Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

А. И. Курносенко

ИНВЕРСНЫЙ ИНВАРИАНТ ПАРЫ ОКРУЖНОСТЕЙ

К вводимому здесь понятию *инварианта пары окружностей* автора привели различные задачи с плоскими кривыми. Так, с его использованием, хотя и без явного определения, в статье [1] сформулированы условия, сопровождающие монотонность кривизны плоской кривой. Близкой по содержанию величиной является *инверсное расстояние* δ, определяемое для пары *непересекающихся* окружностей [2, 3]. Если a и b – их радиусы, c – межцентровое расстояние, и их можно инвертировать в пару концентричных окружностей радиусов r_1 и r_2, либо в прямую и окружность радиуса r_0 с центром на расстоянии d от прямой, то

$$\delta = \operatorname{Arch}\left|\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right| = \ln\frac{\max(r_1,r_2)}{\min(r_1,r_2)} = \ln\frac{d}{r_0}. \qquad (1)$$

По-видимому, впервые инверсное расстояние было введено Г. С. М. Коксетером в [3]: *"The object of this note is to encourage use of inversive distance, which is a number determined by two non-intersecting circles in such a way as to be additive (like ordinary distance) for three circles belonging to a (non-intersecting) pencil, and invariant under the group generated by inversions."*

Мотивация данной статьи практически совпадает с процитированными намерениями проф. Коксетера – *"to encourage use of ..."*. Инверсный инвариант в предлагаемой здесь версии определяется для любой пары прямых и окружностей и учитывает их ориентацию. Эффективность его применения мы продемонстрируем на нескольких примерах.

Основные определения. Под окружностью $\mathcal{K}_i$ на канонически ориентированной плоскости будем понимать *ориентированную кривую постоянной кривизны* и определять ее четверкой параметров – координатами начальной точки $P_i = (x_i, y_i)$, направлением τ_i касательной в этой точке и кривизной κ_i:

$$\mathcal{K}_i(x_i, y_i, \tau_i, \kappa_i).$$

Формулы для описания инверсии, сопряжения дуг и т. п. воспринимут случай $\kappa = 0$ как ординарный (и не потребуют даже предельного перехода), если от традиционных уравнений окружности перейти к неявному уравнению *линии постоянной кривизны*

$$C(x,y;\mathcal{K}_1) := \kappa_1\left[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2)\right] + \\ + 2(x-x_1)\sin\tau_1 - 2(y-y_1)\cos\tau_1 = 0. \tag{2}$$

Уравнение окружности $A(x^2+y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0$ приводится к виду (2) нормировкой (делением на $\pm\sqrt{B^2+C^2-AD}$).

Полагая $\mathcal{K} = K(0,0,0^\circ,\kappa)$, получим "каноническое уравнение линии постоянной кривизны" и его явное представление в окрестности начала координат:

$$\kappa(x^2+y^2) - 2y = 0, \qquad y(x) = \frac{\kappa\, x^2}{1+\sqrt{1-\kappa^2\, x^2}}. \tag{3}$$

Вектор $\mathbf{u}_i = \|U_i, V_i\|$,

$$U_i = \kappa_i x_i - \sin\tau_i, \quad V_i = \kappa_i y_i + \cos\tau_i \tag{4}$$

не зависит от произвола в выборе начальной точки на кривой (2): при $\kappa = 0$ вектор $\mathbf{u}$ есть орт нормали к прямой, в противном случае $\mathbf{u}/\kappa$ есть радиус-вектор центра окружности. Во всех точках, кроме центра, выполняется неравенство

$$(\kappa_1 x-U_1)^2 + (\kappa_1 y-V_1)^2 \equiv \kappa_1 C(x,y;\mathcal{K}_1) + 1 > 0. \tag{5}$$

Расстояние D от произвольной точки $P = (x,y)$ до окружности $\mathcal{K}_1$ равно

$$D(P;\mathcal{K}_1) = \frac{C(P;\mathcal{K}_1)}{1+\sqrt{1+\kappa_1 C(P;\mathcal{K}_1)}}. \tag{6}$$

Рис. 1.

Знак величин D и C отражает расположение точки слева ($C < 0$) или справа ($C > 0$) от окружности. В отличие от понятий "внутренность" и "внешность" круга, понятия "слева" и "справа" более подходят для задач ориентированной геометрии, в частности, моделирования твердых тел. Так, если кривая $\mathbf{r}(s) = \|x(s), y(s)\|$ является контуром плоской детали, и направление обхода контура зафиксировано так, чтобы вектор нормали $\|-y'_s, x'_s\|$ совпал с вектором давления (пальцем) на деталь, то понятия "слева–справа" станут синонимами понятий "материал–воздух" (рис. 1). Положительная и отрицательная кривизна будут соответствовать участкам типа "вал–отверстие", равно как случай $\kappa = 0$ – неприменимости этих понятий. Итак, определим *область материала*:

$$\mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}) := \{(x, y) : C(x, y; \mathcal{K}) \leqslant 0\}. \tag{7}$$

Это определение заменит конструкцию "внутренность круга, если $\kappa > 0$, область слева от прямой, если $\kappa = 0$, или внешность круга, если $\kappa < 0$".

Для окружности $\mathcal{K}_i$ определим *реверсную окружность* $\mathcal{K}_i^* = K(x_i, y_i, \tau_i + \pi, -\kappa_i)$, имеющую ту же границу, но противоположную кривизну. "Область воздуха" окружности $\mathcal{K}_i$ есть область материала $\mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_i^*)$ реверсной окружности.

На рис. 2 показана спираль Корню с возрастающей кривизной и порождаемое ею семейство ориентированных кругов кривизны $\mathcal{K}(s)$. Наблюдаемая вложенность множеств в терминах (7) описывается следующим образом (теорема 2):

$$s_2 > s_1 \Longrightarrow \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}(s_2)) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}(s_1)).$$

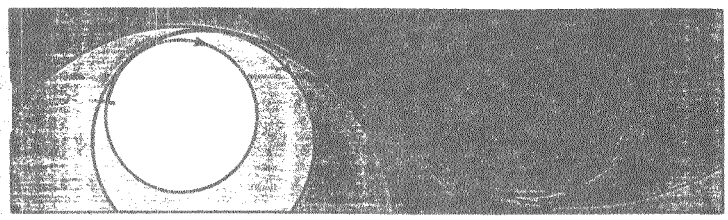

Рис. 2.

Радикальная ось пары окружностей определяется в [2] как геометрическое место точек, степень которых относительно обеих данных окружностей одинакова.

Напомним, что степенью точки P относительно окружности $\mathcal{K}$ радиуса R с центром в точке O называется величина $|OP|^2{-}R^2$. Легко убедиться, что она равна $C(P;\mathcal{K})/\kappa$. Радикальную ось можно также определить как прямую, проходящую через общие точки обеих окружностей. Даже если общие точки мнимые, содержащая их прямая и лежащая на ней средняя точка действительны. Неявное уравнение оси имеет вид

$$\kappa_1 C(x,y;\mathcal{K}_2) - \kappa_2 C(x,y;\mathcal{K}_1) = 0. \tag{8}$$

Она пересекается с общим перпендикуляром пары в точке

$$\|\hat{x},\hat{y}\| = \frac{\kappa_1\mathbf{u}_1{+}\kappa_2\mathbf{u}_2 - (\kappa_1\mathbf{u}_2{+}\kappa_2\mathbf{u}_1)(1{-}2Q)}{H^2}.$$

Здесь H^2 и Q – инварианты, к определению которых мы и переходим.

Инварианты пары окружностей. Для пары окружностей $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ введем обозначения $\|\Delta x,\Delta y\| = \|x_2{-}x_1,\, y_2{-}y_1\|$ и определим величины

$$\begin{aligned} F\ &= \kappa_1\kappa_2\Delta x + \kappa_2\sin\tau_1 - \kappa_1\sin\tau_2 = \kappa_1 U_2 - \kappa_2 U_1,\\ G\ &= \kappa_1\kappa_2\Delta y - \kappa_2\cos\tau_1 + \kappa_1\cos\tau_2 = \kappa_1 V_2 - \kappa_2 V_1,\\ H^2 &= F^2 + G^2. \end{aligned} \tag{9}$$

При $\kappa_{1,2}\neq 0$ вектор $\|F,G\|$ коллинеарен вектору $\mathbf{d}$, соединяющему центры окружностей:

$$\|F,G\| = \kappa_1\kappa_2\cdot\|\mathbf{u}_2/\kappa_2{-}\mathbf{u}_1/\kappa_1\| = \kappa_1\kappa_2\mathbf{d} \implies H^2 = |\kappa_1\kappa_2\mathbf{d}|^2.$$

Если, например, $\kappa_1 = 0$, то вектор $\|F,G\|$ перпендикулярен прямой $\mathcal{K}_1$:

$$\|F,G\| = \kappa_2{\cdot}\|\sin\tau_1, -\cos\tau_1\| \implies H^2 = \kappa_2^2.$$

Таким образом, если $H^2\neq 0$, то существует (и единственен) общий перпендикуляр к двум окружностям, и вектор $\|F,G\|$ определяет его направление. Величина H^2 не зависит от выбора системы координат и является инвариантом данной *пары окружностей* относительно поворота и переноса. Наконец, введем инвариант

$$Q(\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2) = \frac{\kappa_1\kappa_2}{4}(\Delta x^2{+}\Delta y^2){+}\frac{\kappa_2}{2}(\Delta x\sin\tau_1{-}\Delta y\cos\tau_1){-}$$

$$-\frac{\kappa_1}{2}(\Delta x \sin\tau_2 - \Delta y \cos\tau_2) + \sin^2\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}. \tag{10}$$

Подстановками (9) проверяется соотношение

$$H^2 = 4\kappa_1\kappa_2 Q + (\kappa_2 - \kappa_1)^2. \tag{11}$$

Независимость Q от выбора начальных точек и системы координат при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ очевидна из определения $[\tau_{1,2}(s) = \mathrm{const}_{1,2}]$, при $\kappa_1\kappa_2 \neq 0$ она следует из (11); в ситуации $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 \neq 0$ получим $2Q = 1+2\kappa_2 D$, где D – расстояние (6) от центра окружности $\mathcal{K}_2$ до прямой $\mathcal{K}_1$. Для $Q(\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j)$ и других функций пары окружностей будем использовать обозначения типа Q_{ij} или просто Q, если пара заранее оговорена.

Пару, для которой $H^2 = 0$, назовем вырожденной. Это либо пара прямых, либо пара концентричных окружностей.

Решая систему двух уравнений типа (2) в поисках точек пересечения невырожденной пары окружностей, мы получим, что их координаты выражаются через $\sqrt{Q(1-Q)}$, т.е. окружности могут иметь общую точку только при $0 \leqslant Q \leqslant 1$. Выберем ее в качестве начальной для обеих окружностей. Тогда разность $\tau_2 - \tau_1$ равна $\Delta\tau_{12}$ – углу между касательными в общей точке, $\Delta x = \Delta y = 0$, и

$$Q_{12} = Q_{21} = \sin^2(\Delta\tau_{12}/2), \quad 1-2Q = \cos\Delta\tau_{12}. \tag{12}$$

Эти соотношения проясняют геометрический смысл введенного инварианта. Они справедливы и в том случае, когда окружности не имеют действительных общих точек (угол пересечения чисто мнимый, $\Delta\tau_{12} = i\delta$ (1), $\cos\Delta\tau_{12} < -1$ или $\cos\Delta\tau_{12} > 1$). Из сохранения углов при инверсии следует, что инвариант Q сохраняется также при инверсии пары $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ относительно произвольной третьей окружности $\mathcal{K}_0$. Это дает основания назвать Q *инверсным инвариантом пары ориентированных окружностей.*

Под касанием кривых будем понимать сохранение направления касательной в общей точке. В этом смысле пары окружностей на последнем фрагменте рис. 1 не касаются. Эту ситуацию будем называть "антикасанием". Таким образом, $Q = 0$, если окружности касаются ($\Delta\tau_{12} = 0$); окружности пересекаются, если $0 < Q < 1$; случай $Q = 1$ соответствует антикасанию ($\Delta\tau_{12} = \pm\pi$). Для пары прямых всегда $0 \leqslant Q \leqslant 1$, предельные значения соответствуют параллельности и антипараллельности.

В остальных случаях общих точек нет, и взаимное расположение окружностей можно описать следующим образом: если $Q < 0$, то при сближении окружностей их пересечению будет предшествовать касание, если же $Q > 1$ – антикасание.

Легко убедиться в справедливости равенств

$$Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = 1 - Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2^*) = 1 - Q(\mathcal{K}_1^*, \mathcal{K}_2) = Q(\mathcal{K}_1^*, \mathcal{K}_2^*).$$

Инверсия. Пусть точка $P_1 = (x_1, y_1)$ и окружность $\mathcal{K}_1$ при инверсии относительно окружности $\mathcal{K}_0$ преобразуются в точку $P_2 = (x_2, y_2)$ и окружность $\mathcal{K}_2$. Обычно инверсия определяется равенством $|OP_1|\cdot|OP_2| = R^2$, где O и R – центр и радиус окружности инверсии (и условием расположения точки и ее образа на одном радиальном луче). Подстановка $R^2 = 1/\kappa_0^2$, $|OP_i| = \sqrt{1+\kappa_0 C_i}/|\kappa_0|$, где $C_i = C(P_i; \mathcal{K}_0)$, дает соотношение

$$C_1 + C_2 = -\kappa_0 C_1 C_2,$$

включающее и случай $\kappa_0 = 0$. Преобразование $(x_1, y_1, \tau_1) \to (x_2, y_2, \tau_2)$ может быть записано в виде

$$\|x_2, y_2\| = \frac{\|x_1, y_1\| + C_1\|U_0, V_0\|}{1+\kappa_0 C_1},$$

$$\tau_2 = -\tau_1 - 2\operatorname{arctg}\frac{\kappa_0 x_1 - U_0}{\kappa_0 y_1 - V_0}, \qquad (13)$$

дающем при $\kappa_0 = 0$ симметричное отражение.

Пусть $\Gamma_1 := (x_1(s), y_1(s))$ – гладкая кривая с натуральным уравнением $\kappa_1(s)$. Она порождает семейство кругов кривизны $\mathcal{K}(s) = (x_1(s), y_1(s), \tau_1(s), \kappa_1(s))$ (рис. 2). Определим на кривой Γ_1 функции относительно произвольной окружности $\mathcal{K}_0$:

$$C(s) = C(x_1(s), y_1(s); \mathcal{K}_0) \quad \text{и} \quad Q(s) = Q(\mathcal{K}(s), \mathcal{K}_0). \qquad (14)$$

При инверсии (13) кривая Γ_1 преобразуется в кривую $\Gamma_2 := (x_2(s), y_2(s))$, для которой s уже не будет натуральным параметром (кроме частного случая $\kappa_0 = 0$). Для ее дифференциала дуги $\mathrm{d}\sigma$ и функции кривизны получим

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}s} = \sqrt{\mathbf{d}x^2 + \mathbf{d}y^2} = \frac{1}{1+\kappa_0 C(s)},$$

$$\kappa_2(s) = \frac{y_2'' x_2' - x_2'' y_2'}{({x_2'}^2 + {y_2'}^2)^{3/2}} = 2\kappa_0[1 - 2Q(s)] - \kappa_1(s) \qquad (15)$$

(f' обозначает производную по s). В частности, для окружности $\mathcal{K}_1$ и ее образа $\mathcal{K}_2$

$$\kappa_2 = 2\kappa_0(1 - 2Q_{01}) - \kappa_1. \tag{16}$$

По отношению к $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ окружность $\mathcal{K}_0$, преобразующая две данные окружности друг в друга, является *серединной окружностью* [2, стр. 150]. Она делит пополам угол τ_{12} (12), т.е. $|\tau_{01}| = |\tau_{02}| = |\tau_{12}|/2$, $\cos\tau_{01} = \cos\tau_{02}$, из чего следуют соотношения

$$Q_{02} = Q_{01}, \quad Q_{12} = 4Q_{01}(1-Q_{01}).$$

Комбинируя с (16), получим кривизну серединной окружности (с точностью до реверса):

$$\kappa_0 = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{\pm 2\sqrt{1-Q_{12}}}.$$

Известно, что таких окружностей две (если $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ пересекаются) или одна. Если же учитывать ориентацию данных окружностей, то серединная окружность либо единственна, либо не существует. В последнем случае существует окружность, преобразующая $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_2^*$. Отметим, как просто в терминах (2) выражаются уравнения серединных окружностей:

$$\begin{matrix}\mathcal{K}_1 \leftrightarrow \mathcal{K}_2\\ \mathcal{K}_1^* \leftrightarrow \mathcal{K}_2^*\end{matrix} : \frac{C(x,y;\mathcal{K}_1) + C(x,y;\mathcal{K}_2)}{\pm 2\sqrt{1-Q_{12}}};$$

$$\begin{matrix}\mathcal{K}_1 \leftrightarrow \mathcal{K}_2^*\\ \mathcal{K}_1^* \leftrightarrow \mathcal{K}_2\end{matrix} : \frac{C(x,y;\mathcal{K}_1) - C(x,y;\mathcal{K}_2)}{\pm 2\sqrt{Q_{12}}}.$$

Собственная система координат пары окружностей. Для пары $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ рассмотрим уравнение относительно r

$$Q = (1 - \kappa_1 r)(1 - \kappa_2 r). \tag{17}$$

Оно может не иметь корней ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$), имеет один (в конфигурации прямая–окружность) или два ($\kappa_1\kappa_2 \neq 0$) действительных корня $r_{1,2}$. Для концентричных окружностей $r_1 = r_2$. Пусть r – любой его корень. Тогда (11) примет вид $H^2 = (\kappa_1+\kappa_2-2\kappa_1\kappa_2 r)^2$. *Определим* H следующим образом:

$$H = \kappa_1 + \kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_2 r. \tag{18}$$

При наличии двух корней $r_{1,2}$ $H(r_1) = -H(r_2)$; в противном случае $H = \kappa_i \neq 0$, где индекс i соответствует окружности с ненулевой кривизной. Для невырожденной пары введем новую систему координат (x', y') подстановками

$$\begin{cases} x = \widetilde{x} + x'\cos\theta - y'\sin\theta, \\ y = \widetilde{y} + x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{cases} \qquad \|\widetilde{x}, \widetilde{y}\| = \frac{\mathbf{u}_2(1-\kappa_1 r) + \mathbf{u}_1(1-\kappa_2 r)}{H},$$

$$\cos\theta = F/H, \qquad \sin\theta = G/H. \tag{19}$$

Ее ось абсцисс совпадает с общим перпендикуляром пары, а точки $(r, 0)$ и $(-r, 0)$ могут быть выбраны в качестве начальных. Тогда описания окружностей примут вид

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1 = K\left(r, 0, \frac{\pi}{2}, \kappa_1\right), \qquad C(x, y; \mathcal{K}_1) = \kappa_1[\,(x-r)^2 + y^2] + 2(x-r), \\ &\mathcal{K}_2 = K\left(-r, 0, -\frac{\pi}{2}, \kappa_2\right), \quad C(x, y; \mathcal{K}_2) = \kappa_2[(x+r)^2 + y^2] - 2(x+r). \end{aligned} \tag{20}$$

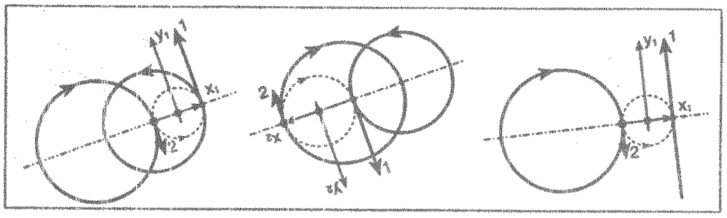

Рис. 3.

Геометрически этому соответствует следующее построение (рис. 3). Из точек пересечения окружностей с их общим перпендикуляром составим пары (P_1, P_2), $P_1 \in \mathcal{K}_1$, $P_2 \in \mathcal{K}_2$, с противоположно направленными касательными векторами. Таких пар две $(\kappa_1\kappa_2 \neq 0)$ или одна. Если их две – выберем любую. Начало системы координат установим в точке $(P_1{+}P_2)/2$, ось ординат направим параллельно касательной к первой окружности в точке P_1 и доопределим направление оси абсцисс до правой системы. Заметим, что окружность с кривизной $\kappa_0 = 1/r$ и центром в начале координат касается обеих данных окружностей.

Уравнение радикальной оси (8) в системе координат (19)

$$x' = d, \quad \text{где} \quad d := \frac{r(\kappa_2 - \kappa_1)}{H}. \tag{21}$$

Докажем следующее утверждение: *если кривизны пары окружностей не равны нулю одновременно, то*

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) \leqslant 0 \\ \kappa_1 \leqslant \kappa_2 \end{array} \right. \Longrightarrow \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_2) \subseteq \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_1). \tag{22}$$

Доказательство. Представление (20), введенное для невырожденной пары, очевидно, легко распространить и на пару концентричных окружностей.

При $Q \leqslant 0$ из (17) следует, что $r \neq 0$. Записав (17) в виде $r^2(\kappa_0 - \kappa_1)(\kappa_0 - \kappa_2) \leqslant 0$, где $\kappa_0 = 1/r$, получим: $\kappa_1 \leqslant \kappa_0 \leqslant \kappa_2$. Пусть точка $(x, y) \in \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_2)$, т. е. $C(x, y; \mathcal{K}_2) \leqslant 0$. Ее принадлежность к $\mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_1)$ следует из тождества

$$C(x, y; \mathcal{K}_1) \equiv (\kappa_1 - \kappa_0)[(x-r)^2 + y^2] + (\kappa_0 - \kappa_2)[(x+r)^2 + y^2] + C(x, y; \mathcal{K}_2),$$

в правой части которого все слагаемые неотрицательны, и $C(x, y; \mathcal{K}_1) \leqslant 0$. $\square$

В том же предположении ($|\kappa_1| + |\kappa_2| \neq 0$) справедливо аналогичное утверждение

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) > 1 \\ \kappa_1 + \kappa_2 > 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_2) \cap \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_1) = \emptyset, \tag{23}$$

а также утверждения, обратные (22) и (23).

Задача о сопряжении трех дуг. Задача построения дуги заданного радиуса, касающейся двух данных окружностей, излагается во многих инженерных справочниках. В книгах по геометрии ее, видимо, пропускают как слишком простую (начиная как минимум с задачи Аполлония о четырех окружностях). Тем не менее у нас есть основания обратиться к этой задаче.

- При ее решении скорее всего была бы применена инверсия, преобразующая данную пару в пару окружностей одинакового радиуса, после чего построение становится тривиальным. Но инверсия "не признает" центров окружностей, и связанные с ними свойства теряются.

- Новые качества возникают при учете ориентации и очередности окружностей при обходе контура, что весьма важно для задач геометрического моделирования. Оказывается, что максимальное количество решений сокращается в этом случае с восьми до двух. Из них только одно будет “истинным” сопряжением, если под таковым подразумевать переходную дугу с углом $|\rho| < 180°$.

- И алгоритмы, и геометрические описания решений освобождаются при этом от многочисленных if-then-else-конструкций, перебирающих варианты взаимного расположения окружностей (например, “внешнее” и “внутреннее” касание) и вырождения одной из них в прямую. Эта информация передается через значение и знак кривизны, известный конструктору в терминах “вал–отверстие”.

- Наконец, интересна связь решений задачи с теоремой о четырех вершинах простой замкнутой кривой. Легко показать, что при циклическом сопряжении четырех окружностей без самопересечения каждая из четырех дуг будет *“протяженной вершиной”* [1, стр. 4]. Иными словами, будут выполнены неравенства

$$\kappa_1 < \kappa_2 > \kappa_3 < \kappa_4 > \kappa_1 \quad \text{(или наоборот)}.$$

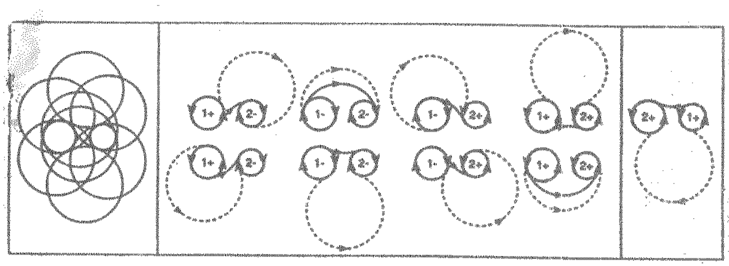

Рис. 4.

Рис. 4 демонстрирует различия между решениями без учета и с учетом ориентации окружностей (номер окружности и знак кривизны указаны); последний фрагмент иллюстрирует влияние порядка обхода.

Пусть дуга $\mathcal{K}_1 = K(x_1, y_1, \tau_1, \kappa_1)$ переходит в точке $T_1 = (p_1, q_1)$ при наклоне ξ_1 в дугу $\mathcal{K}_0$ кривизны κ_0, которая в точке $T_2 = (p_2, q_2)$ под углом ξ_2 сопрягается с дугой $\mathcal{K}_2$ кривизны κ_2. Последняя задана начальными ("конечными") условиями (x_2, y_2) и τ_2.

Исключим из рассмотрения тривиальные случаи вырожденных окружностей: $H \neq 0$. Точки T_1 и T_2 лежат на окружности $\mathcal{K}_0$, поэтому

$$\begin{aligned} U_0: &\quad \kappa_0 p_1 - \sin\xi_1 = \kappa_0 p_2 - \sin\xi_2 \\ V_0: &\quad \kappa_0 q_1 + \cos\xi_1 = \kappa_0 q_2 + \cos\xi_2. \end{aligned}$$

Величины F и G (9) могут быть выражены как через известные параметры $(x_{1,2}, y_{1,2}, \tau_{1,2})$, так и через неизвестные $(p_{1,2}, q_{1,2}, \xi_{1,2})$:

$$\begin{aligned} F &= \kappa_1\kappa_2(x_2-x_1) + \kappa_2 \sin\tau_1 - \kappa_1 \sin\tau_2 = \\ &= \kappa_1\kappa_2(p_2-p_1) + \kappa_2 \sin\xi_1 - \kappa_1 \sin\xi_2. \end{aligned}$$

Получаем следующую систему уравнений относительно ξ_1 и ξ_2:

$$\begin{cases} \kappa_2(\kappa_0-\kappa_1)\sin\xi_1 - \kappa_1(\kappa_0-\kappa_2)\sin\xi_2 = \kappa_0 F \\ -\kappa_2(\kappa_0-\kappa_1)\cos\xi_1 + \kappa_1(\kappa_0-\kappa_2)\cos\xi_2 = \kappa_0 G. \end{cases}$$

Она имеет два решения $\{\xi_1^+, \xi_2^+\}$ и $\{\xi_1^-, \xi_2^-\}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\frac{\xi_1^\pm}{2} &= \frac{F(\kappa_0-\kappa_1) \pm 2\kappa_1\sqrt{Q\,W}}{2\kappa_0\kappa_1 Q + (\kappa_0-\kappa_1)(\kappa_2-\kappa_1-G)}, \\ \operatorname{tg}\frac{\xi_2^\pm}{2} &= -\frac{F(\kappa_0-\kappa_2) \pm 2\kappa_2\sqrt{Q\,W}}{2\kappa_0\kappa_2 Q - (\kappa_0-\kappa_2)(\kappa_2-\kappa_1-G)}, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$W = W(\kappa_0) = \kappa_0^2(1-Q) - \kappa_0(\kappa_1+\kappa_2) + \kappa_1\kappa_2. \tag{25}$$

Для угла поворота сопрягающей дуги $\rho = \xi_2-\xi_1$ получаем выражение

$$\operatorname{tg}\frac{\rho}{2} = \frac{\kappa_0}{w}, \quad \text{где} \quad w = \pm\sqrt{\frac{W}{Q}}. \tag{26}$$

Если длина дуги $\mathcal{K}_0$ равна l, то ее поворот (как интеграл от кривизны) равен $\kappa_0 l$ и заключен в пределах $(0, \pm 2\pi)$ со знаком, равным знаку κ_0. Следовательно, в случае сопряжения меньшей дугой ($|\rho|<\pi$) знаки $\mathrm{tg}\,(\rho/2)$ и κ_0 совпадают. Чтобы получить именно такое сопряжение, в (26) следует выбрать знак плюс перед радикалом при определении вспомогательной переменной w. Отрицательное значение w дает сопряжения большой дугой той же кривизны.

Согласно (24), допустимые значения κ_0 определяются неравенством $QW \geqslant 0$:

$$Q\,[\kappa_0^2(1-Q) - \kappa_0(\kappa_1+\kappa_2) + \kappa_1\kappa_2] \geqslant 0 \ . \tag{27}$$

При $Q \neq 1$ оно принимает вид

$$Q(1-Q)(\kappa_0 - \kappa p)(\kappa_0 - \kappa^-) \geqslant 0, \tag{28}$$

где κ^+ и κ^- – корни полинома $W(\kappa_0)$ (25):

$$\{\kappa^+, \kappa^-\} = \left\{\frac{\kappa_1+\kappa_2 \pm H}{2(1-Q)}\right\} = \left\{\frac{1}{r},\ \frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2-\kappa_1\kappa_2 r}\right\}.$$

Пусть $\kappa^- < \kappa^+$ и

$$\kappa_{\min}=\min(\kappa_1,\kappa_2), \qquad \kappa_{\max}=\max(\kappa_1,\kappa_2).$$

Установив равенства

$$(\kappa_1 - \kappa^{\pm})(\kappa_2 - \kappa^{\pm}) = Q\cdot(\kappa^{\pm})^2, \tag{29}$$

получим, что оба корня $\kappa^{\pm}$ находятся одновременно внутри ($Q<0$) или снаружи ($Q>0$, $Q\neq 1$) интервала $(\kappa_{\min},\kappa_{\max})$. Рассмотрим решения при различных значениях Q.

1. $Q<0$. Из (28) и (29) получаем

   $$\kappa_{\min} < \kappa^- \leqslant \kappa_0 \leqslant \kappa^+ < \kappa_{\max}, \tag{30}$$

   т.е. при $Q<0$ (и только в этом случае) последовательность $\kappa_1, \kappa_0, \kappa_2$ монотонна.

2. $Q=0$. Дуги $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ касаются, т.е. сопрягаются без помощи промежуточной дуги (или дугой произвольной кривизны с $\rho=0$). “Нормальных” сопряжений нет.

3. $0<Q<1$.

$$-\infty \leqslant \kappa_0 \leqslant \kappa^- < \kappa_{\min}, \qquad \kappa_{\max} < \kappa^+ \leqslant \kappa_0 \leqslant \infty.$$

Сопряжениям с бесконечной кривизной соответствует пересечение окружностей.

4. $Q = 1$. ("антикасание"). Неравенство (27) принимает вид $\kappa_0(\kappa_1+\kappa_2) \leqslant \kappa_1\kappa_2$, а при $\kappa_1+\kappa_2 = 0$ (т.е. $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2^*$) вид $0 \leqslant -\kappa_1^2 = -\kappa_2^2$, т.е.

$$\kappa_1+\kappa_2 > 0 : -\infty \leqslant \kappa_0^+ \leqslant \kappa_1\kappa_2/(\kappa_1+\kappa_2) < \kappa_{\min};$$

$$\kappa_1+\kappa_2 = 0 : \text{ сопряжений нет;}$$

$$\kappa_1+\kappa_2 < 0 : \kappa_{\max} < \kappa_1\kappa_2/(\kappa_1+\kappa_2) \leqslant \kappa_0^+ \leqslant \infty.$$

5. $Q > 1$. Из (17) следует, что в этом случае равенство $\kappa_1+\kappa_2 = 0$ исключено.

$$\kappa_1+\kappa_2 > 0 : -\infty < \kappa^- \leqslant \kappa_0 \leqslant \kappa^+ < \kappa_{\min}$$

$$\kappa_1+\kappa_2 < 0 : \kappa_{\max} < \kappa^- \leqslant \kappa_0 \leqslant \kappa^+ < \infty.$$

Различные типы сопряжений иллюстрирует рис. 5. Пунктирная кривая – геометрическое место центров сопрягающих окружностей (31). "Звездочкой" показан *центр подобия* [4, стр. 12] пары окружностей, он же – центр серединной окружности (возможно, мнимой).

Свойства семейства сопрягающих окружностей. Решения задачи в системе координат (19) имеют вид:

$$\sin\xi_i = (-1)^i \frac{2\kappa_i\kappa_0 Q}{H(\kappa_i-\kappa_0)} + \frac{\Delta\kappa}{H}, \quad \cos\xi_i = \frac{2w\kappa_i Q}{H(\kappa_i-\kappa_0)};$$

$$\|p_i, q_i\| = \frac{2Q \cdot \|(-1)^i\kappa_i, -w\|}{H(\kappa_i-\kappa_0)} + \|d, 0\|,$$

где d – положение радикальной оси (21). Если $\mathcal{K}_1 \neq \mathcal{K}_2^*$ и $Q \neq 0$, то для каждой точки на окружности $\mathcal{K}_1$ (или $\mathcal{K}_2$) сопряжение существует и единственно. Координаты центра сопрягающей дуги равны ($\Delta\kappa = \kappa_2-\kappa_1$):

$$x = p_{1,2} - \frac{\sin\xi_{1,2}}{\kappa_0} = \frac{\Delta\kappa}{H}\left(r - \frac{1}{\kappa_0}\right),$$

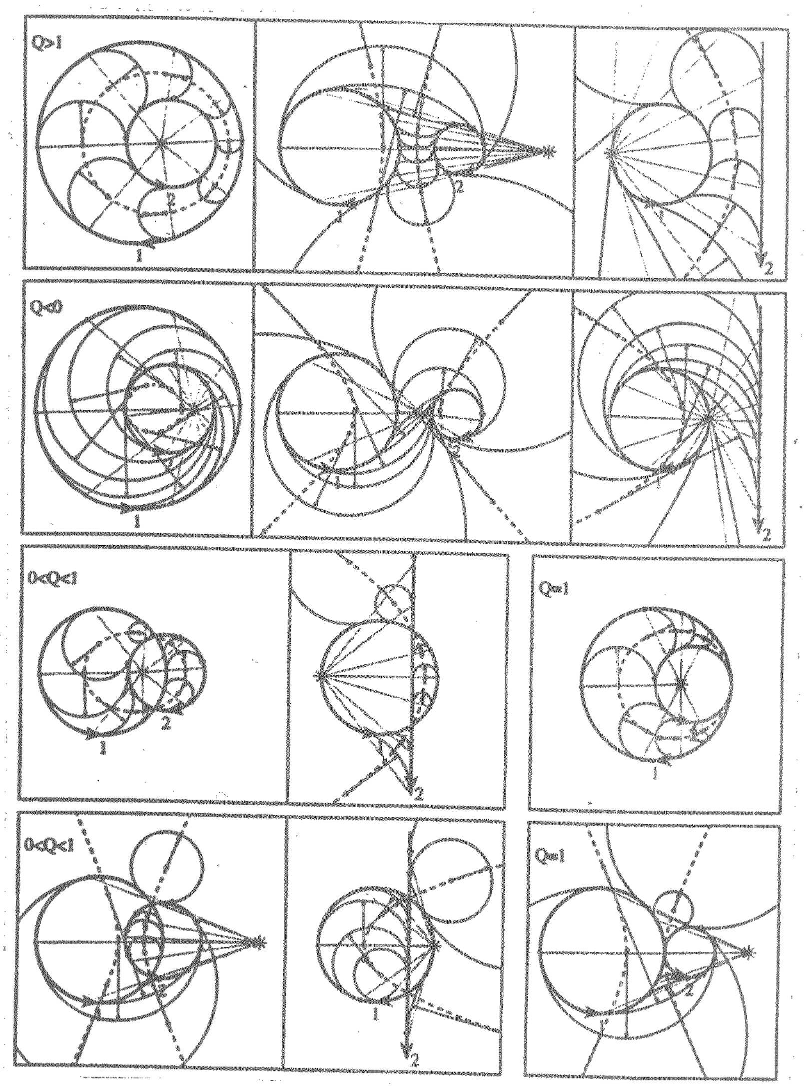

Рис. 5.

$$y = q_{1,2} + \frac{\cos\xi_{1,2}}{\kappa_0} = \frac{2wQ}{H\kappa_0} = \frac{\pm 2\sqrt{Q\,W(\kappa_0)}}{H\kappa_0}.$$

Исключая κ_0, получим уравнение геометрического места центров сопрягающих дуг:

$$(\Delta\kappa)^2\, y^2 - 4\kappa_1\kappa_2 Q\, x^2 - 4Q\Delta\kappa\, x = 0. \tag{31}$$

При $\kappa_1 = \kappa_2$ ГМТ вырождается в прямую $x = 0$. В противном случае это эллипс ($\kappa_1\kappa_2 Q < 0$), гипербола ($\kappa_1\kappa_2 Q > 0$) или парабола ($\kappa_1\kappa_2 Q = 0$) с эксцентриситетом $e = |H/\Delta\kappa|$ и фокальным параметром $p = |2Q/\Delta\kappa|$ (рис. 5).

Каждому сопряжению сопоставим треугольник OT_1T_2, где O – центр сопрягающей окружности, T_1 и T_2 – точки сопряжения. Очевидно, все отрезки OT_1 и все отрезки OT_2 пересекаются в точках $(X_1, 0)$ и $(X_2, 0)$ – центрах данных окружностей. Любопытно, что все хорды T_1T_2 также пересекаются в одной точке $(X_{12}, 0)$ – центре подобия пары:

$$X_{12} = \frac{(1-\kappa_1 r) + (1-\kappa_2 r)}{\kappa_2 - \kappa_1}, \quad X_1 = -\frac{1-\kappa_1 r}{\kappa_1}, \quad X_2 = \frac{1-\kappa_2 r}{\kappa_2}.$$

Кроме того, все три точки пересечения лежат на одной прямой – общем перпендикуляре пары окружностей. Следовательно, согласно обратной теореме Дезарга, *любые два треугольника OT_1T_2 являются перспективными. Центры перспективы лежат на радикальной оси* (21) *пары окружностей.*

Спиральные кривые. Как и в статье [1], под *спиральностью* будем понимать монотонное изменение кривизны вдоль кривой, допуская при этом разрывы кривизны и участки ее постоянства, не превышающие полной окружности. Подобное определение, суженное требованиями знакопостоянства и ограниченности кривизны, принято также в статье [5].

Описание инверсии кривых обычно состоит в перечислении конкретных преобразований [6] (например, *парабола → циссоида Диоклеса* и пр.). Сохранение спиральности при инверсии – общее свойство этих преобразований, которое можно считать обобщением известного факта – сохранения постоянства кривизны.

Теорема 1. *При инверсии спиральной кривой относительно окружности, центр которой не лежит на кривой, спиральность сохраняется, а ее характер (возрастание/убывание кривизны) изменяется на противоположный.*

Доказательство. Расположим окружность инверсии $\mathcal{K}$ "канонически" (3). Для кривой $\Gamma_1 := (x_1(s),\, y_1(s))$ с натуральным уравнением $\kappa_1(s)$ введем функции $Q(s;\mathcal{K})$ и $C(s;\mathcal{K})$ (14):

$$\begin{aligned} C(s) &= \kappa_0[x_1(s)^2 + y_1(s)^2] - 2y_1(s), \\ Q(s) &= \frac{1}{4}\kappa_1(s)C(s) - \frac{\kappa_0}{2}[x_1(s)\sin\tau_1(s) - y_1(s)\cos\tau_1(s)] + \\ &\quad + \sin^2\frac{\tau_1(s)}{2}. \end{aligned} \tag{32}$$

Учитывая, что

$$x_1'(s) = \cos\tau_1(s), \quad y_1'(s) = \sin\tau_1(s), \quad \tau_1'(s) = \kappa_1(s),$$

получим

$$Q'(s) = \frac{1}{4}\kappa_1'(s)C(s). \tag{33}$$

Дифференцируя равенство (15), связывающее кривизну $\kappa_2(s)$ образа с кривизной $\kappa_1(s)$ оригинала, получаем

$$\begin{aligned} \kappa_2'(s) &= -\kappa_1(s) - 4\kappa_0 Q'(s) = -\kappa_1'(s) - \kappa_0\kappa_1'(s)C(s) = \\ &= -\kappa_1'(s)\,[1 + \kappa_0 C(s)\,]. \end{aligned} \tag{34}$$

Так как центр кривизны не лежит на кривой, сомножитель $[1 + \kappa_0 C(s)]$ строго положителен (5). Функции $\kappa_1(s)$ и $\kappa_2(s)$ имеют знакопостоянные производные противоположного знака, откуда и следует утверждение теоремы для участков с непрерывной кривизной.

Из определения (10) следует, что если две окружности $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ касаются в точке $T = P_1 = (x_1, y_1) = P_2 = (x_2, y_2)$, $\tau_1 = \tau_2$, и $\mathcal{K}_0$ – произвольная третья окружность, то

$$Q_{02} - Q_{01} = \frac{1}{4}(\kappa_2 - \kappa_1)\, C(T;\mathcal{K}_0).$$

В точках разрыва кривизны, где круг кривизны слева $\mathcal{K}(s-0)$ касается правого круга кривизны $\mathcal{K}(s+0)$, это равенство принимает вид

$$\Delta Q(s) := Q(s+0) - Q(s-0) = \frac{1}{4}\Delta\kappa_1(s)C(s).$$

Поскольку сама кривая непрерывна, непрерывна и функция координат $C(s)$. Для скачка кривизны у кривой-образа из (16) получаем

$$\Delta\kappa_2(s) = -\Delta\kappa_1(s) - 4\kappa_0\Delta Q(s) = -\Delta\kappa_1(s)[1 + \kappa_0 C(s)],$$

также в соответствии с утверждением теоремы. □

Из формулировки теоремы можно исключить оговорку о том, что центр инверсии не лежит на кривой; хотя кривая-образ будет в этом случае разрывной на бесконечности, два ее участка будут иметь знакопостоянную монотонную функцию кривизны.

Под вершиной кривой мы понимаем точку экстремальной кривизны, не исключая при этом точки с нулевой экстремальной кривизной. Построенный в этой точке круг кривизны будем называть экстремальным.

Следствие 1.1. *При инверсии кривой ее вершины преобразуются в вершины образа с противоположным типом экстремума.*

Расположения кривой относительно круга кривизны. Расположение кривой относительно окружности кривизны $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(s_0)$ зависит от характера монотонности кривизны в точке $x(s_0), y(s_0)$. Соответствующие утверждения хорошо известны [7]. Обычно они формулируются и доказываются для некоторой окрестности точки s_0, $s_1 \leqslant s_0 \leqslant s_2$ в локальной системе координат, выбранной так, что

$$x(s_0) = 0, \quad y(s_0) = 0, \quad \tau(s_0) = 0. \tag{35}$$

Окрестность $[s_1,\, s_2]$ ограничена условиями:

(a) кривая может быть представлена как функция $y = f(x)$;

(b) кривая не имеет разрывов кривизны; (условие (b) добавлено, поскольку обычно при изложении этой темы оговаривается регулярность кривой). Тогда кривая $\Gamma(s)$ с возрастающей (убывающей) кривизной расположена слева (соотв., справа) от круга кривизны $\mathcal{K}_0$. Привлекая функцию $C(s)$ (14) относительно $\mathcal{K}_0$, выразим эти утверждения отношениями

$$\begin{aligned} &k'(s) > 0 : C(s) < 0, \quad \text{или} \quad \Gamma(s) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_0), \quad s_0 < s \leqslant s_2,\\ &k'(s) < 0 : C(s) > 0, \quad \text{или} \quad \Gamma(s) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_0^*), \quad s_0 < s \leqslant s_2. \end{aligned} \tag{36}$$

Если точка s_0 является вершиной (единственной в данной окрестности), то

$$\begin{aligned} &\text{для вершины-минимума:} \ \ C(s) < 0,\\ &\text{или} \ \ \Gamma(s) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_0), \ \ s_1 \leqslant s \leqslant s_2,\\ &\text{для вершины-максимума:} \ \ C(s) > 0,\\ &\text{или} \ \ \Gamma(s) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_0^*), \ \ s_1 \leqslant s \leqslant s_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Расширим область справедливости этих “дифференциальных” утверждений. Следующую теорему иллюстрирует рис. 2.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma = (x(s), y(s))$, $0 \leqslant s \leqslant S$ *– спиральная кривая с возрастающей кривизной* $k(s)$. *Тогда вся кривая и все ее круги кривизны* $\mathcal{K}(s)$ *находятся в материале круга кривизны* $\mathcal{K}_0 := \mathcal{K}(0)$.

Доказательство. Особый случай $k(0) = -\infty$ (например, логарифмическая спираль или эвольвента окружности) можно в пределе рассматривать как вырождение $\mathcal{K}(0)$ в точку, понимая под $\mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}(0))$ всю плоскость. Далее будем считать значение $k(0)$ конечным, что означает существование функций $Q(s)$ и $C(s)$ (32).

Если в начале кривой имеется участок постоянной кривизны, то за исходную точку $s = 0$ примем конец этого участка. Перейдя в систему координат (35), рассмотрим дугу кривой на отрезке $s \in [0, s_1]$, в пределах которого выполнены условия (a) и (b), сопровождающие утверждение (36).

Из (33) и (36) следует, что $Q'(s) < 0$ и, поскольку $Q(0) = Q(\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_0) = 0$, на рассматриваемом отрезке $Q(s) \leqslant 0$. Тогда, согласно (22), $\mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}(s)) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_0)$. Если на конце участка имеется разрыв кривизны, то круг слева $\mathcal{K}^- = \mathcal{K}(s_1{-}0)$ будет касаться круга $\mathcal{K}^+ = \mathcal{K}(s_1{+}0)$, построенного справа от разрыва, т.е. $Q(\mathcal{K}^-, \mathcal{K}^+) = 0$ и $k(s_1{+}0) > k(s_1{-}0)$. Значит, соотношение $\mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}^+) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}^-) \subset \mathrm{Mat}\,(\mathcal{K}_0)$ также будет выполнено. То же рассмотрение с кругом кривизны $\mathcal{K}^+$ в качестве начального позволяет распространить утверждение на всю кривую. □

Следствие 2.1. *Спиральная кривая не имеет самопересечений (факт, для случая знакопостоянной монотонной кривизны доказанный в* [10]*).*

Следствие 2.2. *Окрестность вершины кривой с минимальной (максимальной) кривизной, лежащая в материале (соотв., вне материала) экстремального круга кривизны, включает две соседние вершины либо, если таковых нет, всю кривую.*

Это положение иллюстрирует рис. 6, на котором показаны две кривые с единственной вершиной $[k(s) \sim s^2 \pm b]$, спираль Ферма $\rho = a\sqrt{\theta}$ $\left(\theta_{\mathrm{vx}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{7}-5}\right)$ и замкнутая кривая с двумя вершинами (лемниската), которая также не имеет с экстремальными окружностями общих точек, кроме самих точек касания.

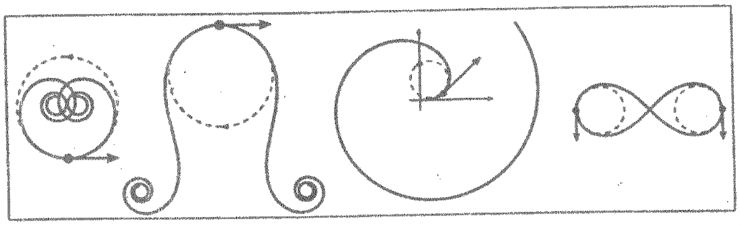

Рис. 6.

Отметим, что функция $Q(s;\mathcal{K}_0)$, определенная относительно круга кривизны в исходной точке спирали, монотонно убывает от нулевого значения. Она может быть равна нулю только на начальном участке кривой, если он состоит из одной или двух дуг постоянной кривизны (но не более! – (30)).

Следствие 3.3. *Если $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ – круги кривизны в начальной и конечной точке спиральной кривой, и $Q_{12} = 0$, то эта кривая состоит из двух дуг постоянной кривизны.*

Кривые, составленные из двух дуг окружностей, активно используются в задачах интерполяции. В англоязычной литературе для них принят термин *“biarc”* [8, 9]. В статье [1] показана особая роль этих кривых в теории спиралей.

В. А. Залгаллер обратил внимание автора на статью [10]. Ее положения перекликаются с леммой 1 в [1] и теоремой 2 настоящей статьи. Однако в [10] расмотрение ограничивается кривыми с монотонной *положительной* кривизной (неориентированными).

Инвариант (10) связан с инверсным расстоянием (1) равенством $\delta = \operatorname{Arch}|1-2Q|$, из которого видно, что величина Q более информативна: при переходе от Q к δ информация об ориентации окружностей теряется под знаком модуля, а случай пересекающихся окружностей ($0 \leqslant Q \leqslant 1$) не попадает в область определения функции $\operatorname{Arch}(x)$.

Рассмотренный здесь и в статьях [1, 10] класс кривых заслуживает, на наш взгляд, более подробного изучения и однозначного персонального определения. Термин *“истинные спирали”* для кривых с монотонной функцией кривизны представляется вполне уместным.

Литература

1. А. И. Курносенко, *Интерполяционные свойства плоских спиральных кривых.* Препринт ИФВЭ 9-98, Протвино (1998).
2. Г. С. М. Коксетер, С. Грейтцер, *Новые встречи с геометрией.* Наука, М. (1978).
3. H. S. M. Coxeter, *Inversive distance.* — Ann. di Mat. Pura ed Appl. **(4) 71** (1966), 73–83.
4. D. Pedoe, *Circles.* Pergamon Press (1957).
5. K. Marciniak, B. Putz, *Approximation of spirals by piecewise curves of fewest circular arc segments.* — Comp.-Aided Design **16** (1984), 87–90.
6. R. C. Yates, *A Handbook on curves and their properties.* Ann. Arbor, MI: J. W. Edwards (1952).
7. Е. В. Шикин, М. М. Франк-Каменецкий, *Кривые на плоскости и в пространстве.* ФАЗИС, М. (1997).
8. K. M. Bolton, *Biarc curves.* — Comp.-Aided Design **7** (1975), 89–92.
9. D. S. Meek, D. J. Walton, *Approximation of discrete data by G^1 arc splines.* — Comp.-Aided Design **24** (1992), 301–306.
10. W. Vogt, *Über monotongekrümmte Kurven.* — J. für die Reine und Angewandte Mathematik **144** (1914), 239–248.

Kurnosenko A. I. Inversive invariant of a pair of circles.

An inversive invariant of two orientrd circles is introduced. Being close to Coxeter's inversive distance between two non-intersecting circles, it is defined for any pair of oriented circles (straight lines). To demonstrate its effectiveness, two topics are discussed the problem of C^1-conjunction of circles and the properties of plane curves with monotonous curvature.

Институт Физики
Высоких Энергий,
г. Протвино Моск. обл.

Поступило 29 апреля 1999 г.