Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 261, 1999 г.

Р. Ф. Саяхова

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ТИПА $(1, 1, m; 3)$ С $m > 1$

§1. Введение

Сингулярным зацеплением типа $(m_1, \dots, m_r; n)$ называется набор сфероидов

$$f_i \colon S^{m_i} \to S^n, \quad i = 1, \dots, r,$$

с попарно дизъюнктными образами.

Два сингулярных зацепления $\ell = (f_1, \dots, f_r)$ и $\ell' = (f'_1, \dots, f'_r)$ называются *гомотопными*, если существуют гомотопии

$$h_i \colon S^{m_i} \times I \to S^n, \quad i = 1, \dots, r,$$

такие, что h_i связывает сфероиды f_i и f'_i, $i = 1, \dots, r$, и для любого $t_0 \in I$ множества $h_i(S^{m_i} \times \{t_0\})$, $i = 1, \dots, r$, попарно дизъюнктны (т.е. набор сфероидов $h_i(\cdot, t_0)$ представляет собой сингулярное зацепление).

Зацепления ℓ и ℓ' называются *псевдогомотопными*, если существуют непрерывные отображения

$$H_i \colon S^{m_i} \times I \to S^n \times I, \qquad i = 1, \dots, r,$$

с попарно дизъюнктными образами такие, что

$$H_i(s, 0) = (f_i(s), 0), \quad H_i(s, 1) = (f'_i(s), 1), \quad s \in S^{m_i}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Очевидно, что гомотопные сингулярные зацепления псевдогомотопны. Обратное утверждение верно для сингулярных зацеплений типа $(m_1, \dots, m_r; n)$ с $m_i \leqslant n - 2$, $i = 1, \dots, r$ (см. [7], ср. [2, 4]) и типа $(m_1, m_2; n)$ при $m_1 + 3m_2 \leqslant 3n - 6$ и $3m_2 \leqslant 2n - 3$ [1].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 98-01-832 и 96-15-96-075).

В работе получена гомотопическая классификация сингулярных зацеплений типа $(1,1,m;3)$ с $m>1$ (см. §2–7) и показано, что из псевдогомотопности таких зацеплений не следует их гомотопность (см. §8).

Результаты работы были анонсированы в [6].

§2. Гомотопическая классификация сингулярных зацеплений типа $(1,1,m;3)$ с $m>1$

Обозначим через $\mathfrak{L}_m$ множество сингулярных зацеплений типа $(1,1,m;3)$, а через $\mathfrak{H}_m$ — множество гомотопических классов таких зацеплений (всюду ниже предполагается, что $m>1$). Класс зацепления ℓ обозначим через $[\ell]$. Введем отображение

$$\lambda\colon \mathfrak{H}_m \to \mathbb{Z}, \quad \ell=(f_1,f_2,F)\mapsto \lambda(\ell):=\operatorname{lk}(f_1,f_2),$$

где lk — обычный коэффициент зацепления петель f_1 и f_2. Той же буквой обозначим индуцированное отображение

$$\lambda\colon \mathfrak{H}_m \to \mathbb{Z}.$$

Положим

$$\mathfrak{H}_m^0 := \lambda^{-1}\{0\}.$$

Фиксируем два незацепленных незаузленных гладких вложения $\phi_1,\phi_2\colon S^1\to S^3$, и пусть

$$\Omega = S^3\setminus(\phi_1(S^1)\cup\phi_2(S^1)).$$

Пространство Ω деформационно ретрагируется на букет

$$W = S^1\vee S^1\vee S^2\subset\Omega\,.$$

Множество всех свободных гомотопических классов отображений $F\colon S^m\to X$ обозначим через $\bar\pi_m(X)$.

Определено очевидное "тавтологическое" отображение

$$\tau\colon \bar\pi_m(W)\to\mathfrak{H}_m, \quad [F]\mapsto[(\phi_1,\phi_2,F)].$$

Таким образом, имеем короткую последовательность пунктированных множеств и отображений

$$\bullet\to\bar\pi_m(W)\xrightarrow{\tau}\mathfrak{H}_m\xrightarrow{\lambda}\mathbb{Z}\to\bullet. \tag{$*$}$$

Теорема 2.1. *Последовательность* $(*)$ *является короткой точной последовательностью пунктированных множеств и отображений в следующем смысле: отображение* τ *инъективно, отображение* λ *сюръективно и* $\tau(\bar{\pi}_m(W)) = \mathfrak{H}_m^0$ $(\overset{\text{def}}{=} \lambda^{-1}\{0\})$. *Кроме того, сокращение*

$$\lambda\,| : \mathfrak{H}_m \setminus \mathfrak{H}_m^0 \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

инъективно (и, следовательно, биективно).

Другими словами, интересующее нас множество $\mathfrak{H}_m$ представляет собой "букет" множества $\bar{\pi}_m(W)$ и группы $\mathbb{Z}$:

$$\mathfrak{H}_m = \bar{\pi}_m(W) \vee \mathbb{Z}.$$

Поскольку, очевидно, отображение λ сюръективно и $\lambda \circ \tau = 0$, т.е. $\tau(\bar{\pi}_m(W)) \subset \mathfrak{H}_m^0$, то для доказательства теоремы достаточно проверить следующие три утверждения.

(а) (Инъективность сокращения $\lambda\,|$.) Пусть $\ell = (f_1, f_2, F) \in \mathfrak{L}_m$. Если $\lambda(\ell) \neq 0$, то сфероид F гомотопен постоянному в множестве $S^3 \setminus (f_1(S^1) \cup f_2(S^1))$.

(б) (Точность последовательности $(*)$ в среднем члене: $\mathfrak{H}_m^0 \subset \tau(\bar{\pi}_m(W))$.) Пусть $\ell \in \mathfrak{L}_m$. Если $\lambda(\ell) = 0$, то зацепление ℓ гомотопно некоторому сингулярному зацеплению вида (ϕ_1, ϕ_2, F').

(в) (Инъективность тавтологического отображения τ.) Пусть

$$F, F' : S^m \to \Omega$$

— два сфероида. Если сингулярные зацепления $\ell = (\phi_1, \phi_2, F)$ и $\ell' = (\phi_1, \phi_2, F')$ гомотопны, то сфероиды F и F' гомотопны в Ω.

Утверждения (а) и (б) доказываются в §4 и 5, соответственно. Наибольшие трудности представляет доказательство утверждения (в). Оно доказывается в §7.

§3. Предварительные рассмотрения

В этом параграфе предполагается, что $A_1, A_2 \subset S^3$ — дизъюнктные непустые связные компактные множества. Пусть

$$Q = S^3 \setminus (A_1 \cup A_2).$$

Лемма 3.1. *Пусть X — односвязное конечное клеточное пространство (например, сфера S^m с $m > 1$) и $u\colon X \to Q$ — непрерывное отображение. Тогда для некоторого $N \in \mathbb{N}$ найдутся непрерывные отображения $\tilde{u}\colon X \to \bigvee^N S^2$ и $T\colon \bigvee^N S^2 \to Q$ такие, что отображение $T \circ \tilde{u}$ гомотопно отображению u. (Здесь $\bigvee^N S^2$ — букет N экземпляров сферы S^2.)*

Доказательство. Достаточно заметить, что пространство Q гомотопически эквивалентно двумерному клеточному пространству и, следовательно, универсальное накрывающее каждой его компоненты имеет гомотопический тип букета двумерных сфер. $\bullet$

Разделяющие вложения. Если имеется гладкое вложение $g\colon S^2 \hookrightarrow S^3$, то пусть $B_1(g)$, $B_2(g) \subset S^3$ — замкнутые шары, на которые, по теореме Шёнфлиса, $g(S^2)$ разбивает S^3, причём пусть пути, идущие из шара $B_1(g)$ в шар $B_2(g)$, имеют с вложением g индекс пересечения $+1$.

Будем говорить, что g *разделяет* A_1 и A_2, если $A_i \subset \operatorname{int} B_i(g)$, $i = 1, 2$. Если такое вложение g существует, мы называем множества A_1 и A_2 *топологически незацепленными*. В противном случае мы называем их *топологически зацепленными*.

Лемма 3.2. *Если множества A_1 и A_2 топологически незацеплены, то разделяющее их вложение $S^2 \hookrightarrow S^3$ единственно с точностью до изотопии в множестве Q.*

Доказательство. Пусть вложения g, $g'\colon S^2 \hookrightarrow S^3$ разделяют A_1 и A_2. Покажем, что они изотопны в множестве Q. Если их образы не пересекаются, то это следует из теоремы Шёнфлиса.

Пусть они пересекаются, причём трансверсально: $g(S^2) \pitchfork g'(S^2) \neq \varnothing$. Тогда найдется диск $D \subset g'(S^2)$ с $\partial D \subset g(S^2)$ и $\operatorname{int} D \cap g(S^2) = \varnothing$. Предположим, для определенности, что $D \subset B_1(g)$.

По теореме Шёнфлиса диск D разбивает шар $B_1(g)$ на два замкнутых шара. Пусть H — тот из них, в котором нет точек множеств A_1 и A_2. Тогда мы можем уменьшить число компонент пересечения $g(S^2) \pitchfork g'(S^2)$ при помощи изотопии вложения g в множестве Q, неподвижной вне малой окрестности множества $g^{-1}(H)$. $\bullet$

Лемма 3.3. *Пусть V — компонента связности множества Q. Если не существует разделяющего A_1 и A_2 вложения $g\colon S^2 \hookrightarrow S^3$ ц $g(S^2) \subset V$ (например, если A_1 и A_2 топологически зацеплены), то пространство V асферично.*

Лемма 3.4. *Пусть вложение $g\colon S^2 \hookrightarrow S^3$ разделяет множества A_1 и A_2 и пусть $s_0 \in S^2$ — отмеченная точка. Тогда группа $\pi_1(Q, g(s_0))$ порождается образами групп $\pi_1(B_i(g) \setminus A_i, g(s_0))$, $i = 1, 2$, при гомоморфизмах включения, а группа $\pi_2(Q, g(s_0))$ порождается элементом $[g]$ как модуль над $\pi_1(Q, g(s_0))$.*

Это следует из теоремы о сфере в форме Столлингса [3] и леммы 3.2.

§4. Инъективность отображения $\lambda|\colon \mathfrak{H}_m \setminus \mathfrak{H}_m^0 \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Пусть $\ell = (f_1, f_2, F) \in \mathfrak{L}_m$, причем $[\ell] \in \mathfrak{H}_m \setminus \mathfrak{H}_m^0$, т.е. $\lambda(\ell) \neq 0$. Тогда множества $f_1(S^1)$ и $f_2(S^1)$ топологически зацеплены, и в силу леммы 3.3 сфероид F гомотопен постоянному в $S^3 \setminus (f_1(S^1) \cup f_2(S^1))$. Следовательно, гомотопический класс зацепления ℓ зависит только от $\lambda(\ell)$. •

§5. Точность последовательности (∗) в среднем члене: $\mathfrak{H}_m^0 \subset \tau(\bar{\pi}_m(W))$

Пусть $\ell = (f_1, f_2, F) \in \mathfrak{L}_m$, причем $[\ell] \in \mathfrak{H}_m^0$, т.е. $\lambda(\ell) = 0$.

Если множества $f_1(S^1)$ и $f_2(S^1)$ топологически зацеплены, то, как и в §4, в силу леммы 3.3 сфероид F гомотопен постоянному в $S^3 \setminus (f_1(S^1) \cup f_2(S^1))$. В таком случае, очевидно, зацепление ℓ гомотопно зацеплению вида $\ell_0 = (\phi_1, \phi_2, F_0)$, где F_0 — постоянный сфероид.

Пусть $f_1(S^1)$ и $f_2(S^1)$ топологически не зацеплены и $g\colon S^2 \hookrightarrow S^3$ — разделяющее их вложение. Из лемм 3.1 и 3.4 следует, что сфероид F гомотопен в $S^3 \setminus (f_1(S^1) \cup f_2(S^1))$ постоянному сфероиду или сфероиду $F^\dagger$, образ которого содержится в множестве вида $g(S^2) \cup C_1 \cup C_2$, где $C_i \subset B_i(g) \setminus f_i(S^1)$, $i = 1, 2$, — правильные компактные одномерные гладкие подмногообразия без замкнутых компонент (наборы дуг). Нетрудно видеть, что в таком случае зацепление $(f_1, f_2, F^\dagger)$ гомотопно зацеплению вида (ϕ_1, ϕ_2, F'). •

§6. Ореолы

Как и в §3, в этом параграфе предполагается, что A_1, $A_2 \subset S^3$

— дизъюнктные непустые связные компактные множества и $Q = S^3 \setminus (A_1 \cup A_2)$.

Кроме того, мы предполагаем, что множество A_i снабжено классом $a_i \in H_1(A_i)$, $i = 1, 2$. Пусть v_1, $v_2 \in H^1(Q)$ — сужения классов, двойственных по Александеру классам a_1 и a_2.

Дополнительные обозначения. Пусть, как и выше, $W = S^1 \vee S^1 \vee S^2$. Пусть

$$k_1, k_2 \colon S^1 \to W, \qquad k \colon S^2 \to W$$

— канонические вложения и пусть $w_1, w_2 \in H^1(W)$ — такие классы, что

$$\langle k_j^*(w_i), [S^1]\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Если вложение $g \colon S^2 \hookrightarrow S^3$ разделяет множества A_1 и A_2, то *g-ореолом* пары A_1, A_2 (точнее, пары (A_1, a_1), (A_2, a_2)) назовем всякое непрерывное отображение $p \colon Q \to W$ такое, что

$$p \circ g = k, \quad p(B_i(g) \setminus A_i) \subset k_i(S^1) \cup k(S^2), \quad p^*(w_i) = v_i; \quad i = 1, 2.$$

Лемма 6.1. *Пусть вложение $g \colon S^2 \hookrightarrow S^3$ разделяет A_1 и A_2. Тогда у пары A_1, A_2 существует g-ореол.*

Это легко доказать, используя то, что пары $(B_i(g) \setminus A_i, g(S^2))$, $i = 1, 2$, гомотопически эквивалентны двумерным клеточным парам.

Лемма 6.2. *Пусть A_1 и A_2 топологически незацеплены, $g \colon S^2 \hookrightarrow S^3$ — какое-нибудь разделяющее их вложение и $p \colon Q \to W$ — какой-нибудь g-ореол пары A_1, A_2. Пусть $m > 1$. Тогда индуцированное отображение*

$$p_* \colon \bar{\pi}_m(Q) \to \bar{\pi}_m(W)$$

не зависит от выбора вложения g и ореола p.

Доказательство. Пусть вложения g, $g' \colon S^2 \hookrightarrow S^3$ разделяют A_1 и A_2 и пусть p, $p' \colon Q \to W$ — g- и g'-ореолы пары A_1, A_2, соответственно. Требуется доказать, что индуцированные отображения

$$p_*, p'_* \colon \bar{\pi}_m(Q) \to \bar{\pi}_m(W).$$

совпадают.

В силу леммы 3.2, можно считать, что $g = g'$. Пусть $s_0 \in S^2$ — отмеченная точка. Используя определение ореола и лемму 3.4, заключаем, что совпадают индуцированные гомоморфизмы

$$p_*, p'_*\colon \pi_1(Q, g(s_0)) \to \pi_1(W, k(s_0)),$$

и, в силу той же леммы 3.4, совпадают индуцированные гомоморфизмы

$$p_*, p'_*\colon \pi_2(Q, g(s_0)) \to \pi_2(W, k(s_0)).$$

Из леммы 3.3 следует, что для любой компоненты V множества Q такой, что $g(s_0) \notin V$, и любой точки $v_0 \in V$ имеем $\pi_2(V, v_0) = 0$. В силу леммы 3.1 совпадают и отображения $p_*, p'_*\colon \bar{\pi}_m(Q) \to \bar{\pi}_m(W)$. $\bullet$

§7. Тавтологическое отображение τ инъективно: $\bar{\pi}_m(W) = \mathfrak{H}_m^0$

Пусть $m > 1$. Мы построим отображение

$$P\colon \mathfrak{L}_m \to \bar{\pi}_m(W), \quad \ell \mapsto P(\ell),$$

обладающее следующими свойствами:

(1) если зацепления ℓ^0 и ℓ^1 гомотопны, то $P(\ell^0) = P(\ell^1)$;

(2) если $\ell = (\phi_1, \phi_2, F)$, то гомотопический класс сфероида F в множестве Ω определяется значением $P(\ell)$.

Из существования такого отображения очевидно следует инъективность отображения τ.

Пусть $\ell = (f_1, f_2, F) \in \mathfrak{L}_m$. Снабдим множество $f_i(S^1)$ классом

$$f_{i\,*}([S^1]) \in H_1(f_i(S^1)), \quad i = 1, 2.$$

Если множества $f_1(S^1)$ и $f_2(S^1)$ топологически зацеплены, то определим $P(\ell)$ как класс постоянного сфероида. Иначе выберем вложение $g\colon S^2 \hookrightarrow S^3$, разделяющее $f_1(S^1)$ и $f_2(S^1)$, и g-ореол $p\colon Q \to W$ пары $f_1(S^1)$, $f_2(S^1)$ и положим

$$P(\ell) = [p \circ F].$$

Корректность этого определения следует из лемм 6.1 и 6.2.

Свойство (2) следует из того, что если $f_1 = \phi_1$ и $f_2 = \phi_2$, то p — гомотопическая эквивалентность.

Проверка свойства (1). Пусть сингулярные зацепления ℓ^0 и ℓ^1 гомотопны и $\{\ell^t=(f_1^t,f_2^t,F^t)\}_{t\in I}$ — связывающее их непрерывное семейство сингулярных зацеплений (*гомотопия*). Снабдим множество $f_i^t(S^1)$ классом

$$f^t_{i\,*}([S^1])\in H_1(f_i^t(S^1)),\quad t\in I,\quad i=1,2.$$

Для $t_0\in I$ и $\varepsilon>0$ положим

$$I_\varepsilon(t_0)=I\cap[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]$$

и пусть

$$f_i^{\varepsilon,t_0}(S^1)=\bigcup_{t\in I_\varepsilon(t_0)}f_i^t(S^1),\quad i=1,2,$$

$$F^{\varepsilon,t_0}(S^m)=\bigcup_{t\in I_\varepsilon(t_0)}F^t(S^m).$$

Снабдим множество $f_i^{\varepsilon,t_0}(S^1)$ классом

$$f^{t_0}_{i\,*}([S^1])\in H_1(f_i^{\varepsilon,t_0}(S^1)),\quad i=1,2.$$

Нам требуется доказать, что $P(\ell^0)=P(\ell^1)$. Для этого очевидно достаточно доказать следующее: для всякого $t_0\in I$ найдется такое $\varepsilon>0$, что при $t\in I_\varepsilon(t_0)$ имеем $P(\ell^t)=P(\ell^{t_0})$. Рассмотрим два случая.

(а) Пусть множества $f_1^{t_0}(S^1)$ и $f_2^{t_0}(S^1)$ топологически зацеплены. Тогда, по построению, $P(\ell^{t_0})$ есть класс постоянного сфероида. По лемме 3.3 сфероид F^{t_0} гомотопен постоянному в множестве $S^3\setminus(f_1^{t_0}(S^1)\cup f_2^{t_0}(S^1))$. Пусть B — образ соответствующей гомотопии. Выберем $\varepsilon>0$ такое, что

$$(f_1^{\varepsilon,t_0}(S^1)\cup f_2^{\varepsilon,t_0}(S^1))\cap(F^{\varepsilon,t_0}(S^m)\cup B)=\varnothing.$$

Пусть $t\in I_\varepsilon(t_0)$. Сфероид F^t гомотопен постоянному в множестве $F^{\varepsilon,t_0}(S^m)\cup B$ и, следовательно, в множестве $S^3\setminus(f_1^t(S^1)\cup f_2^t(S^1))$. Отсюда следует, что $P(\ell^t)$ есть класс постоянного сфероида. Таким образом, $P(\ell^t)=P(\ell^{t_0})$.

(б) Пусть множества $f_1^{t_0}(S^1)$ и $f_2^{t_0}(S^1)$ топологически не зацеплены и $g\colon S^2\hookrightarrow S^3$ — какое-нибудь разделяющее их вложение. Выберем $\varepsilon>0$ такое, что

$$(f_1^{\varepsilon,t_0}(S^1)\cup f_2^{\varepsilon,t_0}(S^1))\cap(F^{\varepsilon,t_0}(S^m)\cup g(S^2))=\varnothing.$$

Пусть $t \in I_\varepsilon(t_0)$. Сфероиды F^{t_0} и F^t гомотопны в множестве $S^3 \setminus (f_1^{\varepsilon,t_0}(S^1) \cup f_2^{\varepsilon,t_0}(S^1))$, а вложение g разделяет также множества $f_1^{\varepsilon,t_0}(S^1)$ и $f_2^{\varepsilon,t_0}(S^1)$. Пусть

$$p_0, p\colon Q \to W$$

— g-ореолы пар $f_1^{t_0}(S^1)$, $f_2^{t_0}(S^1)$ и $f_1^t(S^1)$, $f_2^t(S^1)$, соответственно. Их сужения на $S^3 \setminus (f_1^{\varepsilon,t_0}(S^1) \cup f_2^{\varepsilon,t_0}(S^1))$ являются g-ореолами пары $f_1^{\varepsilon,t_0}(S^1)$, $f_2^{\varepsilon,t_0}(S^1)$. Согласно лемме 6.2, $[p_0 \circ F^{t_0}] = [p \circ F^{t_0}]$. Так как, по построению,

$$P(\ell^{t_0}) = [p_0 \circ F^{t_0}] \quad \text{и} \quad P(\ell^t) = [p \circ F^t] = [p \circ F^{t_0}],$$

то $P(\ell^t) = P(\ell^{t_0})$. •

§8. Достаточное условие псевдогомотопности зацеплений типа $(1, 1, m; 3)$ с $m > 1$

Пусть $\lambda_i\colon S^1 \to \Omega$ — малая (круговая) петля с

$$\mathrm{lk}(\lambda_i, \phi_i) = +1; \quad i = 1, 2.$$

Петлями Милнора будем называть петли вида

$$\psi = [\lambda_i, \gamma\lambda_i\gamma^{-1}],$$

где γ — петля в пространстве Ω, начало которой совпадает с началом петли λ_i, $i = 1, 2$.

Пусть M — результат приклеивания к Ω двумерных клеток вдоль какого-нибудь (конечного) набора петель Милнора.

Теорема 8.1. *Пусть $\ell = (\phi_1, \phi_2, F) \in \mathfrak{L}_m$, $m > 1$. Если сфероид F гомотопен постоянному в пространстве M, то зацепление ℓ псевдогомотопно сингулярному зацеплению вида $\ell_0 = (\phi_1, \phi_2, F_0)$, где F_0 — постоянный сфероид.*

Доказательство теоремы 8.1 основано на следующем утверждении.

Предложение 8.2 [5]. *Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_N\colon S^1 \to \Omega$ — какие-нибудь петли Милнора, и пусть $\bar\psi_1, \ldots, \bar\psi_N\colon S^1 \to S^3$ — их композиции с включением $\Omega \hookrightarrow S^3$. Тогда существуют гомотопии*

$$h_1, h_2\colon S^1 \times I \to S^3,$$

соединяющие петли ϕ_1 и ϕ_2 с ними же самими, и гомотопии

$$\theta_1, \ldots, \theta_N \colon S^1 \times I \to S^3,$$

соединяющие петли $\bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_N$ с постоянной петлей, такие, что при любом $t \in I$ множества $h_1(S^1 \times \{t\})$ и $h_2(S^1 \times \{t\})$ не пересекаются друг с другом и с множествами $\theta_j(S^1 \times \{t\})$, $j = 1, \ldots, N$.

Доказательство теоремы 8.1. Пусть сфероид F гомотопен постоянному в пространстве M. Можно считать, что M получается из Ω приклеиванием конечного числа клеток. Из предложения 8.2 следует, что существуют непрерывные отображения

$$H_1, H_2 \colon S^1 \times I \to S^3 \times I$$

и

$$g \colon M \to S^3 \times I$$

с дизъюнктными образами такие, что

$$H_i(s, 0) = (\phi_i(s), 0), \quad H_i(s, 1) = (\phi_i(s), 1); \quad s \in S^1, \quad i = 1, 2,$$

и

$$g(\omega) = (\omega, 0), \quad \omega \in \Omega; \quad g(M) \cap (S^3 \times \{1\}) \neq \varnothing.$$

Это означает, что зацепления ℓ и ℓ_0 псевдогомотопны. •

Следствие. *При каждом $m > 1$ существуют негомотопные, но псевдогомотопные сингулярные зацепления типа* $(1, 1, m; 3)$.

Примеры таких сингулярных зацеплений легко построить используя инъективность тавтологического отображения τ и теорему 8.1. •

Благодарности. Я пользуюсь возможностью поблагодарить своего научного руководителя В. М. Нежинского за интерес и внимание к настоящей работе, а также и особенно С. С. Подкорытова за многие полезные советы.

Литература

1. U. Koschorke, *Homotopy, concordance and bordism of link maps.* Global analysis in modern mathematics. Publish or Perish, Houston, 1993, pp. 283–299.
2. X.-S. Lin, *On equivalence relations of links in 3-manifolds.* Preprint.
3. У. Масси, Дж. Столлингс, *Алгебраическая топология. Введение.* М.: Мир, 1977.

4. S. Melikhov, *Link concordance implies link homotopy in codimension* ≥ 3. Preprint.
5. J. Milnor, *Link groups.* — Ann. Math. **59** (1954), 177–195.
6. Р. Ф. Саяхова, *Сингулярные зацепления типа* $(1,1,m)$ *в* S^3, $m > 1$. — В кн.: Материалы Всеросс. молодёжной научной школы-конференции по матем. моделированию, геометрии и алгебре,. Казань: Изд-во Каз. матем. общ., 1998, с. 195–199.
7. P. Teichner, *Pulling apart 2-spheres in 4-space.* Preprint.

Sayakhova R. F. Homotopy classification of singular links of type $(1, 1, m; 3)$ with $m > 1$.

Homotopy classification of three-component singular links with components of dimensions 1, 1, and $m > 1$ in the three-sphere S^3 is obtained. It is shown there are links of such type that are pseudo-homotopic but not homotopic.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Renata.Sayakhova@paloma.spbu.ru

Поступило 20 мая 1999 г.