Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

С. С. Подкорытов

ПОРЯДОК ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ БРУШЛИНСКОГО

Введение. Определения и обозначения

Группа Брушлинского $B(X)$**.** Рассмотрим произвольный компактный полиэдр X. Гомотопические классы непрерывных отображений полиэдра X в окружность $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ образуют абелеву группу относительно операции, определяемой поточечным умножением отображений. Эта группа обозначается $B(X)$ и называется *группой Брушлинского* полиэдра X, см. [1]. (Как хорошо известно, она канонически изоморфна группе $H^1(X;\mathbb{Z})$ и является свободной абелевой группой конечного ранга.)

Гомотопический класс отображения u будем обозначать $[u]$.

r**-Когерентные наборы.** Число элементов конечного множества E будем обозначать $|E|$. Конечный набор пар $\{(a_j, u_j)\}_{j\in J}$, где $a_j \in \mathbb{Z}$, $u_j : X \to T$ — непрерывные отображения, будем называть *r-когерентным* $(0 \leqslant r < \infty)$, если для любого множества $E \subset X\times T$ с $|E| \leqslant r$ сумма чисел a_j по тем $j \in J$, для которых $u_j(x) = t$ при $(x,t) \in E$, равна 0.

[Если обозначить график отображения $u_j : X \to T$ в $X\times T$ через $\Gamma(u_j)$, то последнее равенство нулю можно записать в следующем виде: $\sum_{j\,:\,\Gamma(u_j)\supset E} a_j = 0$. Заметим, что 1-когерентность набора $\{(a_j, u_j)\}_{j\in J}$ равносильна тому, что сумма характеристических функций графиков отображений u_j равна нулю: $\sum_{j\in J} \mathrm{ind}_{\Gamma(u_j)} \equiv 0$.]

Порядок функции на группе $B(X)$**.** Пусть Q — абелева группа и $F\colon B(X) \to Q$ — произвольное отображение. [Такие отображения мы будем еще называть *функциями*.] Будем говорить, что *порядок функции F не превосходит r* $(0 \leqslant r < \infty)$ и писать $\operatorname{ord} F \leqslant r$,

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 98-01-832 и 96-15-96-075).

если для любого r-когерентного набора $\{(a_j, u_j)\}_{j\in J}$

$$\sum_{j\in J} a_j F([u_j]) = 0.$$

Теперь мы можем определить *порядок* функции F равенством

$$\operatorname{ord} F = \sup\{r : \operatorname{ord} F \leqslant r\}.$$

Ясно, что $0 \leqslant \operatorname{ord} F \leqslant \infty$.

Степень функции на абелевой группе. Пусть M и N — абелевы группы и $f\colon M \to N$ — произвольное отображение. Будем говорить, что *его степень не превосходит* r $(0 \leqslant r < \infty)$, и писать $\deg f \leqslant r$, если для любых $m_k \in M$, $k = 0, \dots, r$,

$$\sum_{e_0,\dots,e_r=0,1} (-1)^{e_0+\dots+e_r} f(e_0 m_0 + \dots + e_r m_r) = 0.$$

Теперь мы можем определить *степень* функции f равенством

$$\deg f = \sup\{r : \deg f \leqslant r\}.$$

Ясно, что $0 \leqslant \deg f \leqslant \infty$.

Предмет работы. Кажется правдоподобным, что для произвольной функции на группе Брушлинского $F\colon B(X) \to Q$ выполняется равенство $\operatorname{ord} F = \deg F$. В настоящей работе доказан ряд более слабых утверждений.

Мы доказываем, что $\operatorname{ord} F \leqslant \deg F$ (теорема 4) и что $\deg F \leqslant \dim X \cdot \operatorname{ord} F$ (теорема 5), а также выводим одно следствие (следствие 6). Неравенство $\operatorname{ord} F \geqslant \deg F$ доказано в случае, когда группа Q не имеет кручения (следствие 7) или $\operatorname{ord} F \leqslant 1$ (теорема 8).

§1. Три леммы

1. Лемма. *Пусть N — абелевы группа и $f\colon \mathbb{Z}^d \to N$ — отображение с $\deg f \leqslant r < \infty$. Тогда существует конечное разложение*

$$f(m) = \sum_k q_k(m) n_k, \qquad m \in \mathbb{Z}^d,$$

где $q_k\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}$ — полиномы степени не выше r и $n_k \in N$.

Это легко доказывается индукцией по d.

2. Лемма. *Пусть M и N — абелевы группы, $f\colon M \to N$ — отображение с $\deg f \leqslant r < \infty$ и Y — некоторое множество. Пусть дан конечный набор троек $\{(a_j, s_j, m_j)\}_{j\in J}$, где $a_j \in \mathbb{Z}$, s_j — $\mathbb{Z}$-значные функции на Y и $m_j \in M$. Предположим, что выполнены следующие условия $(*)$ и $(**)$:*

$(*)$ для любого $E \subset Y$ с $|E| \leqslant r$

$$\sum_{j\in J} a_j \prod_{y\in E} s_j(y) = 0;$$

$(**)$ для любых $b_j \in \mathbb{Z}$, $j \in J$, имеет место импликация

$$\sum_{j\in J} b_j s_j \equiv 0 \Longrightarrow \sum_{j\in J} b_j m_j = 0.$$

Тогда

$$\sum_{j\in J} a_j f(m_j) = 0.$$

Доказательство. Пусть S — группа функций на множестве Y, порождённая функциями s_j, $j \in J$. Легко видеть, что группа S свободна, а $\mathbb{Q}$-модуль $\mathrm{Hom}\,(S, \mathbb{Q})$ порождён гомоморфизмами $s \mapsto s(y)$, $y \in Y$. Из условия $(*)$ следует, что если отображение $q\colon S \to \mathbb{Q}$ в каком-то базисе группы S задаётся многочленом степени не выше r, то

$$\sum_{j\in J} a_j q(s_j) = 0.$$

Из условия $(**)$ следует, что существует такой гомоморфизм $t\colon S \to M$, что $t(s_j) = m_j$ для всех $j \in J$. Применим лемму 1 к отображению $f \circ t$. $\bullet$

3. Лемма. *Пусть M и N — абелевы группы, группа N не имеет кручения и $f\colon M \to N$ — произвольное отображение. Предположим, что $\deg f < \infty$ и $\deg(f|_C) \leqslant r$ для любой циклической подгруппы $C \subset M$. Тогда $\deg f \leqslant r$.*

Доказательство. Легко видеть, что достаточно рассмотреть случай $M = \mathbb{Z}^d$, $N = \mathbb{Q}$, когда, ввиду леммы 1, это утверждение следует из известных свойств многочленов. $\bullet$

§2. Основные результаты и их доказательства

В этом параграфе мы считаем, что $F\colon B(X)\to Q$ — некоторая фиксированная функция на группе Брушлинского.

4. Теорема. $\operatorname{ord} F \leqslant \deg F$.

Доказательство. Пусть $\deg F \leqslant r < \infty$ и пусть $\{(a_j, u_j)\}_{j\in J}$ — r-когерентный набор. Введем функции

$$s_j : X\times T \to \mathbb{Z}, \qquad s_j(x,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } u_j(x) = t, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \qquad j\in J.$$

[Ясно, что это — характеристические функции графиков отображений u_j: $s_j = \operatorname{ind}_{\Gamma(u_j)}$.] Для любого множества $E\subset X\times T$ с $|E|\leqslant r$

$$\sum_{j\in J} a_j \prod_{(x,t)\in E} s_j(x,t) = 0.$$

Если для некоторых $b_j\in\mathbb{Z}$, $j\in J$,

$$\sum_{j\in J} b_j s_j = 0,$$

то, как легко видеть,

$$\prod_{j\in J} u_j(x)^{b_j} = 1, \qquad x\in X,$$

и, следовательно,

$$\sum_{j\in J} b_j [u_j] = 0.$$

Согласно лемме 2,

$$\sum_{j\in J} a_j F([u_j]) = 0.$$

Таким образом, $\operatorname{ord} F\leqslant r$. $\bullet$

5. Теорема. *Имеет место неравенство* $\deg F \leqslant m \operatorname{ord} F$, *где* m — *размерность полиэдра* X.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{ord} F\leqslant r<\infty$. Пусть $s = mr$ и пусть

$$p_0,\dots,p_s : T^{s+1}\to T$$

— проекции. Возьмём произвольные элементы $v_0, \ldots, v_s \in B(X)$. Пусть $R \subset T^{s+1}$ — множество, образованное теми наборами $(t_0, \ldots, t_s)$, у которых число компонент, равных 1, больше m.

Выберем такое отображение $A\colon X \to T^{s+1}$, что

$$[p_k \circ A] = v_k, \quad k = 0, \ldots, s,$$

причём $A(X) \cap R = \varnothing$ (это возможно, поскольку множество R имеет коразмерность $m+1$). Выберем настолько малое $c > 0$, чтобы множество $A(X)$ не пересекало окрестность множества R, образованную теми наборами $(t_0, \ldots, t_s)$, для которых количество индексов k с $|t_k - 1| < c$ больше m.

Пусть $g\colon T \to T$ — такое непрерывное отображение, гомотопное тождественному, что $g(t) = 1$ при $|t-1| \geqslant c$. Положим

$$u_k = g \circ p_k \circ A, \quad k = 0, \ldots, s.$$

Для каждого набора $e = (e_0, \ldots, e_s)$, $e_k = 0, 1; k = 0, \ldots, s$, введем отображение

$$u^e\colon X \to T, \quad u^e(x) = u_0(x)^{e_0} \ldots u_s(x)^{e_s}.$$

Для любой точки $x \in X$ значение $u^e(x)$ зависит не более чем от m компонент набора e. Поэтому для любого множества $D \subset X$ с $|D| \leqslant r$ найдётся такое k, что значения $u^e(x)$, $x \in D$, не зависят от e_k. Отсюда следует, что набор

$$\{((-1)^{e_0+\ldots+e_s}, u^e)\}_{e_0,\ldots,e_s=0,1}$$

r-когерентен. Так как $\operatorname{ord} F \leqslant r$, а $[u^e] = e_0v_0 + \ldots + e_sv_s$, то

$$\sum_{e_0,\ldots,e_s=0,1} (-1)^{e_0+\ldots+e_s} F(e_0v_0 + \ldots + e_sv_s) = 0.$$

Таким образом, $\deg F \leqslant s$. $\bullet$

6. Следствие. *Пусть $P \subset B(X)$ — подгруппа, порождённая n элементами. Тогда* $\deg(F|_P) \leqslant n \operatorname{ord} F$.

Доказательство. Пусть $A\colon X \to T^n$ — такое непрерывное отображение, что образ индуцированного гомоморфизма

$$A^*\colon B(T^n) \to B(X)$$

(который определяется формулой $A^*([u]) = [u \circ A]$) совпадает с P. Рассмотрим отображение

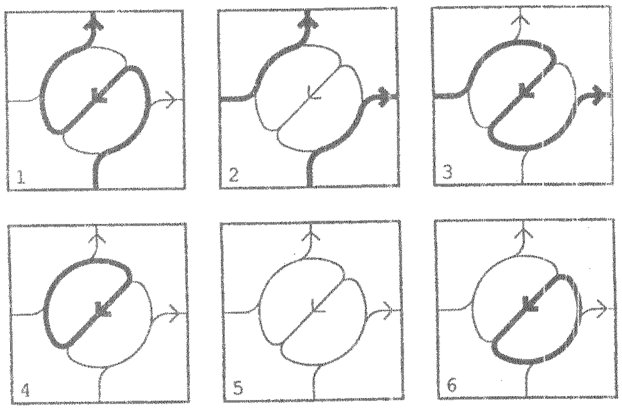
$$F \circ A^* \colon B(T^n) \to Q.$$

Ясно, что $\deg(F|_P) = \deg(F \circ A^*)$. По теореме 5, $\deg(F \circ A^*) \leqslant n \operatorname{ord}(F \circ A^*)$. Легко видеть, что $\operatorname{ord}(F \circ A^*) \leqslant \operatorname{ord} F$. •

7. Следствие. *Если группа Q не имеет кручения, то* $\deg F \leqslant \operatorname{ord} F$.

Доказательство. Ввиду леммы 3, это следует из теоремы 5 и следствия 6. •

8. Теорема. *Предположим, что* $\operatorname{ord} F \leqslant 1$. *Тогда* $\deg F \leqslant 1$.



Доказательство. Пусть $p_0, p_1 : T^2 \to T$ — проекции. Существуют такие непрерывные отображения $h_1, \ldots, h_6 \colon T^2 \to T$, что набор $\{((-1)^i, h_j)\}_{j=1}^{6}$ 1-когерентен, причём

$$[h_1] = [p_0], \quad [h_2] = [p_0] + [p_1], \quad [h_3] = [p_1], \quad [h_4] = [h_5] = [h_6] = 0.$$

Их можно получить, применяя конструкцию Понтрягина к изображенным на рисунке ориентированным кривым на торе T^2 (он получается склеиванием противоположных сторон изображённого на рисунке квадрата). А именно: точки, расположенные на расстоянии больше фиксированного малого $c > 0$ от кривой, отображаются в точку 1. Далее, для точек, близких к кривой, определено *отклонение* от этой кривой (= расстояние со знаком), которое мы обозначим через q (считаем, что $q > 0$ слева от кривой и $q < 0$ справа от кривой), и точка с $|q| \leqslant c$ отображается в точку $-\exp(i\pi q/c)$ (ср. [2]).

Возьмём произвольные элементы $v_0, v_1 \in B(X)$. Пусть $A\colon X \to T^2$ — такое непрерывное отображение, что $[p_k \circ A] = v_k$, $k = 0, 1$. Положим

$$u_j = h_j \circ A, \quad j = 1, \ldots, 6.$$

Как нетрудно видеть, набор $\{(a_j, u_j)\}_{j=1}^{6}$ 1-когерентен. Поскольку $\operatorname{ord} F \leqslant 1$, то

$$\sum_{j=1}^{6} a_j F([u_j]) = 0.$$

Так как $[u_1] = v_0$, $[u_2] = v_0 + v_1$, $[u_3] = v_1$ и $[u_4] = [u_5] = [u_6] = 0$, то

$$\sum_{e_0, e_1 = 0, 1} (-1)^{e_0 + e_1} F(e_0 v_0 + e_1 v_1) = 0.$$

Таким образом, $\deg F \leqslant 1$. •

Литература

1. Ху Сы-цзян, *Теория гомотопий.* М.: Мир, 1964.
2. Дж. Милнор, А. Уоллес, *Дифференциальная топология. Начальный курс.* М.: Мир, 1972.

Podkorytov S. S. Order of function on the Bruschlinsky group.

For an arbitrary function F defined on the group of homotopy classes of mappings of a finite polyheder X to the circle and taking values in an Abelian group Q, the notion of order is defined. The order $\operatorname{ord} F$ is compared with the algebraic degree of F. It is proved that $\operatorname{ord} F \leqslant \deg F$ and $\deg F \leqslant \dim X \cdot \operatorname{ord} F$. The inequality $\operatorname{ord} F \geqslant \deg F$ is proved in the case where Q is torsion-free or $\operatorname{ord} F \leqslant 1$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
ssp@r410.pdmi.ras.ru

Поступило 31 мая 1999 г.