Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

Н. Д. Лебедева

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПОГРУЖЕНИЯХ ЗАМКНУТЫХ МНОГООБРАЗИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Введение

Метрика неотрицательной кривизны на многообразии M^n может быть реализована как индуцированная тем или иным погружением M^n в $\mathbb{R}^N$. Шефелем [5] было предложено дополнительное требование, которое делает естественно интересными только реализации в виде выпуклых гиперповерхностей в $\mathbb{R}^{n+1}$. Точнее, им доказано, что если $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ гладкое погружение многообразия M^n со свойством строгой положительности секционных кривизн, и это свойство *сохраняется при любом аффинном преобразовании* пространства $\mathbb{R}^N$, то f есть погружение в $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$ в виде локально выпуклой гиперповерхности.

В [5] доказан аналогичный результат глобального характера без предположения гладкости и строгой положительности кривизны, но только для замкнутых *двумерных* многообразий.

В настоящей работе глобальный результат распространяется на замкнутые гладкие многообразия неотрицательной кривизны и на многообразия с полиэдральной метрикой неотрицательной кривизны при *любых* размерностях.

В §1 будет рассматриваться гладкий случай, в §2 – полиэдральный. Везде будем обозначать через $\mathfrak{A}$ группу аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^N$.

§1. Гладкие замкнутые многообразия неотрицательной кривизны

1.1. Рассмотрим гладкое погружение $f : M^n \to \mathbb{R}^N$, где M^n – n-мерное гладкое *замкнутое* риманово многообразие, $n \geqslant 2$, $N > n$.

* Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–681.

Теорема. *Если для фиксированного $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ и любого $a \in \mathfrak{A}$ погруженное подмногообразие $a \circ f : M^n \to \mathbb{R}^N$ имеет внутреннюю метрику неотрицательной кривизны, то f есть вложение на границу выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$.*

Поскольку тождественное отображение $e \in \mathfrak{A}$, метрика M^n априори имеет неотрицательную кривизну.

1.2. Докажем, что в условиях теоремы $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$. Мы будем пользоваться понятиями тотальной абсолютной кривизны и свойством так называемых тугих погружений. Определения этих понятий можно найти в [6]. В силу леммы 33 из [6] нам достаточно доказать, что тотальная абсолютная кривизна $\tau = 2$.

Предположим противное, т.е. что $\tau > 2$. Обозначим через G гауссово отображение тотального пространства нормального расслоения $\nu(M^n) \to S^{N-1}$. Образ $G(\nu(M^n))$ покрывает сферу S^{N-1} в среднем τ раз. Тогда в силу предположения $\tau > 2$ существует единичная нормаль $\bar{\nu}$, которая покрывается отображением G не меньше 3 раз, причем $\det G\big|_{G^{-1}(\bar{\nu})}$ имеет максимальный ранг. (Последнее возможно, потому что точки, где ранг не максимальный, имеют меру 0 на S^{N-1}.) Это означает, что число критических точек функции высоты $h\bar{\nu}$ не меньше 3 (где $h\bar{\nu}(\vec{x}) = (\vec{\bar{\nu}}, \vec{x})$ – скалярное произведение, см. [3]) и все эти точки невырождены, т.к. произведение главных кривизн $k_1(\bar{\nu}), \dots, k_n(\bar{\nu})$ относительно нормали $\bar{\nu}$ в критических точках не равно нулю $(k_1(\bar{\nu}) \cdots k_n(\bar{\nu}) \neq 0)$ в силу максимальности ранга $\det G$.

Докажем, что кривизны $k_1(\bar{\nu}), \dots, k_n(\bar{\nu})$ одного знака для каждой критической точки. Докажем это для одной из пар $k_1(\bar{\nu}), k_2(\bar{\nu})$. Пусть e_1, e_2 – главные направления для нормали $\bar{\nu}$, соответствующие кривизнам $k_1(\bar{\nu}), k_2(\bar{\nu})$. Включив $\bar{\nu}$ в ортонормированный базис нормалей $\nu_1, \dots, \nu_k$, так что $\nu_1 = \bar{\nu}$, по обобщенной теореме Гаусса будем иметь:

$$K_\sigma(e_1, e_2) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \mathrm{II}\nu_i(e_1, e_1) & \mathrm{II}\nu_i(e_1, e_2) \\ \mathrm{II}\nu_i(e_1, e_2) & \mathrm{II}\nu_i(e_2, e_2) \end{vmatrix} =$$

$$k_1(\nu_1)k_2(\nu_1) + \sum(\nu_2, \dots, \nu_k).$$

Здесь $k_1(\nu_1)k_2(\nu_1) = k_1(\bar{\nu})k_2(\bar{\nu}) \neq 0$. Если подвергать $\mathbb{R}^N$ сжатию вдоль осей $\nu_2, \dots, \nu_k$, то $\sum(\nu_2, \dots, \nu_k)$ будет идти к нулю,

$k_1(\nu_1)k_2(\nu_1)$ меняться не будет, а их сумма $K_\sigma(e_1, e_2)$ должна оставаться неотрицательной. Т.о. имеем: $k_1(\nu_1)k_2(\nu_1) = k_1(\bar\nu)k_2(\bar\nu) > 0$. Это означает, что все критические точки имеют индекс или 0 или n. По теореме Морса ([3, гл. 1, теорема 3.5]) M^n имеет гомотопический тип клеточного комплекса, в котором каждой точке с индексом 0 или n соответствует одна клетка размерности 0 или n. Поскольку многообразие связно, их не может быть больше двух. Получили противоречие, доказывающее, что $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

1.3. Из п. 1.2 ясно, что существует функция высоты с ровно двумя критическими точками, по теореме Морса M^n гомеоморфно S^n. В частности M^n ориентируемо. Тогда для окончания доказательства теоремы достаточно сослаться на теорему Чженя–Лашофа, см. [4, гл. 6, теорема 5.4].

§2 Замкнутое многообразие с полиэдральной метрикой неотрицательной кривизны

Рассмотрим погружение $f : P^n \to \mathbb{R}^N$, где P^n n-мерное многообразие, на котором f индуцирует полиэдральную метрику. Точками полиэдра $P = (P^n, f)$ будем называть пары $(p, f|p)$, где $p \in P^n$, $f(p) \in \mathbb{R}^N$.

Будем говорить, что полиэдр P обладает свойством $(*)$, если для любых $a \in \mathfrak{A}$ полиэдр $(P^n, a \circ f)$ тоже является многообразием неотрицательной кривизны в смысле Александрова [1], т.е. если неотрицательность кривизны полиэдра P сохраняется при любых аффинных преобразованиях.

Теорема. *Если полиэдр P обладает свойством $(*)$, то f есть вложение на границу выпуклого многогранника $Q \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$.*

Доказательство будем вести от противного. Пусть утверждение теоремы не верно.

2.1. Опровержение этого предположения при коразмерности $\geqslant 2$ сведем к случаю, когда $\bar f(P^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, но не является границей выпуклого тела. Действительно, если $f(P^n) \not\subset \mathbb{R}^{n+1}$, то существуют $A_1, \ldots, A_{n+3} \in P^n$, для которых точки $f(A_1), \ldots, f(A_{n+3})$ аффинно независимы или, как говорят, находятся в общем положении. Найдется проекция P_r на $\operatorname{lin}(f(A_1), \ldots, f(A_{n+2}))$, для которой выполнены условия:

1) $\operatorname{Pr}(f(A_{n+3})) \subset \operatorname{Int}\operatorname{conv}\{f(A_1), \ldots, f(A_{n+2})\}$,

2) Для любых $B_1, B_2 \in P^n$, таких что отрезок $[f(B_1), f(B_2)] \subset f(P^n)$, проекция $\mathrm{Pr}\,([f(B_1), f(B_2)])$ не является точкой.

Тогда $\mathrm{Pr} \circ f(P^n)$ – не граница выпуклого тела. Проекция Pr - предельный случай аффинных преобразований a_k, и поскольку метрики полиэдральны, полиэдры $(P^n, a_k \circ f)$ сходятся по метрике к полиэдру $(P^n, \mathrm{Pr} \circ f)$. В силу неотрицательности кривизны полиэдров $(P^n, a_k \circ f)$ полиэдр $P^n, \mathrm{Pr} \circ f)$ тоже имеет неотрицательную кривизну. Заметив, что для любого аффинного преобразования b^{n+1} пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ существует аффинное преобразование $b^N \in \mathfrak{A}$, со свойством: $b^{n+1} \circ \mathrm{Pr} = \mathrm{Pr} \circ b^N$, получаем что полиэдр $(P^n, \mathrm{Pr} \circ f)$ обладает свойством $(*)$, если вместо $\mathbb{R}^N$ рассматривать $\mathbb{R}^{n+1}$. В качестве погружения в $\mathbb{R}^{n+1}$ берем $\bar{f} = \mathrm{Pr} \circ f$.

2.2. Опровержение предположения при $f(P^n)$ содержащимся в $\mathbb{R}^{n+1}$, но не являющимся границей выпуклого тела сведем к случаю, когда $\bar{f}(P^n) \subset \mathbb{R}^n$ и $\bar{f}$ покрывает более чем дважды некоторое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Доказывается аналогично 2.1, проекция Pr берется вдоль прямой, трансверсально пересекающей $f(P^n) \geqslant 3$ раз.

2.3.1. Итак, достаточно привести к противоречию случай, когда $f(P^n) \subset \mathbb{R}^n$, погружение f покрывает некоторое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ более чем дважды и полиэдр $P = (P^n, f)$ обладает свойством $(*)$.

Будем говорить, что полиэдр $M = (M^n, h)$ устроен “хорошо” в окрестности данной k-мерной грани, если он устроен либо как $\mathbb{R}^n$, либо как произведение $\mathbb{R}^k$ на конус, натянутый на дважды покрытое замкнутое выпуклое множество на сфере S^{n-k-1}. Можно естественным образом распространить это определение на полиэдры, погруженные не в $\mathbb{R}^n$, а в S^n: это понадобится в дальнейшем.

2.3.2. Докажем, что в окрестности $(n-2)$-мерных граней полиэдр P устроен “хорошо”. Предположим противное: в ортогональном дополнении $\bar{\mathbb{R}}^2$ к грани $L^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^n$ погружение f более чем дважды покрывает некоторый угол. Точнее: погружение $f' = f\big|_{f^{-1}(\bar{\mathbb{R}}^2} : f^{-1}(\bar{\mathbb{R}}^2) \to \bar{\mathbb{R}}^2$ покрывает более чем дважды некоторый сектор α: рис. 1.

Растягивая α до $1,9\pi$ аффинными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^n$ получаем угол вокруг $(n-2)$-мерной грани, больший 2π. Это противоречит неотрицательности внутренней метрики.

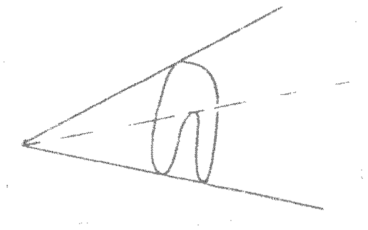

Рис. 1.

2.3.3. Следующая лемма будет в дальнейшем использована как для полиэдров, погруженных в $\mathbb{R}^n$, так и для полиэдров, погруженных в S^n.

Лемма. *Предположим $F = (F^n, f')$ – полиэдр в $\mathbb{R}^n$ или S^n, где $f' : F^n \to \mathbb{R}^n(S^n)$ – погружение. Пусть в окрестности любой грани он устроен "хорошо". Тогда $f'(F^n)$ – дважды покрытое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ или S^n.*

Доказательство. Разобьем F^n на компоненты, которые в паре с их образами при отображении f' будем называть существенными гранями, следующим образом: точки a и b принадлежат одной компоненте, если существует U – открытое, связное подмножество в F^n, такое что множество $\{a, b\} \subset U$ и отображение $f'\big|_U : U \to f'(U)$ – гомеоморфизм.

Пусть G – некоторая существенная грань. Докажем, что G – выпукла. Для любой граничной точки $x \in \partial G$ существует проходящая через x локально опорная гиперплоскость, т.к. граница существенной грани G составлена из граней полиэдра F размерности $n-1$, и вблизи каждой их точки полиэдр F устроен "хорошо". Тогда, по теореме Титце ([2], стр. 37), G – выпукла.

Докажем, что существенных граней две. Рассмотрим одну из них. Точки, находящиеся в окрестности любой точки ее границы, принадлежат ровно двум существенным граням в силу "хорошего" устройства граней полиэдра F. Граница связна, и значит ее окрестность принадлежит ровно двум существенным граням, одна из которых наша выбранная. Тогда другая существенная грань вместе с точками в окрестности границы содержит их выпуклую оболочку и таким образом совпадает с первой, как подмножество в $\mathbb{R}^n(S^n)$ (рис. 2).

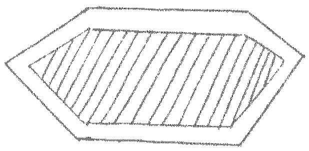

Рис. 2.

Из этого следует утверждение леммы.

2.3.4. Методом индукции установим, что полиэдр P вокруг каждой грани устроен "хорошо".

Рассмотрим $(n-3)$-мерную грань L^{n-3} и примыкающие к ней грани большей размерности: $L_i^{n-1}, L_i^{n-2}, L_i^n$. Рассмотрим ортогональное дополнение $(L^{n-3})^{\perp} = \mathbb{R}^3$ и единичную сферу S^2 с центром, принадлежащим L^{n-3}, содержащуюся в этом дополнении. Тогда пересечения $S^2 \cap L_i^{n-2}$ – точки, $S^2 \cap L_i^{n-1}$ – отрезки на сфере, $S^2 \cap L_i^n$ – области на сфере. Получаем двумерный полиэдр K^2 на сфере. В силу 2.3.2 полиэдр P устроен "хорошо" вокруг L_i^{n-2}, а значит полиэдр K^2 устроен "хорошо" вокруг точек $S^2 \cap L_i^{n-2}$. Поскольку вершины полиэдра K^2 являются для него гранями коразмерности 2, мы находимся в условиях леммы 2.3.3. Тогда K^2 – дважды покрытое выпуклое подмножество в S^2. Таким образом вокруг грани L^{n-3} полиэдр P устроен "хорошо". И далее по индукции дойдем до того, что полиэдр P устроен хорошо вокруг каждой вершины. Полиэдр P удовлетворяет условиям леммы 2.3.3, это означает, что отображение f покрывает $f(P^n) \subset \mathbb{R}^n$ дважды. Получили противоречие, доказывающее теорему.

Литература

1. А. Д. Александров, *Über eine Veralgemeinerung der Riemannschen Geometrie.* Bericht von der Riemann–Tagung des Forschungsinstituts für Mathematik. Berlin 1957, Schriftenreihe der Inst. Math., H. 1, 38–84..
2. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Достаточные признаки выпуклости.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **45** (1974), 3–52.
3. Дж. Милнор, *Теория Морса.* М., "Мир", 1965.
4. С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии.* М., "Мир", 1970.
5. С. З. Шефель, *О двух классах k-мерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве.* Сиб. мат. ж., **10**, No. 2 (1969), 459–466.
6. T. J. Willmore, *Total curvature in Riemannian geometry.* Ellis Horwood Limited, 1982.

Lebedeva N. D. On isometric immersion of closed manifolds of nonnegative curvature.

Let M^n be a closed manifold. Assume that an immersion $f : M^n \to \mathbb{R}^N$ induces a C^2-smooth metric of nonnegative curvature or a polyhedral metric of nonnegative curvature on M^n. If this nonnegativness is left invariant under every affine transformation of $\mathbb{R}^N$, then f is an embedding on the boundary of a C^2-smooth convex body (a convex polyhedron correspondingly) in some $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^N$.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 8 февраля 1999 г.