Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

В. Р. Крым

УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА В ОТСУТСТВИЕ МАТЕРИИ НА ПЯТИМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ С КАУЗАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ

1. Введение

В 60-е годы в математике возникло направление, посвященное аксиоматическому описанию отношения причинности. Поскольку отношение причинности играет фундаментальную роль в теории относительности, многие авторы [1–8] занимались построением математических моделей, в которых отношение следования, или частичное упорядочивание, можно было бы интерпретировать как отношение причинности. В рамках этого направления изучались, главным образом, топологические пространства. Попытки разработать аксиоматику, приемлемую для гладких многообразий и обобщающую каузальную структуру общей теории относительности, наталкивались на известные трудности [6, 7].

В настоящее время интенсивное использование расслоенных пространств $M{\times}G$ в физике делает перспективным изучение индефинитных метрик сигнатуры $(+,-,\dots,-,0,\dots,0)$, не зависящих от точки слоя $g \in G$. Причинность в таких пространствах задается выпуклым конусом, содержащим нетривиальное аффинное подпространство – касательное пространство к слою.

В физике часто рассматриваются линейные комбинации вида
$$\sum_{i=0}^{3} a_i \,\frac{\partial}{\partial x^i},$$
где $\partial/\partial x^i =: \partial_i$ – координатные векторные поля на четырехмерном гладком многообразии. В присутствии электромагнитного поля с 4-потенциалом $A_i(x)$, $i = 0,\dots,3$, операторы ∂_i заменяют на $\partial_i - \alpha A_i$, $\alpha = \mathrm{const}$. Такая замена является совершенно стандартной в физике, но она не имеет хорошего математического обоснования. Полученный оператор не является оператором типа дифференцирования (векторным полем), что можно считать недостатком такого подхода.

Этих трудностей можно избежать, если повысить размерность многообразия. На гладком многообразии $M^5 := M^4 \times \mathbb{R}$ можно рассматривать операторы $e_i := \partial_i - A_i \partial_4$ (координата на $\mathbb{R}$ получает обозначение x^4, а соответствующее векторное поле ∂_4). Операторы e_i, $i = 0, \dots, 3$ являются операторами типа дифференцирования, т.е. векторными полями на M^5. В частности, если произвести замену $\partial_i \to e_i$ для оператора Дирака $D = i\hbar \sum_{i=0}^{3} \gamma^i \partial_i$, и рассматривать волновые функции на M^5 вида $\psi(x) = \varphi(x) e^{-iex^4/\hbar}$ (φ не зависит от x^4), то получится модель, эквивалентная классическому уравнению Дирака для электрона во внешнем поле (уравнение $D\psi = m\psi$ эквивалентно уравнению Дирака на указанном классе функций). Применение семейства векторных полей e_i, $i = 0, \dots, 3$, дает возможность рассматривать оператор Дирака, не выходя за пределы римановой геометрии.

Векторные поля e_i задают четырехмерное распределение $\mathbf{A}$ в $TM^5 : \mathbf{A}(x) := \mathrm{Lin}\left\{e_i(x) \mid i = 0, \dots, 3\right\}$. Поскольку

$$[e_i, e_j] = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}\right)\partial_4,$$

это распределение, вообще говоря, не интегрируемо. Тензор $F_{ij} = \partial A_j/\partial x^i - \partial A_i/\partial x^j$ называется тензором напряженности электромагнитного поля. Распределение $\mathbf{A}$ голономно тогда и только тогда, когда электромагнитное поле отсутствует ($F = 0$).

Ранее [9, 10] нами было доказано, что уравнения движения материальной частицы, вектор скорости которой всегда принадлежит распределению $\mathbf{A}$, совпадают с классическими уравнениями движения заряженной частицы. Тем самым мы ввели в геометрию уравнения геодезических для заряженной частицы. Отметим, что при этом была использована только связность Леви–Чивита, т.е. связность без кручения. Базисные векторные поля, определяющие распределение $\mathbf{A}$, отличаются от аналогичной тетрады в стандартной модели физики элементарных частиц, поскольку рассматриваемый нами базис не зависит от метрики.

В настоящей работе вводится еще один новый объект – связность на распределении. Мы докажем, что на распределении $\mathbf{A}$ существует преобразование кривизны, кривизна Риччи и скалярная кривизна. При выборе на многообразии M^5 специальной гладкой структуры [9] и соответствующей группы преобразований координат, на M^5 возникает инвариантный 4-объем. Наличие скалярной кривизны R и 4-объема дает возможность рассмотреть классический функционал $\int R d\sigma$. Варьирование метрики и электромагнитного поля в этом функционале приводит к классическим уравнениям Эйнштейна и к уравнениям Максвелла.

2. Связность на распределении

2.1. Будем рассматривать многообразие $M^5 := M^4 \times \mathbb{R}$ со специальной гладкой структурой [9], в которой допускаются только такие гладкие замены координат $x \to y$, что

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^4} \equiv 0, \quad i = 0, \dots, 3, \quad \frac{\partial y^4}{\partial x^4} = \pm 1.$$

Координата на втором сомножителе в декартовом произведении $M^4 \times \mathbb{R}$ оказывается выделенной этим условием. Однако эта координата не вполне выделена, т.к., вообще говоря, $\partial y^4 / \partial x^i \neq 0$. Ранее [10] было показано, что производные $\left(\partial y^i / \partial x^j\right)_{i,j=0,\dots,3}$ соответствуют обычным заменам координат общей теории относительности, а производные $\left(\partial y^4 / \partial x^i\right)_{i=0,\dots,3}$ – калибровочным преобразованиям. Развиваемая теория инвариантна к этим двум видам преобразований координат.

В работе, посвященной аксиоматическому описанию каузальной структуры (частичного порядка) на многообразиях [9], мы показали, что каузальная структура предопределяет выбор гладкой структуры на многообразии.

Мы предполагаем, что на многообразии M^5 имеется индефинитная метрика $\langle\, , \rangle$ такая, что ее сужение на распределение $\mathbf{A}$ является псевдоримановой метрикой сигнатуры $(+,-,-,-)$: $\langle e_i, e_j \rangle =: g_{ij}$, $i,j = 0,\dots,3$. Матрица $(g_{ij})_{i,j=0,\dots,3}$ невырождена, имеет указанную сигнатуру и не зависит от выделенной координаты x^4. Распределение $\mathbf{A}$ задано векторными полями $e_i(x) := \partial_i - A_i(x)\partial_4$, $i = 0,\dots,3$, $A_i(x)$ – некоторые функции на M^4. Метрика $\langle\, , \rangle$ на M^5 не определяется этим условием однозначно. Например, можно взять

$$\overline{g} = \begin{pmatrix} (g_{ij})_{i,j=0,\dots,3} & \vdots & (-\kappa A_j)_{j=0,\dots,3} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ (-\kappa A_j)^T_{j=0,\dots,3} & \vdots & -2\kappa \end{pmatrix}.$$

Неоднозначность состоит в том, что к каждой строке и столбцу матрицы $\overline{g}$ можно прибавить ковектор $(A_0, A_1, A_2, A_3, 1)$, умноженный на некоторое число. При преобразованиях координат $x \to y$ матрица $\overline{g}$ теряет указанный выше блочный вид, но ее можно вновь привести к блочному виду, используя указанную неоднозначность в определении $\overline{g}$. При преобразовании координат 4-потенциал электромагнитного поля преобразуется по формуле [10]

$$\widetilde{A}_j = \sum_{i=0}^{3} A_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j} + \frac{\partial x^4}{\partial y^j}, \quad j = 0, \dots, 3.$$

Запишем метрический тензор как квадратичную форму:

$$\sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} dx^i dx^j - 2\kappa \Big(\sum_{i=0}^{3} A_i dx^i + dx^4 \Big) dx^4 =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{3} \Big(\sum_{i,j=0}^{3} g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \Big) dy^k \, dy^l -$$

$$-2\kappa \Big(\sum_{k=0}^{3} \widetilde{A}_k dy^k + dy^4 \Big) \Big(\sum_{l=0}^{4} \frac{\partial x^4}{\partial y^l} dy^l \Big).$$

Следовательно, метрический тензор $\overline{g}$ может быть вновь приведен к указанному блочному виду добавлением квадратичной формы

$$2\kappa \Big(\sum_{k=0}^{3} \widetilde{A}_k dy^k + dy^4 \Big) \Big(\sum_{l=0}^{3} \frac{\partial x^4}{\partial y^l} \, dy^l \Big).$$

2.2. Для большей общности, рассмотрим произвольное (векторное) распределение $\mathbf{A}$ на гладком многообразии M.

Ковариантное дифференцирование ∇ на распределении $\mathbf{A}$ в точке $x \in M$ можно определить так же, как и на многообразии [11, стр. 38]. Правило ∇ сопоставляет каждому вектору $u \in T_a M$ и гладкому векторному полю $X \in \mathbf{A}$ вектор $\nabla_u X \in \mathbf{A}(a)$, причем ∇ линейно по обоим аргументам и выполняется обычное тождество дифференцирования произведения векторного поля на функцию: $\nabla_u (fX) = (uf)\, X(a) + f(a) \nabla_u X$.

Ковариантное дифференцирование ∇ называется *линейной связностью* на распределении $\mathbf{A}$, если оно определено на области $U \subset M$ и для любых гладких векторных полей X, Y на распределении $\mathbf{A}$ векторное поле $\nabla_X Y$ гладкое.

Свойства связности на распределении аналогичны свойствам связности на многообразии.

1) Пусть векторные поля X, Y на $\mathbf{A}$ совпадают в некоторой окрестности точки $x \in M$. Тогда $\forall\, u \in T_xM$ $\nabla_u X = \nabla_u Y$.

2) Пусть $\{e_i \mid i = 0, \dots, n\}$ – базисные векторные поля на $\mathbf{A}$ (т.е. они порождают распределение и линейно независимы в каждой точке). Определим символы Кристоффеля:

$$\nabla_{e_i} e_j =: \sum_{k=0}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k, \quad i, j = 0, \dots, n.$$

Пусть

$$X = \sum_{i=0}^{n} X^i\, e_i, \quad Y = \sum_{i=0}^{n} Y^i\, e_i.$$

Тогда

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=0}^{n} X^i \left(e_i Y^j\right) e_j + \sum_{i,j,k=0}^{n} X^i\, Y^j\, \Gamma_{ij}^k e_k.$$

3) Связность на распределении полностью определяется своими символами Кристоффеля. На любом гладком распределении существует связность.

Определение. *Гладкое отображение* $\mathrm{pr} : TM \to \mathbf{A}$ *назовем проекцией на распределение* $\mathbf{A}$, *если для любой точки* $x \in M$ *отображение* $\mathrm{pr}_x : T_xM \to \mathbf{A}(x)$ *линейно и* $\mathrm{pr}_x\big|_{\mathbf{A}(x)} = \mathrm{id}_{\mathbf{A}(x)}$.

Определение. *Пусть* pr *– проекция на распределение* $\mathbf{A}$, ∇ *– связность на* $\mathbf{A}$. *Связность* ∇ *называется симметричной относительно проекции* pr, *или* pr*-симметричной, если для любых гладких векторных полей* X, Y *на распределении* $\mathbf{A}$ *всегда* $\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathrm{pr}([X, Y])$.

4) На любом гладком многообразии с гладким распределением $\mathbf{A}$ и для любой проекции pr на распределение $\mathbf{A}$ существуют pr-симметричные связности на $\mathbf{A}$. Символы Кристоффеля pr-симметричной связности не обязаны быть симметричными.

Пусть на многообразии M имеется билинейное симметричное скалярное произведение $\langle\, ,\, \rangle$, гладко зависящее от точки.

Определение. *Связность ∇ на распределении* **A** *называется согласованной с метрикой $\langle\, ,\,\rangle$, или римановой связностью, если для любых гладких векторных полей X, Y, Z на* **A** *всегда $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.*

Ясно, что при построении римановой связности на распределении достаточно рассматривать только сужение метрического тензора $\langle\, ,\,\rangle$ на это распределение.

5) Пусть сужение метрического тензора $\langle\, ,\,\rangle$ на распределение **A** невырождено (т.е. матрица $g_{ij} := \langle e_i, e_j\rangle$, $i, j = 0, \dots, n$, обратима). Тогда для любой проекции pr на распределение **A** существует единственная pr-симметричная риманова связность на **A**. Она выражается через аналог формулы Кошуля:

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = (X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \mathrm{pr}[X, Z]\rangle) +$$
$$(Y\langle Z, X\rangle - \langle X, \mathrm{pr}[Y, Z]\rangle) - (Z\langle X, Y\rangle - \langle Z, \mathrm{pr}[X, Y]\rangle)\,.$$

Как обычно, с помощью символов Кристоффеля вводится понятие ковариантной производной от векторного поля на распределении **A** вдоль отображения. Оно обладает обычными свойствами.

Если распределение **A** голономно, то введенная таким образом связность совпадает со связностью на соответствующем интегральном подмногообразии.

2.3. Вернемся к рассматриваемому четырехмерному распределению **A** на многообразии $M^5 := M^4 \times \mathbb{R}$ с выбранной гладкой структурой. Для любых двух горизонтальных векторных полей X, Y их скобка Ли $[X, Y] = \sum_{k=0}^{3} c_k e_k + c_4 \partial_4$. Выберем проекцию pr на распределение **A** так, чтобы $\mathrm{pr}(\partial_4) = 0$. Такая проекция существует и единственна. Тогда $\mathrm{pr}[e_i, e_j] = 0$, $i, j = 0, \dots, 3$, и символы Кристоффеля римановой pr-симметричной связности имеют вид

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{3} g^{ks} \left(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij}\right) \quad (i, j, k = 0, \dots, 3).$$

3. Преобразование кривизны распределения

3.1. Рассмотрим снова более общую ситуацию. Пусть имеется распределение **A** на многообразии M, и пусть связность $\nabla_X Y$ на распределении **A** определена для произвольных векторных полей X, не обязательно горизонтальных.

Определение. *Пусть M – гладкое многообразие, $\mathbf{A}$ – распределение на M, ∇ – связность на распределении, продолженная по первому аргументу. Для каждой точки $x \in M$ и любых векторов u, $v \in \mathbf{A}(x)$ преобразованием кривизны распределения $\mathbf{A}$ назовем отображение $R(u,v) : \mathbf{A}(x) \to \mathbf{A}(x)$, действующее по правилу $R(u,v)w := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$, где X, Y, Z – любые гладкие векторные поля на распределении $\mathbf{A}$, удовлетворяющие условию $X(x) = u$, $Y(x) = v$, $Z(x) = w$.*

Легко проверяется, что это определение не зависит от выбора векторных полей X, Y, Z.

Преобразование кривизны распределения $\mathbf{A}$ имеет обычные алгебраические свойства. Оно трилинейно и выполняются следующие четыре тождества:

1) $R(u,v)w = -R(v,u)w$.

2) Если связность ∇ на распределении $\mathbf{A}$ симметрична относительно проекции pr и существует базис $\{e_i(x) \mid i = 0, \dots, n\}$ распределения $\mathbf{A}$, в котором $\mathrm{pr}[e_i, e_j] = 0$, $i, j = 0, \dots, n$, то $R(u,v)w + R(v,w)u + R(w,u)v = 0$. Доказательство аналогично [11, стр. 89].

3) Если связность ∇ на распределении $\mathbf{A}$ риманова, то $\langle R(u,v)w, z \rangle = -\langle R(u,v)z, w \rangle$. Для доказательства достаточно переставить векторы u, v в правой части равенства по свойству (1), дважды воспользоваться римановостью и затем – определением скобки Ли.

4) Если выполнены условия (2, 3), то

$$\langle R(u,v)w, z \rangle = -\langle R(w,z)u, v \rangle.$$

Замечание. На многообразиях преобразование кривизны можно определять через параллельный перенос вектора вдоль границы некоторой двумерной поверхности. На неголономном распределении этого сделать нельзя, так как существование такой поверхности равносильно интегрируемости в соответствующем двумерном направлении. Кроме того, при таком подходе не ясно, как определять параллельный перенос на распределении. Хотелось бы, чтобы вектор скорости допустимой геодезической γ был параллелен вдоль γ. Мы видели в [10], что решение соответствующего дифференциального уравнения зависит не только от начальной точки и вектора скорости, но и от заряда. Это обстоятельство делает маловероятной возможность содержательного определения параллельного переноса вдоль пути на распределении.

3.2. Вернемся к рассматриваемому четырехмерному распределению $\mathbf{A}$ на M^5. Базис распределения $\mathbf{A}$ имеет вид $e_i = \partial_i - A_i\partial_4$, $i = 0,\dots,3$. Проекция pr определяется следующим образом: $\mathrm{pr}(\partial_i) := e_i$, $i = 0,\dots,3$; $\mathrm{pr}(\partial_4) := 0$. Символы Кристоффеля римановой pr-симметричной связности в этом базисе имеют вид:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{3} g^{ks}\left(\partial_i g_{js} + \partial_j g_{si} - \partial_s g_{ij}\right) \quad (i,j,k = 0,\dots,3).$$

Продолжим эту связность следующим образом. Пусть векторное поле Y не зависит от x^4. Тогда

$$\nabla_{\partial_4} Y = \sum_{j,k=0}^{3} Y^j \Gamma^k_{4j}\, e_k,$$

где

$$\Gamma^k_{4j} = \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{3} g^{ks}\left(\partial_j \overline{g}_{s4} - \partial_s \overline{g}_{4j}\right) = \frac{\kappa}{2} F^k_j.$$

Для четырехмерных тензоров на распределении $\mathbf{A}$ мы будем придерживаться обычных правил подъема и опускания индексов. Но на всем касательном расслоении риманова изоморфизма нет.

Теперь мы можем записать тензор кривизны распределения $\mathbf{A}$ в выбранном базисе. Занумеруем аргументы преобразования кривизны в соответствии с исторической традицией:

$$R(u,v)w =: \sum_{i,j,k,l=0}^{3} w^j\, u^k\, v^l\, R^i_{jkl} e_i.$$

Непосредственное вычисление дает:

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \sum_{s=0}^{3}\left(\Gamma^s_{lj}\,\Gamma^i_{ks} - \Gamma^s_{kj}\,\Gamma^i_{ls}\right) + \frac{\kappa}{2} F_{kl}\, F^i_j.$$

Отметим, что последнее слагаемое возникает в результате дифференцирования векторного поля e_j по коммутатору $[e_k, e_l] = -F_{kl}\,\partial_4$.

Выпишем тензор Риччи:

$$R_{jl} = \sum_{i=0}^{3} R^i_{jil} =$$
$$= \sum_{i=0}^{3} \left(\partial_i \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{ij} + \sum_{s=0}^{3} \left(\Gamma^s_{lj}\, \Gamma^i_{is} - \Gamma^s_{ij}\, \Gamma^i_{ls} \right) \right) + \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{3} F_{il}\, F^i_j.$$

Это выражение удобно записать в виде

$$R_{jl} = R^{\mathrm{St}}_{jl} + \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{3} F_{il}\, F^i_j,$$

где R^{St}_{jl} – стандартное выражение для кривизны Риччи в метрике $(g_{ij})_{i,j=0,\dots,3}$, R_{jl} – кривизна Риччи распределения **A**. Тензор Риччи симметричен по отношению к перестановке индексов.

Скалярная кривизна распределения **A** равна

$$R := \sum_{j,l=0}^{3} g^{jl}\, R_{jl} = R^{\mathrm{St}} + \frac{\kappa}{2} \sum_{i,j=0}^{3} F_{ij}\, F^{ij},$$

где R^{St} – стандартное выражение для скалярной кривизны в данной точке.

Все построенные кривизны полностью инвариантны относительно группы преобразований 3.6 из [10], т.е. релятивистски инвариантны, калибровочно инвариантны и не меняются при смене ориентации коордиаты x^4.

4. Интеграл на распределении

Наша цель – распространить понятие объема на распределение **A**. Не будем решать эту задачу в общем виде, а ограничимся только интересующим нас четырехмерным распределением на пятимерном многообразии с указанной гладкой структурой.

Преобразование базиса четырехмерного распределения A при замене координат в M^5**.** В разделе 3.4 статьи [10] было показано, что при замене координат $x \to y$ формула замены базиса

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} - A_i \frac{\partial}{\partial x^4}, \quad i = 0, \dots, 3,$$

имеет вид

$$e_i = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\, \widetilde{e}_j, \quad \text{где} \quad \widetilde{e}_j = \frac{\partial}{\partial y^j} - \widetilde{A}_j\, \frac{\partial}{\partial y^4},\ j = 0, \dots, 3.$$

Итак, векторы e_i, $i = 0, \dots, 3$, преобразуются как базисные векторы четырехмерного пространства общей теории относительности.

Следствие. *Дифференциальная форма* $\sqrt{-\det g}\, dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, *где* $g = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=0,\dots,3}$, *инвариантна к преобразованиям координат на* M^5, *сохраняющим ориентацию. Назовем ее 4-объемом на распределении* $\mathbf{A}$.

Если $f : M^5 \to R$ – измеримая функция, то определен (инвариантный) интеграл на распределении $\mathbf{A}$:

$$\int\limits_{\Omega} f d\sigma := \int\limits_{h(\Omega)} f(h^{-1}(x))\sqrt{-\det g(x)}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

где $\Omega \subset M^5$, h-карта. Значение этого интеграла не зависит от выбора карты h.

В техническом отношении этот интеграл ничем не отличается от обычного интеграла по форме объема на четырехмерном (псевдо)римановом многообразии. В частности, имеет место теорема Гаусса.

5. Вариационный принцип для распределения

5.1. Определим действие для поля, как это принято в общей теории относительности: $S := \int_\Omega R d\sigma$. По доказанному в разделе 3.2, $S = \int_\Omega \left(R^{\mathrm{St}} + \kappa/2 \sum_{i,j=0}^{3} F_{ij}\, F^{ij}\right) d\sigma$. Стандартное выражение для скалярной кривизны содержит вторые производные от метрики, что неудобно. Используя теорему Гаусса, этот интеграл можно преобразовать к виду

$$\overline{S} = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j,k,l=0}^{3} g^{ik} \left(\Gamma^j_{il}\, \Gamma^l_{kj} - \Gamma^l_{ik}\, \Gamma^j_{lj}\right) + \frac{\kappa}{2} \sum_{i,j=0}^{3} F_{ij}\, F^{ij} \right) d\sigma.$$

Если вариация поля на $\partial\Omega$ равна нулю, то вариационные принципы для S и $\overline{S}$ эквивалентны [12, стр. 346].

5.2. Приравнивая нулю вариацию по метрике, получим классические уравнения Эйнштейна в присутствии электромагнитного поля:

$$R_{ik}^{\mathrm{St}} - \frac{1}{2}\, g_{ik} R^{\mathrm{St}} + \kappa \left(\sum_{l=0}^{3} F_{il}\, F_k^l - \frac{1}{4} \sum_{l,j=0}^{3} F_{lj}\, F^{lj}\, g_{ik} \right) = 0, \quad i,k = 0,\ldots,3.$$

Теперь ясно, что введенная нами в метрический тензор $\overline{g}$ постоянная κ только множителем $1/(4\pi c^2)$ отличается от гравитационной постоянной Эйнштейна.

5.3. Приравнивая нулю вариацию по 4-потенциалу, получим уравнения Максвелла в пустоте:

$$\sum_{s=0}^{3} \partial_s \left(\sqrt{-\det g}\, F^{sk} \right) = 0, \quad k = 0,\ldots,3.$$

Такой "одновременный" вывод уравнений Эйнштейна и Максвелла показывает, что нами построена объединенная теория гравитационных и электромагнитных взаимодействий. В физике для этого пришлось бы рассматривать сумму действия для гравитационного поля и действия для электромагнитного поля. Аддитивность действия ни из чего не следует и является довольно искусственным дополнительным постулатом.

5.4. Уравнениям Эйнштейна 5.2 можно придать другую форму. Перепишем их с помощью тензора Риччи и скалярной кривизны распределения $\mathbf{A}$. Тогда

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik} R = -\frac{\kappa}{2} \sum_{s=0}^{3} F_{is}\, F_k^s, \quad i,k = 0,\ldots,3.$$

Возникает вопрос, каков геометрический смысл принципа экстремальности действия. С геометрической точки зрения было бы более естественно, если бы уравнения гравитационного поля имели вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik} R = 0, \quad i,k = 0,\ldots,3$$

(электромагнитное поле входит в эти уравнения, см. 3.2). Эти уравнения означают, что тензор Риччи пропорционален скалярной кривизне. Иными словами, в каждой точке многообразия M^5 распределение $\mathbf{A}$ не имеет никаких "боковых" напряжений, различных по разным направлениям. Распределение **A** настолько близко к пространству постоянной кривизны (локально), насколько это возможно [13,14].

Литература

1. Ю. Б. Румер, *Исследования по 5-оптике.* Москва, 1956.
2. А. Д. Александров, *A contribution to chronogeometry.* — Canad. J. Math. **19** (1967), 1119–1128.
3. А. Д. Александров, *Конусы с транзитивной группой.* — ДАН СССР **189**(4) (1969), 695–698.
4. E. C. Zeeman, *Causality implies the Lorentz group.* — J. Math. Phys. **5** (1964), 490–493.
5. H. Busemann, *Timelike spaces.* — Rozprawy Matematyczne No. 53 (1967), 5–50.
6. Р. И. Пименов, *Пространства кинематического типа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **6** (1968), 1–498.
7. Р. И. Пименов, *Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка.* Сыктывкар.
8. В. Я. Крейнович, *К проблеме метризации пространств кинематического типа.* — ДАН СССР **218**(6) (1974), 1272–1275.
9. В. Р. Крым, *Гладкие многообразия кинематического типа.* — Теор. и матем. физика **119**(2) (1999), 264–281.
10. В. Р. Крым, *Уравнения геодезических для заряженной частицы в объединенной теории гравитационных и электромагнитных взаимодействий.* — Теор. и матем. физика **119**(3) (1999), 511–522.
11. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* СПб., 1994.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Теория поля.* Москва, 1988.
13. А. З. Петров, *Пространства Эйнштейна.* Москва, 1961.
14. А. З. Петров, *Новые методы в общей теории относительности.* Москва, 1966.

Krym V. R. The Einstein equations in the absence of matter fields on a 5-manifold with the causal structure.

We consider a 5-manifold with restricted smooth structure and appropriate group of coordinate transfirmations which includes general relativity and gauge transformations. An explicit expression for the Riemannian curvature of a 4-dimensional vector distribution leads to classical Einstein and Maxwell equations.

С.-Петербургский
государственный
аграрный университет

Поступило 3 июня 1999 г.