Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

В. В. Макеев

ОБ ОДНОЙ АФФИННО-ИНВАРИАНТНОЙ МЕТРИКЕ НА МНОЖЕСТВЕ ПЛОСКИХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ

Следуя [1], обозначим

$$\delta(K_1, K_2) = \inf\left\{\frac{S(T(K_2))}{(S(K_1)} \mid K_1 \subset T(K_2)\right\},$$

где K_1, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$ выпуклые компакты, T – аффинное преобразование плоскости, а $S(K)$ означает площадь множества $K \subset \mathbb{R}^2$. Тогда $d(K_1, K_2) = \ln\delta(K_1, K_2) + \ln\delta(K_2, K_1)$ – аффинно-инвариантная метрика на множестве плоских выпуклых компактов. В [1] доказано, что $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 9$ для любых выпуклых компактов K_1, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$. Ниже доказана

Теорема. $d(K_1, K_2) < \ln\frac{111}{16}$ *для любых выпуклых компактов* K_1, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$.

Для доказательства мы, как и в [1], будем использовать теорему Безиковича о том, что во всякий плоский выпуклый компакт можно вписать аффинный образ правильного шестиугольника. Далее мы считаем, что на границе выпуклых компактов K_1 и K_2 лежат вершины некоторого фиксированного правильного шестиугольника K. Тогда K_1 и K_2 содержатся в фигуре, ограниченной продолжениями сторон K (Рис. 1), которая получается

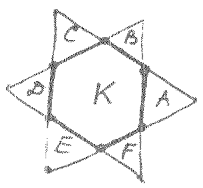

Рис. 1.

из K добавлением шести равных правильных треугольников. Они обозначены буквами A, B, C, D, E, F.

Проведем в треугольниках A, B, C, D, E, F средние линии, параллельные сторонам шестиугольника K, которые отсекают от них меньшие треугольники T_A, T_B, T_C, T_D, T_E и T_F соответственно. Опорная прямая к фигуре K_i $(i = 1, 2)$, проведенная через вершину шестиугольника K, может иметь общие внутренние точки не более чем с одним треугольником из $T_A, T_B, \dots, T_F$. Поэтому после надлежащего переобозначения можно считать, что каждая из фигур K_i может иметь общие внутренние точки лишь с треугольниками T_A, T_C, T_E или с треугольниками T_A, T_D.

Лемма 1. *Если выпуклый компакт K_1 имеет общие внутренние точки разве лишь с треугольниками T_A или T_D, то $d(K_1, K_2) \leqslant \ln \frac{37}{16}$.*

На Рис. 2 буквами $A', B', \dots, F'$ обозначены не принадлежащие K вершины треугольников $A, B, \dots, F$ соответственно. Пусть β – такое наименьшее неотрицательное число, что K_1 имеет общие точки с гомотетичными T_A и T_D треугольниками βT_A и βT_D с коэффициентом β и центрами гомотетии в точках A' и D' соответственно. В таком случае K_1 не имеет общих внутренних точек с одним из треугольников βT_A и βT_D с коэффициентом β и центрами гомотетии в точках A' или D'. Пусть это треугольник βT_D.

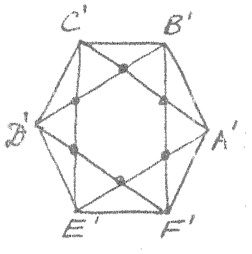

Рис. 2.

Предположим, что $\beta \geqslant 1$. Так как K_1 не имеет точек внутри треугольников T_B, T_C, T_E и T_F, то K_1 содержится в шестиугольнике, полученном из $A'B'C'D'E'F'$ сжатием с коэффициентом $5/6$ к оси AD Рис. 3. Так как K не внутренность треугольника пересекает T_D, то вышеописанный сжатый шестиуголник можно сжать с коэффициентом 33/40, в направлении оси $A'D'$, оставив вершину A' неподвижной и он по-прежнему содержит K_1 Рис. 4. Площади построенного шестиугольника $5/6 \cdot 37/40.S(K) = 37/16S(K)$.

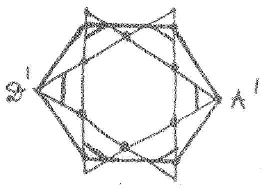

Рис. 3

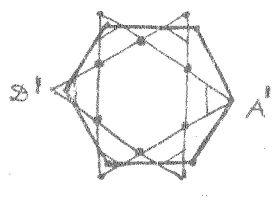

Рис. 4.

Пусть $\beta \leqslant 1$. Тогда K_1 не имеет общих внутренних точек с треугольниками $(2-\beta)T_B$, $(2-\beta)T_C$, $(2-\beta)T_E$ и $(2-\beta)T_F$ с вершинами с точках B', C', E', F' соответственно. Как показывают простые вычисления, в этом случае K_1 содержится в шестиугольнике $A''B''C''D''E''F''$, получаемом из $A'B'C'D'E'F'$ сжатием с коэффициентом $\frac{4+\beta}{6}$ к оси $A'D'$. Так как K_1 не пересекает внутренность треугольника βT_D, то последний шестиугольник можно еще сжать с коэффициентом $\frac{32+6\beta-\beta^2}{8(4+\beta)}$ в направлении оси $A'D'$, оставив на месте вершину A', и он по-прежнему содержит K_1. Площадь полученного посредством двух сжатий шестиугольника достигает минимума при $\beta = 1$, который равен 37/16 площади K. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если описанные вокруг шестиугольника K выпуклые компакты K_1 и K_2 не имеют общих внутренних точек с треугольниками T_B, T_D и T_F, то $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 27/4$.*

По условию K_1 и K_2 имеют общие внутренние точки разве лишь с треугольниками T_A, T_C, T_E. Пусть M и N – подмножества этого набора треугольников, с внутренностями которых пересекаются соответственно K_1 и K_2. Можно считать, что $M \subset N$ (проводя необходимые переобозначения). Докажем, что в этом случае $K_1 \subset 3/2K_2$, при условии, что центр гомотетии находится в центре шестиугольника K.

Если K_2 пересекается с T_A, то очевидно K_2 содержит центр треугольника A, который при указанной гомотетии переходит в вершину A'. Поэтому $3/2K_2$ покрывает треуголник A. Ясно также, что $3/2K_2$ покрывает части треугольников $A, B, C, \ldots, F$, не попадающие в $T_A, T_B, \ldots, T_F$ соответственно. Значит $K_1 \subset 3/2K_2$.

Рассмотрим аффинный образ $T(K_2)$ выпуклой фигуры K_2, вписанный в шестиугольник K. Как хорошо известно:

$$\frac{2}{3}S(K_2) \leqslant S(K) \leqslant 2S(T(K_2)),$$

откуда

$$S(K_2) \leqslant 3S(T(K_2)).$$

Имеем:

$$T(K_2) \subset K_1 \subset \frac{3}{2}K_2,$$

и

$$S\left(\frac{3}{2}K_2)\right) \leqslant \frac{27}{4}S(T(K_2)).$$

Лемма 2 доказана.

Если одна из фигур K_1 и K_2, например, K_1 пересекает разве лишь внутренности T_A и T_D, то $d(K_1, K_2) \leqslant d(K_1, K) + d(K, K_2)$. По лемме 1 $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 37/16$, а $d(K, K_2) \leqslant \ln 3$ [1], откуда $d(K_1, K_2) \leqslant \ln 6\frac{15}{15}$.

Если же обе фигуры K_1 и K_2 пересекают внутренности разве лишь треугольников T_A, T_C, T_E, то по лемме 2 $d(K_1, K_2) < \ln \frac{27}{4}$.

Литература

1. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М. (1971).

Makeev V. V. On one affine-invariant metric on the class of convex plane compacts.

Theorem. *For every plane convex compacts K_1, $K_2 \subset \mathbb{R}^2$ there exist an affine transformations T_1, T_2 such that $T_1(K_1) \subset K_2 \subset T_2(K_1)$ and $S(T_2(K_1)) < 111/16S(T_1(K_1))$, where $S(K)$ means the square of a plane set $K \subset \mathbb{R}^2$.*

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Поступило 24 апреля 1999 г.