Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

С. Е. Козлов, М. Ю. Никанорова

ГЕОМЕТРИЯ АЛГЕБРЫ ЛИ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ $O(\mathbb{R}^4)$

1.1. Рассмотрим алгебру Ли $A^-(\mathbb{R}^n)$ группы ортогональных преобразований евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Элементами этой алгебры являются кососимметрические операторы $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, а умножение определяется как их коммутатор

$$[g_1, g_2] := g_1 \circ g_2 - g_2 \circ g_1, \quad g_1, g_2 \in A^{-1}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Пространство кососимметрических операторов наделяется структурой евклидова векторного пространства со скалярным произведением, порожденным нормой

$$|g| = \frac{1}{\sqrt{n}}[\mathrm{tr}\,(gg^T)]^{1/2}, \tag{2}$$

где $g \in A^-(\mathbb{R}^n)$, а g^T – сопряженный с g оператор.

Хорошо известно, что алгебра $A^-(\mathbb{R}^3)$ изоморфна алгебре $\mathcal{R}$ трехмерного евклидова пространства с операцией векторного умножения. В качестве изоморфизма между этими алгебрами можно выбрать изометрию пространств $A^{-1}(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{R}^3$ (см., напр., [1], 29.5.7). В настоящей заметке средствами внешней алгебры $\Lambda(\mathbb{R}^4)$ описана геометрия пространства $A^-(\mathbb{R}^4)$ с операцией умножения Ли.

1.2. В [2] построен канонический изоморфизм

$$\varphi : \Lambda_2(\mathbb{R}^n) \to A^-(\mathbb{R}^n) : \forall \omega \in \Lambda_2(\mathbb{R}^n),\ e \in \mathbb{R}^n$$
$$\varphi(\omega)(e) = \omega \llcorner e. \tag{3}$$

В (3) символом “$\llcorner$” обозначена операция внутреннего умножения, то есть такого билинейного отображения (см. [2], 2.1(1))

$$\llcorner : \Lambda_p(\mathbb{R}^n) \times \Lambda_q(\mathbb{R}^n) \to \Lambda_{p-q}(\mathbb{R}^n), \quad p \geqslant q \geqslant 0,$$

Работа частично поддержана грантом научных школ, No. 96-15-96-075.

что для любых $\omega \in \Lambda_p(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \Lambda_q(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \Lambda_{p-q}(\mathbb{R}^n)$ будет $\langle \omega \llcorner \xi, \varphi \rangle = \langle \omega, \xi \wedge \varphi \rangle$.

Ориентируем пространство $\mathbb{R}^n$, зафиксировав один из двух единичных n-векторов $E \in \Lambda_n(\mathbb{R}^n)$. Оператор

$$* : \Lambda(\mathbb{R}^n) \to \Lambda(\mathbb{R}^n), \quad *(\omega) = E \llcorner \omega \tag{4}$$

называется оператором Ходжа.

Изоморфизм (3) является изометрией евклидовых пространств $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ и $A^-(\mathbb{R}^n)$ (см. [2], 10.5). Эта изометрия индуцирует в пространстве бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^n)$ структуру алгебр Ли с произведением

$$[\omega_1, \omega_2]_\Lambda := \varphi^{-1}[\varphi(\omega_1), \varphi(\omega_2)], \quad \omega_1, \omega_2 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^n). \tag{5}$$

При этом изометрия φ становится изоморфизмом алгебр Ли $(\Lambda_2(\mathbb{R}^n), [,]_\Lambda)$ и $(A^-(\mathbb{R}^n), [,])$.

2.1. Специфика строения шестимерного пространства $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ позволяет дать для операции $[,]_\Lambda$ наглядное геометрическое описание.

Подпространство $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ инвариантно относительно действия оператора Ходжа (4). Оно раскладывается в сумму Минковского двух своих ортогональных трехмерных подпространств, являющихся собственными подпространствами оператора $*$, отвечающими собственным числам ± 1 (см. [2], 8.1(1))

$$\Lambda_2(\mathbb{R}^4) = \Lambda^+ + \Lambda^-.$$

Соответственно любой бивектор $\omega \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ разлагается в сумму:

$$\omega = \omega^+ + \omega^-, \quad *\omega^+ = \omega^+, \quad *\omega^- = -\omega^-, \quad \langle \omega^+, \omega^- \rangle = 0. \tag{6}$$

Рассмотрим правильно ориентированный ортонормированный базис $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ пространства $\mathbb{R}^4$. Определим ориентирующие базисы-строки $f(e)$ и $g(e)$ пространств Λ^+ и Λ^-.

$$\begin{gathered}
f(e) = (f_1, f_2, f_3) := \\
= \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3), \\
g(e) = (g_1, g_2, g_3) := \\
= \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4, -e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3).
\end{gathered} \tag{7}$$

Принадлежность элементов базисов (7) пространством $\Lambda^{\pm}$ следует из формулы

$$
\begin{gathered}
*e_k \wedge e_l = (-1)^{\operatorname{inv}(k,l,i,j)} e_i \wedge e_j, \\
k < l, \ i < j, \ \{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}.
\end{gathered} \tag{8}
$$

Предложение. *Ориентация пространств $\Lambda^{\pm}$, заданная введением ориентирующих базисов $f(e)$, $g(e)$, не зависит от выбора положительного ориентированного базиса e в пространстве $\mathbb{R}^4$.*

Доказательство. Пусть e' – другой положительно ориентированный базис пространства $\mathbb{R}^4$. Этот базис можно соединить с базисом e путем $\gamma(t)$ в многообразии базисов пространства $\mathbb{R}^4$. Тогда пути $f(\gamma(t))$, $g(\gamma(t))$ соединяют соответствующие базисы пространств $\Lambda^{\pm}$. $\square$

2.2. Построенная ориентация в трехмерных пространствах $\Lambda^{\pm}$ дает возможность рассматривать в них операцию "$\times$" векторного умножения. В пространстве $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ определим операцию "*векторного умножения*", которую будем обозначать тем же символом "$\times$"

$$
\omega \times \tau := \omega^+ \times \tau^+ + \omega^- \times \tau^-; \quad \omega, \tau \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4). \tag{9}
$$

Из свойств векторного произведения в трехмерных евклидовых пространствах и определения (9) легко следует, что операция векторного умножения в $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ удовлетворяет всем свойствам умножения Ли. Тем самым пространство бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ наделяется структурой алгебр Ли $(\Lambda_2(\mathbb{R}^4), \times)$ с умножением Ли (9).

Из (9) следует, что при $\omega, \tau \in \Lambda^{\pm}$ их векторное произведение в $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ принадлежит тем же пространствам $\Lambda^{\pm}$. Поэтому векторное произведение в шестимерном пространстве $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ является распространением обычного векторного произведения с трехмерных подпространств $\Lambda^{\pm}$. Это наблюдение поясняет выбор символа и названия для операции (9).

Предложение. *Алгебры Ли $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ и $(\Lambda_2(\mathbb{R}^4), \times)$ изоморфны. В качестве изоморфизма можно взять некоторую изометрию евклидовых векторных пространств $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ и $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$.*

Доказательство. Рассмотрим какие-либо изометрии $I_{\pm} : \mathbb{R}^3 \to \Lambda^{\pm}$, сохраняющие ориентации пространств $\mathbb{R}^3$ и $\Lambda^{\pm}$. Определим линейное отображение

$$\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \Lambda_2(\mathbb{R}^4); \quad \Psi(X, Y) := I_+(X) + I_-(Y). \tag{10}$$

Так как для произвольной точки $(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ справедливо

$$|(X, Y)|^2 = |X|^2 + |Y|^2 = |I_+(X)|^2 + (I_-(Y)|^2 =$$
$$= (I_+(X) + I_-(Y))^2 = |\Psi(X, Y)|^2,$$

то отображение Ψ является изометрией. Изометрии $I_\pm$ сохраняют операции векторного произведения в пространствах $\mathbb{R}^3$ и $\Lambda^\pm$, поэтому для Ψ-образа произведения Ли элементов (X_1, Y_1), $(X_2, Y_2) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ выполнено

$$\Psi[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = \Psi(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2) = I_+(X_1 \times X_2) +$$
$$+ I_-(Y_1 \times Y_2) = I_+(X_1) \times I_+(X_2) + I_-(Y_1) \times I_-(Y_2) =$$
$$= (I_+(X_1) + I_-(Y_1)) \times (I_+(X_2) + I_-(Y_2)) = \Psi(X_1, Y_1) \times \Psi(X_2, Y_2).$$

Отсюда следует наше утверждение. □

3.1. Канонический изоморфизм (3) пространства бивекторов на алгебру Ли группы $O(\mathbb{R}^n)$ индуцирует в $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ структуру алгебры Ли с произведением $[,]_\Lambda$ (см. (5)). С другой стороны, на этом пространстве мы определили операцию векторного умножения. Оказывается, что эти операции совпадают.

Теорема. *Для любых $\omega, \tau \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ справедливо равенство*

$$[\omega, \tau]_\Lambda = \omega \times \tau. \tag{11}$$

Доказательство. Из формул (3), (5), (9) следует

$$\begin{gathered} (11) \Longleftrightarrow [\varphi(\omega), \varphi(\tau)] = \varphi(\omega \times \tau) \Longleftrightarrow \\ \omega \llcorner (\tau \llcorner e) - \tau \llcorner (\omega \llcorner e) = (\omega^+ \times \tau^+ + \omega^- \times \tau^-) \llcorner e, \quad \forall e \in \mathbb{R}^4. \end{gathered} \tag{12}$$

Обе части равенства (12) линейны по аргументам e, ω, τ, поэтому достаточно убедиться в его справедливости для элементов некоторого ортонормированного, положительно ориентированного базиса $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ и соответствующих ему бивекторов $e_i \wedge e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Площадки разложимых бивекторов $e_i \wedge e_j$, $e_k \wedge e_m$ либо совпадают, либо вполне ортогональны, либо образуют прямой двугранный угол в некотором трехмерном пространстве объемлющего пространства $\mathbb{R}^4$.

В первом случае (площадки совпадают) бивекторы ω и τ коллинеарны и обе части (12) тривиальным образом обращаются в ноль.

Если площадки простых бивекторов ω и τ вполне ортогональны, то $\tau = \pm * \omega$. Из (6) следует, что для любого $\omega \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ будет

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega + *\omega), \quad \omega^- = \frac{1}{2}(\omega - *\omega). \tag{13}$$

Откуда

$$\omega^+ \times \tau^+ + \omega^- \times \tau^- = \frac{1}{4}[(\omega + *\omega) \times (\tau + *\tau) +$$

$$+ (\omega - *\omega) \times (\tau - *\tau)] = \frac{1}{2}(\omega \times \tau + (*\omega) \times (*\tau)).$$

Значит в рассматриваемом случае правая часть (12) обращается в нуль. Так как вектора $\omega \llcorner e$, $\tau \llcorner e$ принадлежат площадкам простых бивекторов ω, τ, то и левая часть (12) равна нулю.

В третьем случае, удачно выбрав базис e, бивекторы ω и τ можно представить в виде $\omega = e_1 \wedge e_2$, $\tau = e_1 \wedge e_3$. Тогда (см. (7), (13))

$$\begin{gathered}
* \omega = e_3 \wedge e_4, \quad \omega^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} f_1, \quad \omega^- = -\frac{1}{\sqrt{2}} g_1, \\
* \tau = -e_2 \wedge e_4, \quad \tau^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} f_2, \quad \tau^- = \frac{1}{\sqrt{2}} g_2, \\
\omega \llcorner e_1 = e_2, \quad \omega \llcorner e_2 = -e_1, \quad \tau \llcorner e_1 = e_3, \quad \tau \llcorner e_3 = -e_1.
\end{gathered} \tag{14}$$

Так как $f_1 \times f_2 = f_3$ и $g_1 \times g_2 = g_3$, то

$$\omega^+ \times \tau^+ + \omega^- \times \tau^- = e_2 \wedge e_3. \tag{15}$$

Пусть $e = \sum\limits_{i=1}^{4} \lambda^i e_i$. С использованием (14), (15), находим

$$\omega \llcorner (\tau \llcorner e) - \tau \llcorner (\omega \llcorner e) = \omega \llcorner (\tau \llcorner (\lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3)) - \tau \llcorner (\omega \llcorner (\lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3)) =$$

$$= \lambda^2 e_3 - \lambda^3 e_2,$$

$$(\omega^+ \times \tau^+ + \omega^- \times \tau^-) \llcorner e = (e_2 \wedge e_3) \llcorner e = \lambda^2 e_3 - \lambda^3 e_2,$$

откуда вытекает (12). $\square$

3.2. Итак, каноническая изометрия $\varphi : \Lambda_2(\mathbb{R}^4) \to A^-(\mathbb{R}^4)$ (см. (3)) оказалась изоморфизмом алгебры $(\Lambda_2(\mathbb{R}^4), \times)$ и алгебры Ли $(A^-(\mathbb{R}^4), [,])$ ортогональной группы $O(\mathbb{R}^4)$.

Из предложения 2.2 следует изоморфность (этот факт хорошо известен) и изометричность этих алгебр алгебре $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$.

Подпространства Λ^+, Λ^- являются идеалами алгебры $(\Lambda_2(\mathbb{R}^4), \times)$, что непосредственно следует из формулы (9).

Литература

1. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* С.-Петербург, Наука, 1994.
2. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части I, II.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **146**, 84–107 (1997).

Kozlov S. E. and Nikanorova M. Yu. The geometry of the Lie algebra of the orthogonal group $O(\mathbb{R}^4)$.

In the 6-dimensional space $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ of bivectors a Lie product is introduced analogous to the standard vector product in $\mathbb{R}^2$. The Lie algebra constructed is proved to be isomorphic to the Lie algebra of the group of orthogonal transformations $O(\mathbb{R}^4)$. This isomorphism of Lie algebras is a canonical isometry of the space of antisymmetric operators in $\mathbb{R}^4$ onto $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 18 июня 1999 г.