Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

С. С. Подкорытов

АЛЬТЕРНАТИВНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛАБОЙ ФОРМЫ ТЕОРЕМЫ СЕРРА

В настоящей работе мы излагаем доказательство слабой формы теоремы Серра о конечности стабильных гомотопических групп сфер (следствие VI), не использующее пространств петель и спектральных последовательностей.

Соглашение. Сингулярные симплексы будем всегда предполагать кусочно-линейными. Соответствующим образом будем понимать цепи, гомологии и т. д.

§0. Основные объекты и термины

Фиксируем компактные полиэдры X и Y. Пусть A – множество кусочно-линейных отображений $a\colon X \to Y$. Если Q – абелева группа, то всякое отображение $f\colon A \to Q$ будем называть *функционалом*. Мы называем функционал f *гомотопически инвариантным*, если $f(a)$ зависит только от гомотопического класса отображения a.

Подчиненные функционалы. Пусть Q и Q' – две абелевы группы и $f\colon A \to Q$ и $f'\colon A \to Q'$ – два функционала. Пусть $R \subset Q$ – подгруппа, порождённая элементами $f(a)$, $a \in A$. Будем говорить, что функционал f' *подчинен* функционалу f, если найдется такой гомоморфизм $t\colon R \to Q'$, что $f'(a) = t(f(a))$, $a \in A$.

[Очевидно, что отношение подчиненности транзитивно.]

Имеет место следующее несложное утверждение.

I. Предложение. *Функционал f подчинён функционалу f' тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $v_k \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in A$, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеет место импликация*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k f(a_k) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} v_k f'(a_k) = 0. \qquad \bullet$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 98-01-832 и 96-15-96-075).

§1. Функционал $i\colon A \to F$

Пусть F — группа $\mathbb{Z}$-значных функций на множестве $X \times Y$. Введем функционал

$$i\colon A \to F, \quad i(a)(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } a(x) = y, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad x \in X,\ y \in Y.$$

[Иначе говоря, $i(a)$ – характеристическая функция графика отображения $a\colon X \to Y$. Отметим, что в дальнейшем ключевую роль играют функционалы, подчиненные функционалу i.]

§2. Функционал $g\colon A \to H_d(E, E_0)$

Обозначения. Будем считать, что полиэдр X лежит в пространстве $\mathbb{R}^d$. Пусть $B \subset \mathbb{R}^d$ – компактный полиэдр такой, что $\operatorname{int} B \supset X$, и пусть $r\colon B \to X$ – какая-нибудь кусочно-линейная ретракция. Пусть $E = B \times Y$, $p\colon E \to B$ – проекция. Пусть S – множество кусочно-линейных сечений расслоения (E, B, p), т.е. отображений $s\colon B \to E$ с $p \circ s = \mathrm{id}_B$. [Заметим, что образы отображений из S – это графики отображений $B \to Y$.] Введем отображения

$$A \to S, \quad \phi \mapsto \phi^{\mathrm{s}} := \mathrm{id}_B \times (\phi \circ r)$$

и

$$S \to A, \quad s \mapsto s^{\mathrm{a}} := \mathrm{pr}_Y \circ (s|_X),$$

где $\mathrm{pr}_Y\colon E \to Y$ – проекция. Пусть

$$B_0 = B \setminus X, \quad E_0 = p^{-1}(B_0) = B_0 \times Y.$$

Пусть $o \in H_d(B, B_0)$ – фундаментальный класс, соответствующий канонической ориентации пространства $\mathbb{R}^d$. Введем функционал

$$g\colon A \to H_d(E, E_0), \quad \phi \mapsto \phi^{\mathrm{s}}_*(o).$$

Замечание. Можно показать, что группа $H_d(E, E_0)$ канонически изоморфна группе гомотопических классов морфизмов комплекса цепей полиэдра X в комплекс цепей полиэдра Y, причём для любого $\phi \in A$ элементу $g(\phi)$ соответствует класс морфизма, индуцированного отображением ϕ.

II. Теорема. (а) *Функционал* $g\colon A \to H_d(E, E_0)$ *подчинен функционалу* $i\colon A \to F$.

(б) *Всякий гомотопически инвариантный функционал* $f\colon A \to Q$, *подчиненный функционалу* i, *подчинён функционалу* g.

[Иначе говоря, функционал g – универсальный гомотопически инвариантный функционал, подчиненный функционалу i. Отметим, что для доказательства следствия VI нам нужен только п. (б) теоремы II.]

Для доказательства п. (а) нам потребуется следующее несложное утверждение.

2.1. Утверждение. *Пусть для некоторого* $n \in \mathbb{N}$ *и некоторых* $v_k \in \mathbb{Z}$ *и* $a_k \in A$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *имеем*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k i(a_k) = 0.$$

Тогда существует такой цикл $c \in C_d(B, B_0)$, *представляющий класс* o, *что в группе* $C_d(E, E_0)$ *имеем*

$$\sum_{k=1}^{n} v_k a^{\mathrm{s}}_{k\,*}(c) = 0.$$

Доказательство. Выберем триангуляции полиэдров B и E, относительно которых сечения $a^{\mathrm{s}}_1, \dots, a^{\mathrm{s}}_n$ симплициальны. Тогда достаточно выбрать цикл c так, чтобы образ каждого его сингулярного симплекса содержался в некотором симплексе выбранной триангуляции. •

Доказательство п. (а) теоремы II. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и некоторых $v_k \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in A$, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} v_k i(a_k) = 0.$$

Согласно предложению I достаточно показать, что тогда

$$\sum_{k=1}^{n} v_k g(a_k) = 0,$$

а это, в свою очередь, следует из утверждения 2.1. •

Для доказательства п. (б) теоремы II нам потребуются нижеследующее утверждение 2.2 и предложения 2.3 и 2.4.

2.2. Утверждение. *Пусть для некоторого* $N \in \mathbb{N}$ *и некоторых* $v_k \in \mathbb{Z}$, $s_k \in S$ *и циклов* $c_k \in C_d(B, B_0)$, *представляющих класс* o, $1 \leqslant k \leqslant N$, *в группе* $C_d(E, E_0)$ *имеем*

$$\sum_{k=1}^{N} v_k s_{k\,*}(c_k) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} v_k i(s_k^{\mathrm{a}}) = 0.$$

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y \in Y$. Положим

$$j(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s(x) = (x, y), \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \qquad s \in S.$$

Нужно показать, что

$$\sum_{k=1}^{N} v_k j(s_k) = 0.$$

Выберем коцикл $t \in C^d(B, B \setminus x)$, представляющий фундаментальный когомологический класс, соответствующий канонической ориентации пространства $\mathbb{R}^d$. Определим коцепь $u \in C^d(E, E_0)$, для каждого сингулярного симплекса $Z \colon \Delta^d \to E$ полагая

$$u(Z) = \begin{cases} t(p \circ Z), & \text{если } Z(\Delta^d) \ni (x, y), \\ 0 & \text{иначе}. \end{cases}$$

Легко проверить, что тогда для любого $s \in S$ и для любого цикла $c \in C_d(B, B_0)$, представляющего класс o, имеем $\langle u, s_*(c) \rangle = j(s)$. В силу этого из предположения следует нужное соотношение. •

Правильные сингулярные симплексы и цепи. Будем использовать слово “правильный” в особом смысле.

Пусть $0 \leqslant k \leqslant d+1$. Сингулярный симплекс $z \colon \Delta^k \to B$ будем называть *правильным*, если отображение z линейно по отношению к пространству $\mathbb{R}^d$ и, для $k \leqslant d$, инъективно или, для $k = d+1$, инъективно на каждой d-мерной грани симплекса Δ^k.

Сингулярный симплекс $Z\colon \Delta^k \to E$ будем называть *правильным*, если сингулярный симплекс $p\circ Z$ правилен. Цепь – элемент группы $C_k(B, B_0)$ или $C_k(E, E_0)$ – будем называть *правильной*, если все её сингулярные симплексы правильны.

2.3. Предложение. *Пусть $K \in C_{d+1}(E, E_0)$. Предположим, что цепь ∂K правильна. Тогда для некоторого $l \geqslant 0$ существует правильная цепь $L \in C_{d+1}(E, E_0)$ с $\partial L = \beta^l(\partial K)$.*

Доказательство. Для $0 \leqslant k \leqslant d+1$ пусть $c_k \in \Delta^k$ – центр симплекса, T_k – множество симплициальных вложений $t\colon \Delta^k \to \Delta^{d+1}$, сохраняющих порядок вершин.

Выберем большое l. Для некоторого $m \geqslant 0$ и некоторых $u_j \in \mathbb{Z}$ и сингулярных симплексов $Z_j\colon \Delta^{d+1} \to E$, $1 \leqslant j \leqslant m$, в группе $C_{d+1}(E, E_0)$ имеем

$$\beta^{l-1}(K) = \sum_{j=1}^{m} u_j[Z_j].$$

Будем считать, что выпуклая оболочка образа каждого сингулярного симплекса $z_j = p \circ Z_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, содержится в множестве $\operatorname{int} B$.

С каждым сингулярным симплексом $Z\colon \Delta^k \to E$, $0 \leqslant k \leqslant d+1$, который встречается среди сингулярных симплексов $Z_j \circ t$, $t \in T_k$, $1 \leqslant j \leqslant m$, сопоставим точку $b_k(Z) \in B$: если сингулярный симплекс Z правилен, то положим $b_k(Z) = p(Z(c_k))$, иначе выберем точку $b_k(Z)$ вблизи точки $p(Z(c_k))$.

Определим сингулярные симплексы $z'_j\colon \Delta^{d+1} \to B$, $1 \leqslant j \leqslant m$, полагая

$$z'_j(t(c_k)) = b_k(Z_j \circ t), \quad t \in T_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant d+1,$$

и требуя, чтобы отображения z'_j были линейными на симплексах барицентрического подразделения симплекса Δ^{d+1}.

Определим сингулярные симплексы $Z'_j\colon \Delta^{d+1} \to E$, $1 \leqslant j \leqslant m$, условиями $p \circ Z'_j = z'_j$, $q \circ Z'_j = q \circ Z_j$, где $q\colon E \to Y$ – проекция. Положим

$$L = \sum_{j=1}^{m} u_j \beta([Z'_j]).$$

Легко убедиться, что тогда выполняется требуемое соотношение и что при общем выборе точек $b_k(Z)$ цепь L будет правильной. $\bullet$

2.4. Предложение. *Пусть* $Z\colon \Delta^{d+1} \to E$ – *правильный сингулярный симплекс. Тогда существуют пара гомотопных сечений* $s, s' \in S$ *и пара циклов* $c, c' \in C_d(B, B_0)$, *представляющих класс* o, *такие, что в группе* $C_d(E, E_0)$ *имеем*

$$\partial[Z] = s'_*(c') - s_*(c).$$

Доказательство. Пусть $z = p \circ Z$. Будем называть *верхними* те d-мерные грани симплекса Δ^{d+1}, на которых ориентация, индуцированная канонической ориентацией пространства $\mathbb{R}^d$ посредством отображения z, совпадает с ориентацией, индуцированной канонической ориентацией симплекса Δ^{d+1}; остальные d-мерные грани будем называть *нижними*.

Рассмотрим выпуклый многогранник $D = z(\Delta^{d+1})$. Существуют такие кусочно-линейные отображения $h, h'\colon D \to \Delta^{d+1}$, совпадающие на границе многогранника D, что $z \circ h = z \circ h' = \mathrm{id}_B|_D$ и $h(D)$ есть объединение нижних граней симплекса Δ^{d+1}, а $h'(D)$ – верхних. Построим сечения s, s', полагая $s|_D = Z \circ h$, $s'|_D = Z \circ h'$ и продолжая так, чтобы они совпадали вне внутренности многогранника D.

Определим цепи $k, k' \in C_d(B, B_0)$: пусть k есть алгебраическая сумма тех граней сингулярного симплекса z, которые соответствуют нижним граням симплекса Δ^{d+1}, k' – тех, которые соответствуют верхним, причём $\partial[z] = k' - k$. Тогда ∂k – как бы фундаментальный цикл границы многогранника D. Выберем такую цепь $k_0 \in C_d(B, B_0)$, что она не задевает внутренность многогранника D, $\partial k_0 = \partial k$ и цикл $k - k_0$ представляет класс o.

Положим $c = k - k_0$, $c' = k' - k_0$. Легко проверить, что тогда выполняется требуемое соотношение. •

Доказательство п. (б) теоремы II. Пусть для некоторого $n \geqslant 0$ и некоторых $v_k \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in A$, $1 \leqslant k \leqslant n$, выполняется

$$\sum_{k=1}^{n} v_k g(a_k) = 0.$$

Согласно предложению I достаточно показать, что тогда

$$\sum_{k=1}^{n} v_k f(a_k) = 0.$$

Выберем правильный цикл $c_0 \in C_d(B, B_0)$, представляющий класс o. Из предположения следует, что существует такая цепь $K \in C_{d+1}(E, E_0)$, что

$$\sum_{k=1}^{n} v_k a^{\mathrm{s}}_{k\,*}(c_0) = \partial K.$$

В силу предложений 2.3 и 2.4 для некоторых $l \geqslant 0$ и $m \geqslant 0$ существуют такие $u_j \in \mathbb{Z}$, пары гомотопных сечений $s_j, s'_j \in S$ и пары циклов $c_j, c'_j \in C_d(B, B_0)$, представляющих класс o, $1 \leqslant j \leqslant m$, что

$$\sum_{k=1}^{n} v_k a^{\mathrm{s}}_{k\,*}(\beta^l(c_0)) = \sum_{j=1}^{m} u_j(s'_{j\,*}(c'_j) - s_{j\,*}(c_j)).$$

Тогда согласно утверждению 2.2

$$\sum_{k=1}^{n} v_k i(a_k) = \sum_{j=1}^{m} u_j(i(s'^{\,\mathrm{a}}_j) - i(s^{\mathrm{a}}_j)).$$

Так как функционал f подчинён функционалу $i\colon A \to F$ и гомотопически инвариантен, отсюда следует нужное соотношение. •

§3. Функционал h

Введем функционал

$$h\colon A \to \operatorname{Hom}(H_*(X), H_*(Y)), \qquad \phi \mapsto \phi_*.$$

Из теоремы II вытекает следующее утверждение.

III. Следствие. (а) *Функционал h подчинен функционалу $i\colon A \to F$.*

(б) *Пусть $f\colon A \to Q$ – гомотопически инвариантный функционал, подчиненный функционалу i, причём* $\operatorname{Tors} Q = 0$. *Тогда функционал f подчинён функционалу h.*

[Таким образом, функционал h так же, как и функционал g, обладает свойством универсальности, но только для подчиненных функционалу i гомотопически инвариантных функционалов со значениями в абелевых группах без кручения.]

Доказательство. (а) В силу п. (а) теоремы II достаточно показать, что функционал h подчинён функционалу $g\colon A \to H_d(E, E_0)$. Рассмотрим гомоморфизмы

$$p^*\colon H^*(B, B_0) \to H^*(E, E_0), \qquad q_*\colon H_*(E \setminus E_0) \to H_*(Y),$$

индуцированные проекциями. Имеем

$$a_*(u \cap o) = q_*(p^*(u) \cap a_*^{\mathrm{s}}(o)), \qquad u \in H^*(B, B_0).$$

В силу двойственности Лефшеца отсюда следует то, что нужно.

(б) Это легко вывести из п. (б) теоремы II с помощью формулы Кюннета и соотношения

$$\langle u \times v, a_*^{\mathrm{s}}(o)\rangle = (-1)^{mn}\langle v, a_*(u \cap o)\rangle, \qquad u \in H^m(B, B_0),\ v \in H^n(Y),$$

используя то, что группы $H_*(B, B_0)$ и $H_*(Y)$ конечно порождены. •

[Для доказательства следствия VI нам потребуется только п. (б) следствия III.]

§4. Функтор P и функционал $q\colon A \to \mathrm{Hom}(P(Y), P(X))/\,\mathrm{Tors}$

Фиксируем контравариантный функтор P из категории компактных полиэдральных пар и кусочно-линейных отображений в категорию абелевых групп. Положим $P(W) := P(W, \varnothing)$. В дальнейшем мы предполагаем, что функтор P удовлетворяет следующим условиям:

для любого триангулированного компактного полиэдра W при каждом $k \geqslant 0$

(1) для последовательности гомоморфизмов

$$P(W^{(k)}, W^{(k-1)}) \xrightarrow{n_k^*} P(W^{(k)}) \xrightarrow{m_k^*} P(W^{(k-1)}),$$

индуцированных включениями, имеем

$$\ker m_k^* \subset \operatorname{im} n_k^*;$$

(2) рассматривая все k-мерные симплексы $\Delta \subset W$, для гомоморфизмов

$$P(W^{(k)}, W^{(k-1)}) \xrightarrow{j^*} P(\Delta, \partial\Delta),$$

индуцированных включениями $j\colon (\Delta, \partial\Delta) \to (W^{(k)}, W^{(k-1)})$, имеем

$$\bigcap_j \ker j^* = 0.$$

Заметим, что из условия (2) следует, что $P(\varnothing)=0$.

Введем функционал

$$q\colon A\to \operatorname{Hom}(P(Y),P(X))/\operatorname{Tors},\qquad q(a)=a^*\bmod \operatorname{Tors}.$$

IV. Теорема. *Функционал q подчинён функционалу $i\colon A\to F$.*

Все, что нам нужно для доказательства следствия VI, это следующее утверждение.

V. Следствие. *Если функционал q гомотопически инвариантен, то он подчинён функционалу $h\colon A\to \operatorname{Hom}(H_*(X),H_*(Y))$.*

Доказательство. Это очевидно следует из теоремы IV и п. (б) следствия III. •

Для доказательства теоремы IV нам потребуется следующая лемма.

4.1. Лемма. *Пусть W – компактный полиэдр, на котором кусочно-линейно действует конечная группа G. Пусть $c\colon G\to\mathbb{Z}^*=\{0,1\}$ – гомоморфизм. Пусть, кроме того, для любой точки $w\in W$ существует элемент $g\in G$ такой, что $c(g)=-1$ и $g(w)=w$. Тогда при некотором $M\in\mathbb{N}$ имеем $Mx=0$ для любого элемента $x\in P(W)$ такого, что $g^*(x)=c(g)x$ при всех $g\in G$,*

Доказательство. Выберем триангуляцию полиэдра W, относительно которой группа G действует симплициально. Введём обозначения для гомоморфизмов, индуцированных включениями:

$$P(W^{(k)},W^{(k-1)})\xrightarrow{n_k^*}P(W^{(k)})\xrightarrow{m_k^*}P(W^{(k-1)}).$$

Покажем по индукции, что для каждого $k\geqslant -1$ существует такое $M_k\in\mathbb{N}$, что $M_kx=0$ для любого элемента $x\in P(W^{(k)})$ такого, что $g^*(x)=c(g)x$ при всех $g\in G$.

База индукции $k=-1$ тривиальна; положим $M_{-1}=1$.

Покажем, что для $k\geqslant 0$ можно положить $M_k=2|G|M_{k-1}$. Пусть $x\in P(W^{(k)})$ – такой элемент, что $g^*(x)=c(g)x$, $g\in G$. Из предположения индукции следует, что $M_{k-1}m_k^*(x)=0$. Согласно условию (1) существует такой элемент $y\in P(W^{(k)},W^{(k-1)})$, что $n_k^*(y)=M_{k-1}x$. Рассмотрим элемент

$$y^{\mathrm{g}}=\sum_{g\in G}c(g)g^*(y).$$

Легко проверить, что $g^*(y^{\mathrm{g}}) = c(g)y^{\mathrm{g}}$, $g \in G$. Имеем

$$n_k^*(y^{\mathrm{g}}) = M_{k-1} \sum_{g \in G} c(g) g^*(x) = |G| M_{k-1} x.$$

Достаточно показать, что $2y^{\mathrm{g}} = 0$. Пусть $\Delta \subset W$ – произвольный k-мерный симплекс выбранной триангуляции,

$$P(W^{(k)}, W^{(k-1)}) \xrightarrow{j^*} P(\Delta, \partial\Delta)$$

– гомоморфизм, индуцированный включением. В силу условия (2) достаточно показать, что $2j^*(y^{\mathrm{g}}) = 0$. Легко видеть, что из предположения леммы следует, что существует такой элемент $g \in G$, что $c(g) = -1$ и он действует неподвижно на симплексе Δ. Имеем

$$j^*(y^{\mathrm{g}}) = g^*(j^*(y^{\mathrm{g}})) = j^*(g^*(y^{\mathrm{g}})) = -j^*(y^{\mathrm{g}}).$$

Так как при больших k имеем $W^{(k)} = W$, то из доказанного следует утверждение леммы. $\bullet$

Доказательство теоремы IV. Пусть для некоторого $n \geqslant 0$ и некоторых $v_k \in \mathbb{Z}$ и $a_k \in A$, $1 \leqslant k \leqslant n$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} v_k i(a_k) = 0.$$

Согласно предложению I достаточно показать, что тогда

$$\sum_{k=1}^{n} v_k q(a_k) = 0.$$

Будем считать, что $X \neq \varnothing$, – иначе неинтересно. Легко видеть, что тогда

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 0.$$

Не умаляя общности, будем считать, что $v_k = \pm 1$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Пусть $W \subset Y^n$ – компактный подполиэдр, образованный такими наборами $(y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$, что для любой точки $y \in Y$ сумма чисел v_k по тем k, для которых $y_k = y$, равна нулю: $\sum_{k:\, y_k = y} v_k \equiv 0$.

Пусть G – группа, состоящая из всех перестановок $g\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$, для которых существует такое $c(g)=\pm 1$, что $v_{g(k)} = c(g)v_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда определён гомоморфизм $c\colon G \to \mathbb{Z}^*$.

Группа G действует на полиэдре W перестановками координат. Легко видеть, что для любой точки $w \in W$ существует такой элемент $g \in G$, что $c(g) = -1$ и $g(w) = w$.

Пусть $p_k\colon W \to Y$, $1 \leqslant k \leqslant n$, – сужения проекций. Определим гомоморфизм $s\colon P(Y) \to P(W)$ формулой

$$s = \sum_{k=1}^{n} v_k p_k^*.$$

Легко проверить, что тогда $g^* \circ s = c(g)s$, $g \in G$. В силу леммы 4.1 существует такое $M \in \mathbb{Z}$, $M \neq 0$, что $Ms = 0$.

Из предположения следует, что можно определить отображение $u\colon X \to W$ формулой $u(x) = (a_1(x),\dots,a_n(x))$, $x \in X$. Тогда $a_k = p_k \circ u$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Поэтому

$$M \sum_{k=1}^{n} v_k a_k^* = 0,$$

что и нужно. •

§5. Стабильные гомотопические группы сфер

Напомним, опуская пояснения, определения стабильных когомотопических групп, приведённых и неприведённых:

$$\widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^n(V) = \operatorname{colim}_{k\to+\infty}[S^k(V), S^{n+k}],$$

$$\pi_{\mathrm{s}}^n(W, W') = \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^n(W/W'),$$

$$\pi_{\mathrm{s}}^n(W) = \pi_{\mathrm{s}}^n(W, \varnothing) = \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^n(W_+).$$

Отметим, что при любом n функтор π_{s}^n удовлетворяет условиям (1) и (2) из §4, налагаемым на функтор P.

VI. Следствие (Серр). *Пусть $n \neq 0$. Тогда $\widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^n(S^0) = \mathrm{Tors}$.*

Доказательство. Пусть $k \geqslant 0, -n$. Рассмотрим сохраняющие отмеченные точки кусочно-линейные отображения

$$a_0, a\colon S^k \to S^{n+k},$$

a_0 – постоянное, a – произвольное. Так как $n \neq 0$, то для индуцированных гомоморфизмов

$$a_{0\,*}, a_*\colon H_*(S^k) \to H_*(S^{n+k})$$

имеем $a_{0\,*} = a_*$. Поэтому согласно следствию V для индуцированных гомоморфизмов

$$a_0^*, a^*\colon \pi_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^{n+k}) \to \pi_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^k)$$

имеем $a^* \equiv a_0^*$ (mod Tors). Так как абсолютизация $r\colon \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^k) \to \pi_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^k)$ есть мономорфизм, то для индуцированных гомоморфизмов

$$\widetilde{a}_0^*, \widetilde{a}^*\colon \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^{n+k}) \to \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^k)$$

тоже имеем $\widetilde{a}^* \equiv \widetilde{a}_0^*$ (mod Tors). Но $\widetilde{a}_0^* = 0$, поэтому $\widetilde{a}^* \in \mathrm{Tors}$.

Для любого элемента $x \in \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^n(S^0)$ для некоторого $k \geqslant 0, -n$ существует отображение

$$a\colon S^k \to S^{n+k}$$

с $\widetilde{a}^*(u) = s^k(x)$, где $s^k\colon \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^n(S^0) \to \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^k)$ – изоморфизм кратной надстройки, а $u \in \widetilde{\pi}_{\mathrm{s}}^{n+k}(S^{n+k})$ – каноническая образующая. В силу предыдущего отсюда следует требуемое. $\bullet$

Podkorytov S. S. An alternative proof of a weak form of Serre's theorem.

A proof of a weak form of Serre's theorem on the finiteness of stable homotopy groups of spheres is suggested, which uses neither loop spaces nor spectral sequences.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
ssp@r410.pdmi.ras.ru

Поступило 20 марта 1999 г.