Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

Н. Ю. Нецветаев

О ГОМОЛОГИЯХ ВОЗМУЩЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

§0. Введение

В дальнейшем мы пользуемся гомологиями и когомологиями только с целыми коэффициентами. Через $b_n(X)$ мы обозначаем число Бетти $\operatorname{rk} H_n(X)$.

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — неособая гиперповерхность степени d. Как хорошо известно, ее дифференциально-топологический тип определен числами n и d: $X \cong X_n(d)$. В качестве модельной можно взять гиперповерхность, заданную уравнением Ферма:

$$X_n(d) := \left\{ (z_0 : z_1 : \cdots : z_{n+1}) \in \mathbb{C}P^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n+1} z_i^d = 0 \right\}.$$

Строение гиперповерхности $X_n(d)$ достаточно подробно изучалось У. Браудером, Р. С. Кулкарни, А. С. Либгобером, Дж. У. Вудом и другими (ср. [1]). Здесь мы упомянем лишь некоторые нужные нам в дальнейшем факты. Из теоремы Лефшеца о гиперплоском сечении легко следует, что если $i \neq n$, то $H_iX = H_i\mathbb{C}P^n$. Напомним, что

$$H_i\mathbb{C}P^n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } i \text{ четно, } i \leqslant 2n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть y — образующая группы $H^2X = \mathbb{Z}$. При четном n пусть $h \in H_nX$ — гомологический класс, двойственный классу $y^{n/2}$. Класс h примитивен (неделим).

Нас интересует связь между гомологиями гиперповерхностей $X_n(d)$ и $X_n(d+1)$.

Пусть $X_d \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — неособая гиперповерхность, $H \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — трансверсальная к ней гиперплоскость и X_{d+1} — неособая гиперповерхность, полученная малым возмущением гиперопверхно-

---

Работа частично поддержана грантом РФФИ, 98-01-832, и грантом поддержки научных школ, 96-15-96-075.

сти $X_d \cup H$. Мы можем считать, что возмущение происходит в тоненькой трубчатой окрестности пересечения $X_d \cap H$, а дополнение подвергается лишь малой изотопии. Тогда "компактифицированную аффинную часть" $X'_d = X_d \setminus U(H)$ можно считать лежащей в X_{d+1}. Включение определено не однозначно, но произвол в его выборе здесь для нас не важен.

0.1. Теорема. *Пусть $X_d \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ – неособая гиперповерхность, $H \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ – гиперплоскость, X_{d+1} – возмущение гиперповерхности $X_d \cup H$.*

"Включение" $X'_d = X_d \setminus U(H) X_{d+1}$ индуцирует в гомологиях включение на прямое слагаемое, причем в случае четного n это слагаемое вместе с алгебраическим классом кратного гиперплоского сечения h_{d+1} также порождает прямое слагаемое. Другими словами:

(1) *алгебраический класс $h_{d+1} \in H_n X_{d+1}$ неделим,*

(2) *гомоморфизм включения $H_n X'_d \to H_n X_{d+1}$ — мономорфизм на примитивную подрешетку и*

(3) $\langle h_{d+1} \rangle \oplus H_n X'_d \subset H_n X_{d+1}$ *— тоже примитивная подрешетка.*

Отметим, что п. (1) принадлежит Либгоберу и Вуду и приведен здесь только для ясности формулировки.

Эта теорема анонсирована в [3] (см. там теорему 2.1), где она использовалась в доказательстве топологической стандартности некоторых гиперповерхностей с квадратичными особенностями. Доказательство в [3] не приводилось из-за его громоздкости. Здесь мы описываем план доказательства, опуская доказательства вспомогательных утверждений. Подробное доказательство будет опубликовано отдельно.

§1. Доказательство п. (2) теоремы 0.1

Как легко видеть, справедливость утверждения теоремы не зависит от конкретного выбора X_d, H и X_{d+1}, и следовательно мы можем взять, например, $X_d = X_n(d)$ и $H = \{z_0 = 0\}$ и рассмотреть какое-нибудь конкретное возмущение, которое можно успешно смоделировать на топологическом уровне.

Можно считать, что возмущение происходит вблизи пересечения $X_d \cap H$. Введем обозначения (через U обозначается трубчатая окрестность):

• $X'_d \cong X_d \setminus U(H)$ – (компактная) аффинная часть гиперповерхности X_d,

• $Y_d = X_d \cap H$,

• $H' \cong H \setminus U(Y_d)$ – дополнение в $H = \mathbb{C}P^n$ окрестности гиперплоского сечения X_d,

• $Y_{d+1} \subset H$ – гиперповерхность, трансверсальная Y_d,

• $W = (H \setminus Y_d) \cup Y_{d+1}$.

Нам потребуется следующий результат.

1.1. Утверждение. *Пара (N, W) n-связна.*

Это следствие сформулированного ниже более общего утверждения.

1.2. Теорема. *Пусть X, $Y \subset \mathbb{C}P^n$ – две гиперповерхности (с произвольными особенностями). Тогда пара $(\mathbb{C}P^n, (\mathbb{C}P^n \setminus X) \cup Y)$ n-связна.*

Перейдем непосредственно к доказательству п. (2). Как можно показать, возмущенная гиперповерхность X_{d+1} состоит из трех частей, соответственно диффеоморфных X'_d, H' и расслоению со слоем $D^2 \times D^2$ над полным пересечением $Y_d \cap Y_{d+1}$ мультистепени $(d, d+1)$ в $H = \mathbb{C}P^n$.

Таким образом,

$$X_{d+1} \setminus X'_d \underset{\text{diff.}}{\cong} H' \cup (X_{d+1} \cap U(Y_{d+1})) \underset{\text{g.ff.}}{\simeq} W.$$

Рассмотрим включение

$$X'_d \hookrightarrow X_{d+1}.$$

Чтобы показать, что в n-мерных гомологиях оно индуцирует вложение на прямое слагаемое, нужно доказать следующие два утверждения.

1.3. Утверждение. *Группа $H^n W = H_n(X_{d+1}, X'_d)$ свободна, т.е. $\operatorname{Tors} H_{n-1} W = 0$.*

1.4. Утверждение. *Гомоморфизм*

$$H^{n-1} X_{d+1} \to H^{n-1} W = H_{n+1}(X_{d+1}, X'_d)$$

является эпиморфизмом.

Оба эти утверждения следуют из n-связности пары $(\mathbb{C}P^n, W)$ (см. утверждение 1.1).

§2. Алгебраические леммы

Как обычно, *решеткой* будем называть свободную абелеву группу L, на которой определена целочисленная симметричная билинейная форма. Определитель матрицы этой формы в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе называется *дискриминантом* решетки L.

Решетка называется *унимодулярной*, или *неособой*, если ее дискриминант равен ± 1. Решетка называется *невырожденной*, если ее дискриминант не равен нулю. (Таким образом, невырожденная решетка может быть особой.)

Если решетка L вырождена, то под ее "дискриминантом" и "дискриминантной группой" будем понимать дискриминант и дискриминантную группу ее невырожденной части $L/\operatorname{Rad}(L)$.

2.1. Лемма. *Пусть L — решетка, а L_1, L_2 — две ее примитивные невырожденные подрешетки. Если они ортогональны и их дискриминанты взаимно просты, то $L_1 \oplus L_2 \subset L$ — также примитивная подрешетка.*

2.2. Лемма. *Пусть L — невырожденная (возможно, особая) решетка, и пусть L_1, $L_2 \subset L$ — две ее примитивные подрешетки ц $L_1 \cap L_2 = \{0\}$, причем L_1, возможно, вырожденна, а L_2 — нет.*

Пусть решетки L_1 и L_2 взаимно-ортогональны, а их дискриминанты d_1 и d_2 взаимно просты.

Кроме того, потребуем, чтобы образ решетки L_2 в факторе ортогонального дополнения по радикалу $\overline{L_2} \subset (L_1)^{\perp}/\operatorname{Rad}$ был бы неделим. (В случае, когда решетка L_1 невырожденна, это условие пусто.)

Тогда их сумма $L_1 \oplus L_2 \subset L$ — тоже примитивная подрешетка.

2.3. Следствие. *Пусть L — унимодулярная решетка, $L_1 \subset L$ — примитивная вырожденная подрешетка, $d = |D(L_1/\operatorname{Rad})|$ — дискриминант ее невырожденной части, $h \in (L_1)^{\perp}$ — (неделимый) элемент с $h^2 = d + 1$. Если образ элемента h в факторе ортогонального дополнения по радикалу $\overline{h} \in (L_1)^{\perp}/\operatorname{Rad}$ неделим, то $\langle h\rangle \oplus L_1 \subset L$ —примитивная подрешетка.*

§3. Доказательство п. (3) теоремы 0.1

Обратимся к модели, уже использовавшейся в §1. Пусть

- $X_{d+1} = X'_d \cup \widehat{H}$ — гиперповерхность степени $d+1$,

• $Y_{d+1} \subset \widehat{H}$ — "гиперкривая" степени $d+1$ (настоящее пересечение гиперплоскости H и гиперповерхности X_{d+1}),

• $\widetilde{H}$ — результат раздутия H вдоль $Y_d \cap Y_{d+1}$,

• $\widetilde{Y}_d$, $\widetilde{Y}_{d+1} \subset \widetilde{H}$ собственные прообразы Y_d и Y_{d+1} при раздутии $\widetilde{H} \to H$:

$$\widetilde{H} = U(\widetilde{Y}_d) \cup \widehat{H}$$

Тогда кратные гиперплоские сечения Z_d и Z_{d+1} гиперповерхностей $\widetilde{Y}_d$ и $\widetilde{Y}_{d+1}$ реализуют в $\widetilde{H}$ классы $\widetilde{h}_d$, $\widetilde{h}_{d+1}$,

$$(\widetilde{h}_{d+1})^2 = d+1; \quad (\widetilde{h}_d)^2 = -d, \quad \widetilde{h}_d \cdot \widetilde{h}_{d+1} = 0.$$

Как следует из результатов работы [2], $H_n(X_{d+1})$ "склеивается" из невырожденных частей решеток X'_d и $\widehat{H}$ плюс гиперболическая решетка:

$$H_n(X_{d+1}) \cong \Big(H_n(\widehat{H})/\operatorname{Rad} \widetilde{\oplus} H_n(X'_d)/\operatorname{Rad}\Big) \oplus \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

причем

$$H_n(\widehat{H})/\operatorname{Rad} \to (H_n X'_d)^{\perp}/\operatorname{Rad} \tag{$*$}$$

— вложение на примитивную подрешетку. (Склеивание происходит вдоль $\mathbb{Z}_d$ (у $H_n X'_d$ невырожденная часть имеет дискриминантную группу $\mathbb{Z}_d$).)

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\widehat{H}) & \to & \underbrace{H_n(\widehat{H})/\operatorname{Rad} \cong (\widetilde{h}_d)^{\perp}} & \subset & H_n(\widetilde{H}) \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ \widehat{h}_{d+1} & \mapsto & \overline{\widehat{h}}_{d+1} & \mapsto & \widetilde{h}_{d+1} \end{array} \tag{$**$}$$

Следующая лемма доказывается "геометрически".

Лемма. *Элемент $\widetilde{h}_{d+1} \in H_n(\widetilde{H})$ неделим.*

Следовательно,

$$\overline{\widehat{h}}_{d+1} \in H_n(\widehat{H})/\operatorname{Rad} \ \text{ неделим} \tag{$***$}$$

и

$$\overline{h}_{d+1} \in (H_n X'_d)^{\perp}/\operatorname{Rad} \ \text{ неделим.} \tag{$****$}$$

Отсюда вытекает требуемое в силу вышедоказанной леммы 2.2 (точнее, ее следствия 2.3, где нужно положить $L = H_n(X_{d+1})$, $L_1 = H_n X'_d$, $h = h_{d+1}$).

Литература

1. A. Dimca, *Topology of complex hypersurfaces with isolated singularities.* 1991.
2. О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, *О форме пересечений результата склеивания многообразий с вырожденными формами пересечений.* — Записки науч. семин. ПОМИ **231** (1995), 169–179.
3. Н. Ю. Нецветаев, *О топологическом строении комплексных гиперповерхностей с квадратичными особенностями.* — Записки науч. семин. ПОМИ **231** (1995), 210–221.

Netsvetaev N. Yu. On the homology of a perturbation of a complex projective hypersurfaces.

A nonsingular hypersurface X in $\mathbb{C}P^{n+1}$ with $n \geqslant 3$ are studied. We state a theorem saying that the homology coming from the affine part of a hypersurface of smaller degree forms a durect summand in the homology of X, which is independent over integers with the class of the multiple hyperplane section. The proof is outlined.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 мая 1999 г.