Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

В. В. Макеев, А. С. Мухин

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБЩЕГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ, ИМЕЮЩЕГО ЗАДАННЫЕ СВОЙСТВА

Цель данной работы – описание конструкции, позволяющей получить серию сходных результатов в выпуклой геометрии. Некоторые из утверждений, которые будут приведены в этой работе, были доказаны ранее без явного применения конструкции.

Тремя авторами [1–3] была независимо установлена нижеследующая топологическая лемма и даны ее геометрические применения.

Обозначим через G_{kn} многообразие Грассмана неориентированных k-плоскостей, проходящих через некоторую точку в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\gamma_{kn} : E_{kn} \to G_{kn}$ каноническое расслоение: слоем над точкой e из $G_k n$ является она же, рассматриваемая как k-мерное векторное пространство.

Лемма. *Индекс пересечения по модулю два циклов $c_1, \dots, c_{n-k+1}$ тотального пространства E_{kn} канонического расслоения γ_{kn} над многообразием Грассмана, гомологичных по модулю два нулевому сечению этого расслоения, равен* 1.

Следствие. *Индекс пересечения по модулю два циклов $c_1, c_2, \dots,$ $\dots, c_{n-k+1} \in H_{k(n-k)}(E_{kn}, Z_2)$, пересекающихся трансверсально со слоем пространства E_{kn} общего положения в нечетном числе точек равен* 1.

Теперь рассмотрим несколько видов отображений из множества всех выпуклых компактных фигур на плоскости в множество подмножеств плоскости.

0. Самый простой пример – отображение $A_0(K)$, которое сопоставляет выпуклому телу на плоскости K непрерывно зависящую от него точку. В. Л. Дольников в работе [3] подробно изучает такие отображения.

Работа частично поддержана грантом научных школ, No. 96-15-96-075.

1. Обозначим через $A_1(K)$ множество точек плоскости, через которые проходит пара перпендикулярных прямых, делящих площадь компакта K на четыре равные части. Легко заметить [6], что для типичного компакта $K \subset R^2$ с гладкой границей множество $A_1(K)$ состоит из нечетного числа точек. Здесь и ниже типичными мы называем компакты, составляющие открытое плотное множество в соответствующей топологии в пространстве выпуклых компактов.

2. Обозначим $A_2(K)$ множество центров квадратов, вписанных в выпуклый компакт $K \subset R^2$ (или описанных вокруг него). Шнирельман [4] доказал, что в типичную C^2-гладкую регулярную жорданову кривую на плоскости вписано нечетное число квадратов.

3. Пусть $A_3(K)$ обозначает множество шестидольных точек выпуклого компакта $K \subset R^2$, то есть точек, через которые проходят три прямые, делящие площадь K на шесть равных частей. Хорошо известно, что $A_3(K) \neq \varnothing$ и легко заметить [6], что для типичного компакта K с гладкой границей $A_3(K)$ состоит из нечетного числа точек.

4. Обозначим $A_4(K)$ множество центров аффинных образов заданного центрально-симметричного шестиугольника, вписанных в компакт K (описанных вокруг K).

В [5] доказано, что для типичного выпуклого компакта K с C^1-гладкой границей множество $A_4(K)$ состоит из нечетного числа точек.

0. Сопоставим выпуклому телу $K \subset R^3$ непрерывно зависящую от него точку $B_0(K)$ пространства R^3.

1. Сопоставим выпуклому компакту $K \subset R^3$ множество $B_1(K)$ центров вписанных в K аффинных образов кубооктаэдра – выпуклой оболочки средних ребер куба. В [5] доказано, что для выпуклого компакта $K \subset R^3$ с гладкой границей $B_1(K) \neq \varnothing$ и для открытого плотного в C^1-топологии множества типичных компактов $K \subset R^3$ множество $B_1(K)$ состоит из нечетного числа точек.

2. Сопоставим выпуклому компакту $K \subset R^3$ множество $B_2(K)$ центров описанных вокруг K аффинных образов ромбододекаэдра (многогранника, двойственного к кубооктаэдру). В [6, 8, 9] доказано, что для типичного выпуклого компакта $K \subset R^3$ с гладкой границей $B_2(K)$ состоит из нечетного числа точек.

3. Пусть для выпуклого компакта $K \subset R^3$ множество $B_3(K)$ состоит из точек K, через которые проходят три взаимно перпендикулярные аффинные диаметра K. Хорда компакта $K \subset R^3$ называется аффинным диаметром, если ее концы лежат в параллельных опорных плоскостях K. В [6] доказано, что для выпуклого компакта $K \subset R^3$ множество $B_3(K) \neq \varnothing$ и для типичного компакта $K \subset R^3$ с C^2-гладкой границей положительной гауссовой кривизны $B_3(K)$ состоит из нечетного числа точек.

4. Для выпуклого компакта $K \subset R^3$ обозначимн множество центров аффинно-правильных восьмиугольников, вписанных в K, плоскость которых проходит через фиксированную точку $O \in K$. В [5] доказано, что $B_4(K) \neq \varnothing$, и, что для типичного в C^1-топологии компакта K с C^1-гладкой границей множества $B_4(K)$ состоит из нечетного числа точек.

Основная теорема 1. *Пусть даны $n-1$ выпуклых компакта $K_1, \dots, K_{n-1}$ в R^n с общей внутренней точкой O и заданы произвольные отображения*

$$f : \{1, \dots, n-1\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

и

$$g : \{1, \dots, n-1\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Тогда существуют такие, соответственно, двумерная и трехмерная плоскости H_1 и H_2, проходящие через точку O, что

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} A_{f(i)}(H_1 \cap K_i) \neq \varnothing \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{n-2} B_{g(i)}(H_2 \cap K_i) \neq \varnothing.$$

Доказательство этих утверждений совершенно аналогично и опирается на тот факт, что для типичных компактов K и произвольного $i \leqslant n-1$ множества

$$X_i = \bigcup_{H_1 \in G_{2n}} A_{f(i)}(H_1 \cap K) \quad \text{и} \quad Y_i = \bigcup_{H_2 \in G_{3n}} B_{g(i)}(H_2 \cap K)$$

являются носителями не гомологичных нулю циклов из

$$H_{2(n-2)}(E_{2n}; \mathbb{Z}_2) \quad \text{и} \quad H_{3(n-3)}(E_{3n}; \mathbb{Z}_2)$$

соответственно. Далее по сформулированной выше лемме получаем, что индексы пересечения “циклов” X_i и Y_j соответственно равны 1. Значит $\bigcap\limits_{i=1}^{n-1} X_i \neq \varnothing$ и $\bigcap\limits_{j=1}^{n-2} Y_i \neq \varnothing$ для типичных компактов, а посредством предельного перехода переносим эти утверждения на произвольные выпуклые компакты.

То, что X_i является носителем ненулевого цикла в $H_{2(n-2)}(E_{2n};\mathbb{Z}_2)$ для типичного компакта K проводятся в [6] для

$$\bigcup_{H_1 \in G_{2n}} A_1(H_1 \cap K) \quad \text{и} \quad \bigcup_{H_1 \in G_{2n}} A_3(H_1 \cap K).$$

В остальных случаях рассуждение проводится совершенно аналогично.

Рассмотрим применение доказанной теоремы к задаче одновременной аппроксимации сечений выпуклых тел.

В выпуклой геометрии на плоскости важную роль играют вписанные и описанные аффинно-правильные шестиугольники. В частности, эти шестиугольники хорошо аппроксимируют выпуклые компакты. Действительно, пусть S_1 – вписанный, а S_2 – описанный вокруг выпуклого компактного тела K аффинно-правильные шестиугольники. Тогда

$$S(S_1) \leqslant S(K) \leqslant \frac{3}{2} S(S_1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} S(S_2) \leqslant S(K) \leqslant S(S_2),$$

причем оценка сверху для вписанного и оценка снизу для описанного шестиугольника достигаются для треугольника. Эти оценки играют важную роль, например, в теории укладок на плоскости.

Теорема 1. *Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$ – выпуклые компактные тела в $\mathbb{R}^n$ с общей внутренней точкой O. Тогда существует такая проходящая через O плоскость H и такие аффинно-правильные шестиугольники S_i, где $1 \leqslant i \leqslant n-2$, с центром в точке O, вписанные в $H \cap K_i$, что $S(S_i) \leqslant S(K_i \cap H) \leqslant 3/2 S(S_i)$. Константа $3/2$, вообще говоря, не может быть уменьшена.*

Доказательство. Применим предыдущую теорему для отображений A_3 для тел $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$ и A_3 для некоторого фиктивного тела. По теореме существует такая плоскость H, что

$$A_3(H \cap K_1) \cap A_3(H \cap K_2) \cap \ldots \cap O$$

– не пусто. Значит, эти аффинно-правильные шестиугольнки с общим центром в точке O должным образом аппроксимируют сечения плоскостью H выпуклых тел $K_1, K_2, \ldots, K_{n-2}$. Покажем, что оценку $3/2$ в общем случае уменьшить нельзя.

Возьмем в качестве K_1 симплекс T с вершинами $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$. Пусть O такая внутренняя точка симплекса T, которая делит хорду A_1B, проходящую через точку O, так что $2OA_1 < OB$.

Тело K_i – это симплекс, образованный гранью симплекса T, лежащей против вершины A_i и такой точкой A_i, лежащей внутри T, что хорда A_iB_i симплекса K_i, проходящая через точку O, делится так, что $2OA_i < OB_i$ (рис. 1).

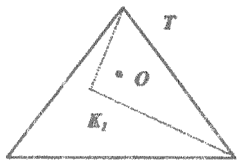

Рис. 1.

Хорошо известно, что хорда выпуклого компакта K, проходящая через центр O вписанного в этот компакт аффинно-правильного шестиугольника делится в точке O в отношении не более $2:1$. Поэтому плоскости H, для которых точка O является центром аффинно-правильных шестиугольников, вписанных в $H \cap K_i$ для $i \leqslant n-2$ не может пересекать грани симплекса T, лежащие против вершин $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$. Значит плоскость H может пересекать лишь три грани симплекса $K_1 = T$ старшей размерности, следовательно $H \cap K_1$ есть треугольник, что и доказывает точность содержащегося в теореме 2 неравенства.

Теорема 2. *Пусть $K_1, \ldots, K_{n-3}$ выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 4)$ с общей внутренней точкой O. Тогда найдутся такие, проходящие через точку O, двумерные плоскости $H_1, \ldots, H_{n-2}$, лежащие одновременно в некоторой трехмерной плоскости L, что $H_i \cap K_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n-3$ вписан некоторый аффинный образ правильного восьмиугольника с центром в точке O.*

Доказательство непосредственно следует из основной теоремы 1, утверждающей, что для некоторой трехмерной плоскости L множество

$$\bigcap_{i=1}^{n-3} B_4(L \cap K_i) \cap O = O.$$

Замечания. 1. Теоремы 2 и 3 легко переформулировать для аффинно-правильных шести и восьмиугольников, описанных вокруг соответствующих двумерных сечений компактов K_i.

2. Теоремы 2 и 3 обобщают теорему 1 [7] автора.

Литература

1. E. Fadell, S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk–Ulam and Bourgin–Yang theorems.* — Ergodic Theory Dynamical Systems **8** (1998), 73–85.
2. R. T. Živalevič, S. T. Vrečica, *An extension of the ham sandwich theorem.* — Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 183–186.
3. В. Л. Дольников, *Трансверсали семейств множеств в* $\mathbb{R}^n$ *и связь между теоремами Хелли и Борсука.* — Мат. сб. **184, No. 5** (1993), 111–131.
4. Л. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — Успехи мат. наук **10** (1944), 39–44.
5. В. В. Макеев, *Аффинно-вписанные и аффинно-описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **232** (1996), 286–298.
6. В. В. Макеев, *Некоторые специальные конфигурации плоскостей, связанные с выпуклыми компактами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998), 165–174.
7. В. В. Макеев, *Об аппроксимации плоских сечений выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 184–190.
8. В. В. Макеев, *Об аффинных образах ромбододекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 191–195.
9. G. Kuperberg, *Circumscribed constant width bodies with polytopes.* — Math. Mag. (в печати).

Makeev V. V., Muhin A. S. On common sections with given properties for finite set of convex compacts.

The general theorem below is proved.

Theorem. *Let O be the interior point for $n-2$ convex compacts $K_1, \dots, K_{n-2}$ in $\mathbb{R}^n$. There exists such two-dimensional plane H, passing through the point O, that for $i \leqslant n-2$ some affine image of the given centrally-summetric hexagon is inscribed in $K_i \cap H$ and has the center at point O. There exist such $n-3$ two-dimensional planes $H_1, \dots, H_{n-3}$, passing through the point O, and laying at the same time in three-dimensional plane, that for $i \leqslant n-3$ some affine image of regular octagon us inscribed in $H_i \cap K_i$ and has the center at point O.*

Санкт-Петербургский
государственный
университет

Поступило 28 июня 1999 г.