треугольника полупериметр

$$p_0 = PT = \frac{1}{1-k}\sqrt{a^2 + (1-k)^2}. \tag{11}$$

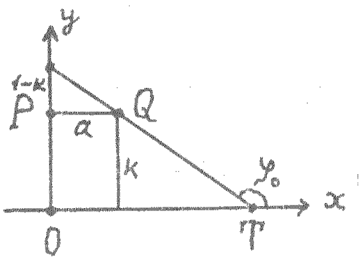

Рис. 11.

В вырожденном случае

$$\sin\varphi_0 = \frac{1-k}{\sqrt{a^2+(1-k)^2}}, \quad \cos\varphi_0 = -\frac{a}{\sqrt{a^2+(1-k)^2}},$$

$$\tau_0 := \operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2} = \frac{1+\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{\sqrt{a^2+(1-k)^2}-a}{1-k}.$$

Минимум периметра может достигаться либо на вырожденном треугольнике, либо – на одном из двух стационарных треугольников (см. 3.7), если они существуют.

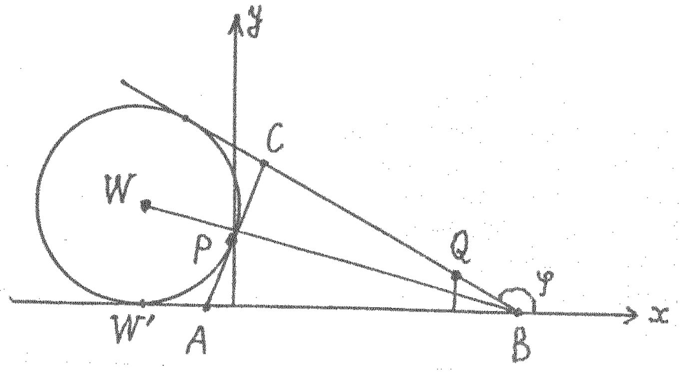

Рис. 12.

3.9. Рассмотрим следующее однопараметрическое семейство треугольников ABC. Фиксируется параметр $\varphi \leqslant \varphi_0$. Через точку Q проводится луч BQ, пересекающий ось x под углом φ, рис. 12. В угол между лучом BQ и отрицательным направлением оси x вписывается окружность, проходящая через точку P так, что ограниченный его круг K_A лежит вне треугольника ABC, где AC – касательная к K_A в точке P. Ограничение $\varphi \leqslant \varphi_0$ гарантирует, что точка P лежит в угле, в который вписывается круг K_A.

Обозначим $\tau := \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ и выразим полупериметр $\Pi(\tau)$ треугольника ABC через τ.

Равноудаленный от P и оси центр W круга K_A лежит на параболе

$$y = \frac{x^2+1}{2}. \tag{12}$$

Координата x_B точки B

$$x_B = a + k \operatorname{ctg}(\pi - \varphi) = a + k\frac{1-\tau^2}{2\tau,}$$

уравнение прямой BW, являющейся биссектрисой угла $\angle CBA$,

$$y = -\tau(x - x_B).$$

Пересекая эту прямую с параболой (12), находим координату x_W центра W

$$x_W = -\tau - \sqrt{\tau^2(1-k) + 2\tau a - (1-k)}.$$

Наконец, полупериметр

$$\Pi(\tau) = x_B - x_W = a + \frac{k(1-\tau^2)}{2\tau} + \tau + \sqrt{\tau^2(1-k) + 2\tau a - (1-k)}. \quad (13)$$

3.10. Убыванию φ, начиная от $\varphi = \varphi_0$, соответствует рост τ, начиная от значения $\tau_0 = (\sqrt{a^2 + (1-k)} - a)/(1-k)$. Но производная

$$\frac{d\Pi}{d\tau} = -\frac{k}{2\tau^2} + \left(1 - \frac{k}{2}\right) + \frac{\tau(1-k) + a}{\sqrt{\tau^2(1-k) + 2\tau a - (1-k)}} \quad (14)$$

при начальном значении τ_0 обращается в $+\infty$, поскольку $\tau_0^2(1-k) + 2\tau_0 a - (1-k) = 0$. Значит, функция $\Pi(\tau)$ в начале изменения τ растет. Ее стационарным точкам могут отвечать только стационарные треугольники ABC. Наконец, при $\varphi \to 0$, т.е. $\tau \to \infty$ правая часть (13) неограниченно растет. Вместе с теоремой 3.7 это доказывает следующее утверждение.

3.11. *Если $a < \mu(k)$, то функция $\Pi(t)$ строго возрастает при $\tau > \tau_0$. Если $a > \mu(k)$, то функция $\Pi(\tau)$ имеет при $\tau > \tau_0$ ровно две стационарных точки, первая (та, у которой τ меньше) является точкой локального максимума, а вторая – точкой локального минимума функции $\Pi(\tau)$. При $a = \mu(k)$ функция $\Pi(\tau)$ строго возрастает, имея одну точку перегиба.*

3.12. Для §4 существенно полученное условие $a > \mu(k)$, при котором у функции $\Pi(\tau)$ имеется, притом единственный, локальный минимум. Умение проверять это условие, находить для имеющихся a и k при каком τ (соответственно – при каком φ и t) этот минимум достигается и чему он равен, существенно в алгоритме решения основной задачи 1.1, см. §4. При соблюдении условия $a > \mu(k)$ требуемое τ ищется как больший из двух корней уравнения $d\Pi/d\tau = 0$, см. (14).

3.13. Хотя для основной задачи 1.1 это не существенно, завершим ответ на попутно поставленный вопрос 3.8.

На пяти рис. 13 приведены фрагменты графиков функции $\Pi(\tau)$ при $k = 0.7$ и пяти значениях a. При $a = 0.4$ функция монотонно растет от значения p_0. При $a = 0.474259004$ на графике появляется точка перегиба. При $a = 0.5$ на графике уже присутствуют раздельно локальный максимум и локальный минимум. Но даже в точке локального минимума значение функции $\Pi(\tau)$ пока еще

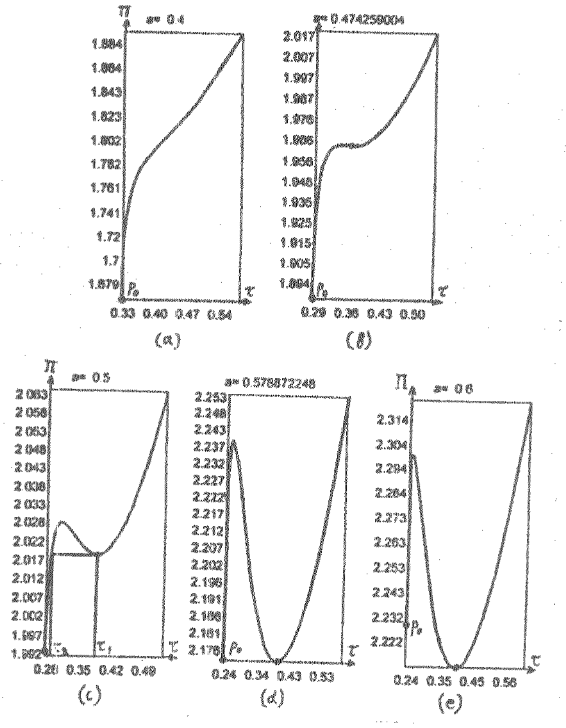

Рис. 13.

больше, чем p_0. При $a = 0.578872248$ значение локального минимума становится равным значению p_0. При $a = 0.6$ значение $\Pi(\tau)$ в локальном минимуме уже явно меньше p_0.

Численный эксперимент позволяет считать, что и при всех других k, $0 < k < 1$, положение аналогичное. Обозначим $\nu(k)$ то значение a, до которого у функции $\pi(\tau)$ либо нет локального минимума, либо он есть, но в нем $\Pi(\tau) > p_0$, а после которого в точке локального минимума $\pi(\tau) < p_0$. В таблице 2 приведены значения функции $\nu(k)$.

Следующее утверждение отвечает на вопрос, поставленный в 3.8.

При $a < \nu(k)$ минимум периметра достигается только при *вырождении искомого треугольника в (дважды покрытый) отре-*

Таблица 2

k	$\nu(k)$	$p = p_0$
0.05	0.9877	39.491
0.10	0.9759	19.481
0.15	0.9645	12.804
0.20	0.9535	9.460
0.25	0.9429	7.449
0.30	0.9326	6.105
0.35	0.9228	5.140
0.40	0.9133	4.414
0.45	0.9042	3.845
0.50	0.8955	3.386
0.55	0.8872	3.007
0.60	0.8795	2.688
0.65	0.8723	2.413
0.70	0.8658	2.173
0.75	0.8602	1.960
0.80	0.8559	1.767
0.85	0.8535	1.589
0.90	0.8546	1.419
0.95	0.8641	1.246

зок AT. При $a = \nu(k)$ минимум достигается в двух положениях: при вырождении в AT и для одного невырожденного стационарного треугольника. При $a > \nu(k)$ минимум периметра достигается только на одном (из двух), существующих согласно теореме 3.7, стационарных треугольников – том, для которого $t > t_\mu(k)$.

3.14. Приведем пример неединственности минимального треугольника в задаче 2 из 2.1. Обратимся к двухточечной задаче этого параграфа при $P(0,1)$, $Q(0.5, 0.7)$. В однопараметрическом семействе 3.9 треугольников ABC, зависящих от параметра $\tau = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, полупериметр $\Pi(\tau)$ имеет график рис. 13(c). Пусть τ_1 соответствует точке локального минимума функции $\Pi(\tau)$, а τ_2 соответствует лежащей левее чем τ_1 другой точке этого графика, в которой $\Pi(\tau_2) = \Pi(\tau_1)$. Соответствующие τ_1 и τ_2 треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ схематически изображены на рис. 14. Отметим на отрезке PA_2 точку U, лежащую ниже точки Q, и выберем отрезок $MN \subset A_2B_1$. Тогда для заштрихованного на рис. 14 пятиугольника $P_5 := PUMNQP$ оба треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ будут решениями задачи 2 при прямой L, направленной по стороне MN.

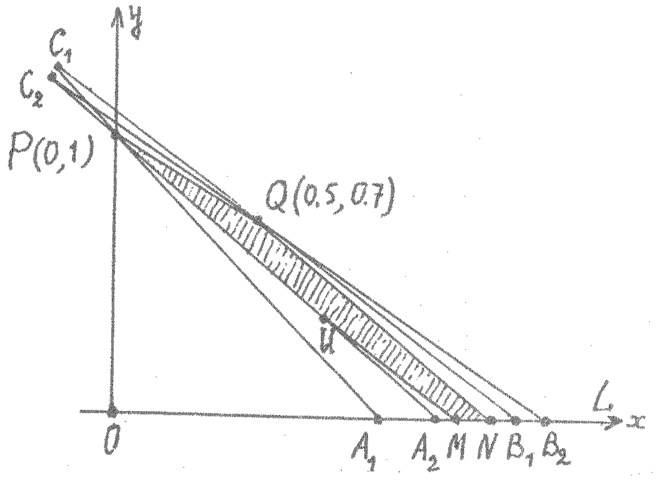

Рис. 14.

§4. Возможная схема алгоритма решения задачи 2

4.1. Пусть на плоскости расположена бесконечно протяженная в оба конца простая ломаная, которая состоит из двух лучей l_1, l_2 (образующих угол меньше π) и из соединяющей начала A_0, A_m этих лучей выпуклой ломаной $A_0, A_1, \dots, A_m$, обращенной выпуклостью в сторону сектора, ограниченного этими лучами, рис. 15

Тогда существует единственный круг K, лежащий в упомянутом секторе, касающийся лучей l_1, l_2 и касающийся извне ломаной $A_0, A_1, \dots, A_m$. Если точки $A_0, \dots, A_m$ заданы своими координатами, а прямые l_1, l_2 – уравнениями, то алгоритм поиска круга K имеет трудоемкость не выше $O(\ln m)$. Действительно, можно начать с круга, касающегося лучей l_1, l_2 и прямой A_iA_{i+1}, где $i = [m/2]$. Если он касается прямой A_iA_{i+1} на самом отрезке A_iA_{i+1}, то он и есть искомый. В противном случае точка касания

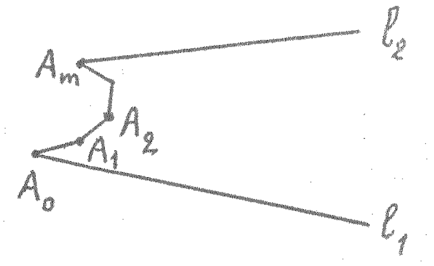

Рис. 15.

укажет, к какой прямой A_jA_{j+1} целесообразно перейти (ср. 2.7): к номеру j, среднему между 0 и i, или к среднему между i и $m-1$. Так, сужая каждай раз вдвое интервал номеров, мы либо получим решение, либо придем к легко решаемой задаче: найти определенную из двух окружностей, касающихся двух лучей и проходящих через заданную точку внутри угла между этими лучами.

4.2. Обратимся к задаче 2 из 2.1. Обозначим h максимальное удаление точек n-угольника P_n от прямой L. Пусть λ_1 и λ_2 – опорные прямые n-угольника P_n, перпендикулярные L, рис. 16

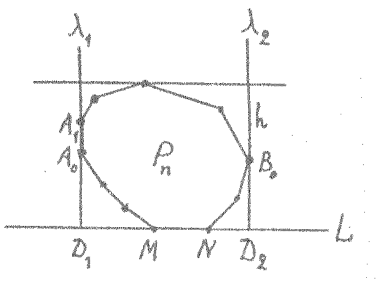

Рис. 16.

Каждое из пересечений $P_n \cap \lambda_1$, $P_n \cap \lambda_2$ может быть либо вершиной, либо – стороной n-угольника P_n. Будем различать три случая.

Случай 1. Хоть одна точка каждого из пересечений $P_n \cap \lambda_1$, $P_n \cap \lambda_2$ лежит на высоте $\leqslant h/2$ от прямой L.

Случай 2. Всё пересечение $P_n \cap \lambda_1$ лежит от прямой L на высоте $> h/2$, а хоть одна точка $P_n \cap \lambda_2$ на высоте $\leqslant h/2$ от прямой L.

Случай 3. Оба пересечения $P_n \cap \lambda_1$, $P_n \cap \lambda_2$ лежат от прямой L на высоте $> h/2$.

4.3. Теорема. *В случае 1 решение задачи 2 единственно, и для его нахождения можно предложить алгоритм сложностью не более $O(\ln^2 n)$.*

Доказательство. Искомый треугольник должен быть стационарным в смысле 2.3. Его вневписанные круги K_A, K_B имеют радиусы $> h/2$. Поэтому в условиях случая 1 углы $\angle A \leqslant \pi/2$ и $\angle B \leqslant \pi/2$. По лемме 2.4 такой стационарный треугольник единственен.

Для поиска этого треугольника предложим следующий алгоритм.

1) Нумеруем $A_0, A_1, \ldots, A_m$ "левые" вершины n-угольника P_n (по часовой стрелке), так чтобы A_1 была первой вершиной, лежащей выше точки, в которой круг радиуса $h/2$, касающийся прямой L, касается P_n слева. (Такую точку легко найти по замечанию 4.1.) Аналогично (против часовой стрелки) нумеруем $B_0, B_1, \ldots, B_k$ "правые" вершины n-угольника P_n, так чтобы B_1 была первой вершиной, лежащей выше точки, в которой круг радиуса $h/2$, касающийся прямой L, касается P_n справа.

2) Фиксируем луч B_iB_{i+1}, где $i = [k/2]$, и строим по правилам 4.1 круг K_A, касающийся прямой L и луча B_iB_{i+1} и касающийся извне n-угольника P_n. В точке касания этого круга K_A с P_n проводим касательную к K_A прямую μ. Затем строим круг K_B, касающийся трех прямых L, μ и B_iB_{i+1}. Если точка касания круга K_B с прямой B_iB_{i+1} попала на отрезок B_iB_{i+1}, то решение найдено. В противном случае положение этой точки укажет, к какому следующему отрезку B_jB_{j+1} целесообразно обратиться: к j, среднему между 0 и i, или к среднему между i и $k-1$.

3) Так, сужая каждый раз вдвое интервал номеров точек B, либо придем к решению, либо найдем пару конкретных точек A_s, B_t, которые следует принять за точки P и Q и решить задачу 3.8 по правилам §3, см. 3.13, $t > t_\mu(k)$.

4.4. Перейдем к случаю 2, рис. 17. Пусть K_{A_0} – круг, касающийся прямой λ_1 (см. рис. 16) в самой низкой точке A_0 пересечения

$P_n \cap \lambda_1$, а K_{B_0} – круг радиуса $h/2$, касающийся прямой L и касающийся P_n справа. Обозначим β касательную прямую круга K_{B_0} в точке $B_0 = P_n \cap K_{B_0}$. Если круг K_{A_0} и прямая β пересекаются, то для n-угольника P_n и прямой L любой стационарный треугольник ABC обязан иметь тупой угол при вершине A. Если же K_{A_0} и β не пересекаются (как на рис. 17), то у P_n и L существует ровно один стационарный треугольник ABC без тупых углов при основании. Такой треугольник ABC можной найти по правилам п. 4.3., предварительно заменив в контуре многоугольника P_n участок A_0M на A_0DM, см. рис. 17. Но наличие такого стационарного треугольника ABC не исключает существование и в этом случае других стационарных треугольников ABC с тупым углом при вершине A.

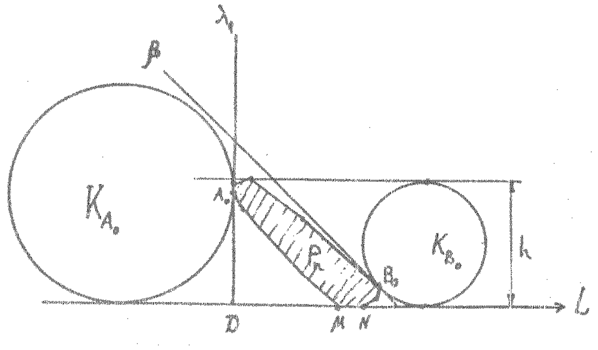

Рис. 17.

Остается, и это – главная трудность, искать все стационарные треугольники ABC с тупым углом при вершине A.

4.5. Шаг 1. Рассмотрим в условиях рис. 17 прямой угол между лучами DL и $D\lambda_1$. Впишем (по правилам 4.1) в этот угол круг K_0, касающийся извне n-угольника P_n. Обозначим на этот раз (в отличие от рис. 17) через B_0 точку касания именно этого круга K_0 с P_n, а через β_0 – касательную к этому кругу в точке B_0 и φ_0 – угол ее наклона. Заменим в правой части границы P_n участок от прямой L до точки B_0 на отрезок касательной β_0. Затем вершины правой части границы P_n нумеруем (против часовой стрелки) $B_0, B_1, \ldots$, а прямые $B_{i-1}B_i$ обозначаем β_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Шаг 2. В острый угол между прямой β_1 и отрицательным направлением прямой L вписываем (по правилам 4.1) круг $\mathcal{K}_1$, касающийся извне n-угольника P_n. Обозначим: C_1 – точку касания $\mathcal{K}_1$ с P_n; γ_1 – касательную к $\mathcal{K}_1$ в точке C_1; $\alpha_1 > \pi/2$ – угол наклона прямой γ_1 к положительному направлению прямой L. Если точка C_1 лежит ниже точки B_0, то процесс останавливается: в задаче 2 нет стационарных треугольников с $\angle A < \pi/2$. Если C_1 лежит выше B_0, то переходим к следующей прямой β_2: в острый угол между β_2 и отрицательным направлением L вписываем круг $\mathcal{K}_2$. Получаем точку C_2, касательную γ_2, угол $\alpha_2 > \pi/2$. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока точка C_r окажется лежащей ниже B_{r-1}. Только на участке границы $B_0, B_1, \ldots, B_r$ могут касаться P_n правые боковые стороны стационарных треугольников с $\alpha > \pi/2$. Углы прямых β_i с прямой L обозначаем φ_i, а через $R_{\min}$ обозначаем радиус круга $\mathcal{K}_r$.

4.6. Обозначим $R_{\max}$ радиус круга $\mathcal{K}_0$, построенного по β_0 так же, как $\mathcal{K}_1$ по β_1. Рассмотрим следующий однопараметрический процесс. Круг $K(R)$ радиуса $R_{\min} \leqslant R \leqslant R_{\max}$ располагается так, что он касается прямой L слева от n-угольника P_n и касается самого P_n. Обозначим через FB общую внешнюю опорную прямую к кругу $K(R)$ и n-угольнику P_n и пусть AC – касательная к кругу $K(R)$ в точке его контакта с P_n, рис. 18. Треугольник ABC, его полупериметр Π и внешний угол φ при вершине B однозначно определяются значением R. С ростом R угол φ строго монотонно убывает. Нас интересует участок убывания φ от φ_r до φ_0. Как и выше, удобно принимать за параметр значение $\tau := \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$.

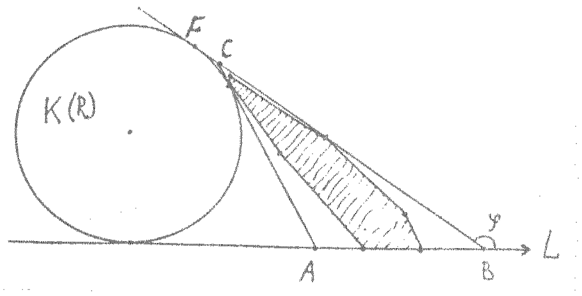

Рис. 18.

В процессе роста радиуса R центр W круга $K(R)$ перемещается по некоторой кривой Z, которая представляет собой C^1-гладкий выпуклый сплайн, состоящий из прямых отрезков и из дуг парабол. Прямые отрезки соответствуют участкам изменения R, при которых точка $q := K(R) \cap P_n$ скользит по одной стороне n-угольника P_n, а параболические участки соответствуют тем участкам изменения R, при которых точка q неподвижна – является одной и той же вершиной n-угольника P_n.

С ростом τ от $\tau_{\min} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi_r}{2}$ до $\tau_{\max} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi_0}{2}$ тупой угол φ убывает от φ_r до φ_0. При этом сторона BC последовательно поворачивается вокруг некоторого числа вершин n-угольника P_n. Разобьем промежуток $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ точками $\tau_{\min} = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_r = \tau_{\max}$ так, чтобы при каждом i на участке $\tau_{i-1} < \tau < \tau_i$ сторона BC поворачивалась вокруг одной вершины X_i n-угольника P_n. (Вершины X_i – это вершины $B_1, B_2, \ldots, B_{r-1}$, но занумерованные в обратном порядке.)

Участку значений $\tau_{i-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_i$ отвечает участок $R_{i-1} \leqslant R \leqslant R_i$, на котором центр W круга $K(R)$ проходит некоторую дугу Z_i кривой Z. Эту дугу легко выделить, зная круги $\mathcal{K}_0, \ldots, \mathcal{K}_r$.

Разобьем промежуток $[\tau_{i-1}, \tau_i]$ точками $\tau_{i-1} = \tau_1^0 < \tau_i^1 < \ldots < \tau_i^{s_i} = \tau_i$ так, чтобы при каждом j внутри участка (τ_i^{j-1}, τ_i^j) сторона BC поворачивалась вокруг одной вершины X_i, а центр W пробегал бы при $\tau_i^{j-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_i^j$ участок Z_{ij} дуги Z_i, являющийся либо прямым, либо – параболическим на кривой Z.

4.7. Пусть на участке $\tau_i^{j-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_i^j$ точка $q = K(R) \cap P_n$ движется в пределах одной стороны n-угольника P_n. Тогда фиксирован угол $\alpha_{ij} > \pi/2$ наклона этой стороны, равный углу $\angle A$ треугольника ABC. Чтобы треугольник ABC оказался стационарным, необходимо выполнение соотношения (4). Это требование по α_{ij} определяет одно значение β_{ij} острого угла $\angle B$, а с ним и одно значение $\tau_{ij} = \operatorname{ctg}\frac{\pi - \beta_{ij}}{2}$. Если такое τ_{ij} попадает в промежуток $[\tau_{i-1}, \tau_i]$, то мы находим один из стационарных треугольников. В противном случае, на этом промежутке изменения параметра τ стационарных треугольников нет.

4.8. Если на участке $\tau_i^{j-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_i^j$ центр W круга $K(R)$ перемещается по параболе, т.е. касается P_n в некоторой постоянной вершине q_{ij} многоугольника P_n, то мы имеем дело с “двухточечной задачей” из §3, где роль P играет точка q_{ij}, а роль Q играет точка X_i.

Обозначив (x_q, y_q) координаты точки q_{ij} и (x_i, y_i) координаты точки X_i, рассмотрим величины

$$k = \frac{y_i}{y_q}, \quad a = \frac{x_i - x_q}{y_q}. \tag{15}$$

Чтобы в этой двухточечной задаче существовал локальный минимум полупериметра $\Pi(\tau)$, необходимо $k<1$ и $a>\mu(k)$, см. 3.7. Опорная в вершине q_{ij} к P_n прямая может поворачиваться в известных нам (определенных заданием P_n) пределах. Это ограничивает диапазон изменения тупого угла $\alpha = \angle A$ треугольника ABC. Кроме того этот диапазон может дополнительно сужаться положением касательных γ_{i-1}, γ_i к кругам $\mathcal{K}_{i-1}$, $\mathcal{K}_i$, если они проходят через точку q_{ij}. Если оставшийся диапазон изменения угла α не совместим с требованием $t = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > t_\mu(k)$, см. 3.6, 3.7, то при $\tau \in [\tau_i^{j-1}, \tau_i^i]$ локального минимума периметра заведомо нет. Если же они совместимы, то требование $t > t_\mu(k)$ дополнительно может сузить диапазон для α.

Оставшийся диапазон изменения тупого угла α для соблюдения необходимого условия (4) требует соответствующего ограничения острого угла β, тем самым – ограничения на $\varphi = \pi - \beta$ и на $\tau = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. Если последнее ограничение несовместимо с $\tau \in [\tau_i^{j-1}, \tau_i^j]$, то локального минимума периметра нет. В противном случае в оставшемся для τ диапазоне будет единственный корень уравнения, полученного приравниванием (14) нулю. Он соответствует локальному минимуму $\Pi(\tau)$. Проверка наличия корня и его нахождения облегчаются тем: что в оставшемся интервале функция (14) монотонна.

4.9. Наконец, в случае 3 (см. 4.2) у искомых стационарных треугольников только один из углов при основании AB может быть тупым. Поэтому достаточно решить две задачи случая 2: один раз, заменив (см. рис. 16) участок контура B_0N на B_0D_2N, а другой раз – заменив участок контура A_0M на A_0D_1M. Проверка наличия корня и его нахождение облегчается тем, что в оставшемся интервале функция (14) монотонна.

4.10. Таким образом доказано следующее утверждение. В условиях задачи 2 существует только конечное число стационарных треугольников. Для численного нахождения тех стационарных треугольников, среди которых могут быть имеющие минимальный периметр, предложен конечный алгоритм.

4.11. Вопрос. Неединственность локальных минимумов функции $\Pi(\tau)$ в задаче 2 вероятно может возникать только при большой сплющенности n-угольника P_n. (Сплющенность можно характеризовать отношением диаметра к толщине.) Нельзя ли доказать, что при достаточно малой сплющенности n-угольника P_n решение задачи 2 единственно? Тогда, в этих ситуациях, алгоритм типа 4.3 действовал бы во всех трех случаях 4.2.

Литература

1. В. А. Залгаллер, *Замечание о выпуклом k-угольнике минимальной площади, описанном около выпуклого n-угольника.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **252** (1998), 33–39.

Zalgaller V. A., Iones A. L. On the triangle of the least perimeter circumscribed about a convex n-gon.

The structure of an algorithm for finding a circumscribed triangle of the least perimeter is proposed. Properties of such a triangle are described.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный
технический университет

Поступило 28 июня 1999 г.