Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

А. Б. Александров

О ТЕОРЕМАХ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КОИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ОПЕРАТОРА СДВИГА. II

Посвящается памяти С. А. Виноградова

§0. Введение

Для удобства читателя мы кратко повторим определения и обозначения первой части* этой статьи. Пусть H^p при $0 < p \leqslant +\infty$ обозначает пространство Харди в открытом единичном круге $\mathbb{D}$. Каждая функция $f \in H^p$ имеет конечные некасательные граничные значения почти всюду на единичной окружности $\mathbb{T}$. Мы будем обозначать граничную функцию той же самой буквой f. Кроме того, мы полагаем по определению $f(\zeta) = \infty$, если f не имеет конечного некасательного граничного значения в точке $\zeta \in \mathbb{T}$. Каждая внутренняя функция Θ распространяется в расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с помощью формулы $\Theta(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\Theta(\overline{z}^{-1})}^{-1}$ при $|z| > 1$. Пусть $\rho(\Theta)$ обозначает граничный спектр внутренней функции Θ, т.е. множество всех $\zeta \in \mathbb{T}$ таких, что $\liminf\limits_{|z|<1, z\to\zeta} |\Theta(z)| = 0$. Нетрудно показать, что $\rho(\Theta)$ – замкнутое подмножество окружности $\mathbb{T}$, и функция Θ мероморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \rho(\Theta)$. Обозначим через $\Theta^*(H^p)$ множество всех функций $f \in H^p$, допускающих аналитическое продолжение через $\mathbb{T} \setminus \rho(\Theta)$ и таких, что $f(\zeta) = \Theta(\zeta)\overline{g(\zeta)\zeta}$ для некоторой функции $g \in H^p$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Ясно, что если Θ – постоянная внутренняя функция, то $\Theta^*(H^p) = \{0\}$. В статье мы будем рассматривать лишь непостоянные внутренние функции.

Исследование частично поддержано Российским Фондом Фундаментальных исследований (грант 99-01-00103).

*Первая часть выйдет в Birkhauser monographs series. В дальнейшем §1.a обозначает §a первой части, а теорема 1.a.b. обозначает теорему a.b первой части.

Каждому борелевскому множеству $K \subset \mathbb{C}$ мы сопоставим пространство $M(K)$ всех комплексных борелевских мер на $\mathbb{C}$ таких, что $|\mu|(\mathbb{C} \setminus K) = 0$, где $|\mu|$ обозначает полную вариацию μ. Через $M_+(K)$ будет обозначаться множество всех положительных мер из $M(K)$. Пусть $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$. Нас интересует следующий вопрос: когда имеет место включение

$$\Theta^*(H^p) \subset L^p(\mu), \tag{0.1}$$

или, точнее, когда $\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} |f|^p d\mu < +\infty$ для всех $f \in \Theta^*(H^p)$? Напомним, что по определению $f(\zeta) = \infty$, если f не имеет конечного граничного значения в ζ. Нетрудно проверить (см. [7]), что при* $p < +\infty$ этот вопрос равносилен следующему: когда существует постоянная $C = C(p, \mu, \Theta)$ такая, что

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} |f|^p \, d\mu \leqslant C \|f\|_{H^p}^p \tag{0.2}$$

для всех $f \in \Theta^*(H^p)$? Из результатов статьи [7] следует, что достаточно проверить неравенство (0.2) для всех $f \in C_A \cap \Theta^*(H^p)$.

Подставляя в (0.2) $f(z) = \frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta(z)}{1-\overline{a}z}$, получаем, что если $\Theta^*(H^2) \subset L^2(\mu)$ для некоторой меры $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$, то

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} \Big| \frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta(z)}{1-\overline{a}z} \Big|^2 d\mu(z) \leqslant C \frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2} \tag{0.3}$$

для всех $a \in \mathbb{D}$. Верно ли обратное? Этот интересный вопрос остается открытым. Другими словами, достаточно ли проверить неравенство (0.2) только для воспроизводящих ядер пространства $\Theta^*(H^2)$? Понятно, что неравенство (0.3) влечет следующее неравенство:

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} d\mu(z) \leqslant \frac{C}{1-|\Theta(a)|^2} \tag{0.4}$$

для всех $a \in \mathbb{D}$. Влечет ли** неравенство (0.4) включение $\Theta^*(H^2) \subset L^2(\mu)$? Этот интересный вопрос, поставленный Коном,

*В дальнейшем мы считаем, что $p < +\infty$, если иное не оговорено.

**Примечание при корректуре. Совсем недавно А. Л. Вольберг получил отрицательный ответ на оба вопроса.

также остается открытым. Известно, что в некоторых частных случаях ответы на оба вопроса положительные. Кон [10] доказал, что ответы положительны для так называемых однокомпонентных внутренних функций Θ. Внутренняя функция Θ называется *однокомпонентной*, если множество $\{z \in \mathbb{D} : |\Theta(z)| < \varepsilon\}$ связно для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$. Кроме того, Кон [11] доказал, что ответы положительны, если $\mu \in M_+([0,1])$.

Обозначим через $\|\mu\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)}$ наименьшую постоянную C, удовлетворяющую условию (0.2) для всех $f \in C_A \cap \Theta^*(H^p)$. Положим $\|\mu\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)} \stackrel{\text{def}}{=} \||\mu|\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)}$ для любой (необязательно положительной) меры $\mu \in M(\overline{\mathbb{D}})$. Легко видеть, что множество $\mathcal{C}_p(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \in M(\overline{\mathbb{D}}) : \|\mu\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)} < +\infty\}$ – банахово пространство, даже если $p < 1$.

Мера $\mu \in M(\overline{\mathbb{D}})$ называется карлесоновой, если

$$|\mu|(\mathcal{D}(\zeta, r)) \leqslant Cr \tag{0.5}$$

для всех $r > 0$ и для всех $\zeta \in \mathbb{T}$, где $\mathcal{D}(\zeta, r)$ обозначает открытый круг радиуса r с центром в ζ. Обозначим через $\|\mu\|_{\mathcal{C}}$ наименьшую константу C, удовлетворяющую неравенству (0.5) для всех $r > 0$ и для всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Тогда множество $\mathcal{C}$ всех карлесоновых мер становится банаховым пространством. Из теоремы вложения Карлесона следует, что $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_p(\Theta)$ для всех $p > 0$ и для всех внутренних функций Θ.

Обозначим через $\|\ \|_{\mathcal{C}(\Theta)}$ наименьшую постоянную C, удовлетворяющую неравенству (0.5) для всех $r > 0$ и для всех $\zeta \in \mathbb{T}$ таких, что $\mathcal{D}(\zeta, r) \cap \{z \in \mathbb{D} : |\Theta(z)| < \frac{1}{2}\} \neq \varnothing$. Положим $\mathcal{C}(\Theta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu \in M(\overline{\mathbb{D}}) : \|\mu\|_{\mathcal{C}(\Theta)} < +\infty\}$. Ясно, что $\mathcal{C}(\Theta)$ является банаховым пространством. Легко показать, что если заменить условие $\mathcal{D}(\zeta, r) \cap \{z \in \mathbb{D} : |\Theta(z)| < \frac{1}{2}\} \neq \varnothing$ условием $\mathcal{D}(\zeta, r) \cap \{z \in \mathbb{D} : |\Theta(z)| < \varepsilon\} \neq \varnothing$, где $\varepsilon \in (0,1)$, то получится эквивалентная норма. Ясно, что $\mathcal{C}(\Theta) = \mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда $\rho(\Theta) = \mathbb{T}$. Положительные меры в $\mathcal{C}(\Theta)$ рассматривались Вольбергом и Треилем [17]. Они доказали, что $\mathcal{C}(\Theta) = \mathcal{C}_p(\Theta)$ для всех $p > 1$, если Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Кроме того, они доказали, что $\mathcal{C}(\Theta) \subset \mathcal{C}_p(\Theta)$ для любой внутренней функции Θ и для всех $p > 0$. Упрощенные доказательства этих утверждений были получены автором [6]. Также в [6] мы анонсировали следующий результат: $\mathcal{C}_p(\Theta) \subset \mathcal{C}(\Theta)$ при всех $p > 0$, если Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Более того, множество $\mathcal{C}_p(\Theta)$ не зависит от p тогда и только тогда, когда Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Эти утверждения будут доказаны в §1 настоящей статьи. Также в §1 будут получены другие критерии того, чтобы внутренняя функция была однокомпонентной. Будут предъявлены оценки высших производных для однокомпонентной внутренней функции. Кроме того, мы получим в некотором смысле точные оценки $\mathcal{C}_p(\Theta)$-норм δ-меры δ_a в точке $a \in \mathbb{D}$ в терминах a и $\Theta(a)$ для однокомпонентной внутренней функции Θ. Аналогичные оценки были получены в §1.2 для произвольной внутренней функции Θ. Следует отметить, что оценки из §1.2 могут быть улучшены для однокомпонентных внутренних функций только в случае $p < 2$. В начале §1 мы устанавливаем теорему 1.1, дающую двустороннюю оценку H^∞-нормы воспроизводящего ядра для произвольной (необязательно однокомпонентной) внутренней функции. Второй параграф посвящен мерам σ_α. С каждой внутренней функцией Θ связано семейство $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{T}}$ сингулярных положительных мер на $\mathbb{T}$, однозначно определяемых по формуле

$$\operatorname{Re}\frac{\alpha+\Theta(z)}{\alpha-\Theta(z)} = \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}\, d\sigma_\alpha(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Меры σ_α играют важную роль в теории операторов, в частности, при изучении одномерных возмущений унитарного оператора, см. [9]. Кларк [9] также получил следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^2 d\sigma_\alpha = \|f\|^2_{H^2}$$

для всех $\alpha \in \mathbb{T}$ и для всех f, принадлежащих некоторому плотному подмножеству пространства $\Theta^*(H^2)$. Полторацкий [16] доказал, что любая функция $f \in \Theta^*(H^2)$ имеет конечные некасательные граничные значения σ_α-почти всюду для всех $\alpha \in \mathbb{T}$. Таким образом, эта формула Кларка имеет место для любой функции $f \in \Theta^*(H^2)$. Из теоремы Кларка также следует, что $\sigma_\alpha \in \mathcal{C}_p(\Theta)$ для любых $\alpha \in \mathbb{T}$ и $p \geqslant 2$ (см. [4]). Но в случае $p < 2$, вообще говоря, $\sigma_\alpha \notin \mathcal{C}_p(\Theta)$ (см. [4]). Тем не менее в этом случае, если $f \in \Theta^*(H^p)$ (или даже только $f \in H^p$), то $f \in L^p(\sigma_\alpha)$ для почти всех $\alpha \in \mathbb{T}$, поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma_\alpha \Big) dm = \|f\|^p_{L^p} \tag{0.6}$$

для любой функции $f \in L^p(m)$ (см. предложение 1 в [3]). В §2 мы докажем, что при $p < 2$ неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^p \, d\sigma_\alpha \Big)^{\frac{1}{2-p}} dm \leqslant C(p) \|f\|_{H^p}^{\frac{p}{2-p}}$$

имеет место для любых $f \in \Theta^*(H^p)$. Кроме того, мы дадим необходимое и достаточное условие для того, чтобы меры σ_α принадлежали пространству $\mathcal{C}(\Theta)$. В §3 будет дано полное описание множества $\mathcal{C}_p(B)$ для всех $p > 0$ в случае, когда B – конечное произведение интерполяционных произведений Бляшке, множество нулей которого содержится в угле Штольца с вершиной в точке 1. Это описание позволит построить в §4 ряд довольно неожиданных примеров. Упомянем здесь лишь некоторые из них.

Существуют интерполяционное произведение Бляшке B и мера $\mu \in M_+(\mathbb{D})$ такие, что $B^*(H^1) \subset L^1(\mu)$ и $B^*(H^2) \subset L^2(\mu)$, но $B^*(H^p) \not\subset L^p(\mu)$ для любого $p \in (1, 2)$.

Существуют интерполяционное произведение Бляшке B и мера $\mu \in M_+(\mathbb{D})$ такие, что $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $p = \frac{1}{n}$, где n – положительное целое число.

Существуют интерполяционное произведение Бляшке B и мера $\mu \in M_+(\mathbb{D})$ такие, что $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $p \neq \frac{1}{n}$, где n – положительное целое число.

Также отметим, что множество всех p таких, что $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$, может иметь любое конечное число связных компонент.

Завершим этот параграф списком обозначений.

$\mathbb{N}$ – множество всех положительных целых чисел;

$\mathbb{Z}_+$ – множество всех неотрицательных целых чисел;

$\mathbb{D}$ – открытый единичный круг;

$\mathbb{T}$ – единичная окружность;

m – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$;

δ_a – δ-мера в точке a;

∂G – граница множества G;

$L^p(\mu)$, где μ – мера, и ℓ^p обозначают обычные L^p-пространства;

$L^p \stackrel{\text{def}}{=} L^p(m)$;

$L^{p,\infty}(\mu)$ обозначает слабое L^p-пространство;

$M(K)$ для борелевского множества $K \subset \mathbb{C}$ обозначает множество всех комплексных борелевских мер μ на $\mathbb{C}$ с носителем на K;

$M_+(K)$ – множество положительных мер в $M(K)$.

Для $\mu \in M(\mathbb{T})$ положим $\mu_+(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z}$; для $f \in L^1(m)$ положим $f_+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} (fm)_+$.

Для внутренней функции Θ положим $P_\Theta f \stackrel{\mathrm{def}}{=} f_+ - \Theta(\overline{\Theta}f)_+$, где $f \in L^1(m)$.

§1. Однокомпонентные внутренние функции и теоремы вложения

Внутренняя функция Θ называется *однокомпонентной*, если множество $\{z \in \mathbb{D} : |\Theta(z)| < \varepsilon\}$ связно при некотором $\varepsilon \in (0,1)$. Этот класс внутренних функций рассматривался Коном [10] в связи с теоремами вложения, см. также [17, 4, 6].

Однако мы начнем этот параграф с теоремы, которая верна для произвольной (необязательно однокомпонентной) внутренней функции. С каждой внутренней функцией Θ свяжем функцию $\omega = \omega_\Theta$, определенную в $\mathbb{C}$ следующим образом: $\omega(a) = \inf\{|z-a| : z \in \mathbb{D}, |\Theta(z)| < \frac{1}{2}\}$.

Теорема 1.1. *Существуют абсолютные положительные константы C_1 и C_2 такие, что*

$$\frac{C_1}{1-|a|+\omega(a)} \leqslant \left\| \frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z} \right\|_{H^\infty} \leqslant \frac{C_2}{1-|a|+\omega(a)} \tag{1.1}$$

для любой внутренней функции Θ и для любого $a \in \mathbb{D}$.

Доказательство. Зафиксируем точку $b \in \mathbb{D}$. Заметим, что $\dfrac{1-\overline{\Theta(b)}\Theta}{1-\overline{b}z} = P_\Theta\left(\dfrac{1-|b|^2}{|1-\overline{b}z|}\right)$. Из следствия 3 к теореме 1.1 в [6] при $\mu = \delta_a$ вытекает следующее неравенство:

$$\left|\frac{1-\overline{\Theta(b)}\Theta(a)}{1-\overline{b}a}\right| \leqslant \frac{C}{1-|a|+\omega(\frac{a}{|a|})}. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что $2(1-|a|+\omega(\frac{a}{|a|})) \geqslant 1-|a|+\omega(a)$. Таким образом, (1.2) влечет правое неравенство в (1.1), поскольку b – произвольная точка круга $\mathbb{D}$. Чтобы доказать левое неравенство в (1.1), рассмотрим точку $b \in \mathbb{D}$ такую, что $|\Theta(b)| < \frac{1}{2}$ и $|a-b| < 2\omega(a)$. Тогда

$$\left|\frac{1-\overline{\Theta(b)}\Theta(a)}{1-\overline{b}a}\right| \geqslant \frac{1}{2|1-\overline{b}a|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2(1-|a|^2+|\overline{a}||a-b|)} \geqslant \frac{C}{1-|a|+\omega(a)}. \ \square$$

Следствие. *В обозначениях теоремы* 1.1 *имеет место неравенство*

$$\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2} \leqslant \frac{C_2}{1-|a|+\omega(a)}. \ \square$$

Следующая теорема, частично анонсированная в [6], показывает, что обратное неравенство (с другой константой) выполнено только для однокомпонентных внутренних функций.

Теорема 1.2. *Пусть* Θ – *внутренняя функция. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) Θ *однокомпонентна;*

2) *существует число* $C = C(\Theta)$ *такое, что*

$$\left\|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right\|_{H^\infty} \leqslant C\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2} \tag{1.3}$$

для всех $a \in \mathbb{D}$;

3) $\left\|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right\|_{H^\infty} = o\Big(\frac{1}{1-|a|^2}\Big)$ *при* $|\Theta(a)| \to 1-$.

Доказательство. Докажем, что 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть Θ – однокомпонентная функция. Тогда существует число $\eta = \eta(\Theta) \in (0,1)$ такое, что $|\Theta(r\zeta)| \leqslant \eta$ для всех $\zeta \in \mathbb{T}$ и для всех $r \in [0, 1-\frac{\omega(\zeta)}{4})$, см. [17] и [14]. По теореме 1.1 достаточно доказать неравенство $(1-|a|+\omega(a))^{-1} \leqslant C\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}$ или, что то же самое, $(1-|a|+\omega(\frac{a}{|a|}))^{-1} \leqslant C\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}$. Если $1-|a| \geqslant \frac{1}{2}\omega(\frac{a}{|a|})$, то $|\Theta(a)| \leqslant \eta$, и требуемое неравенство очевидно. Теперь предположим, что $1-|a| \leqslant \frac{1}{2}\omega(\frac{a}{|a|})$. Положим $b = \frac{a}{|a|}(1-\frac{1}{2}\omega(\frac{a}{|a|}))$. Тогда $|\Theta(b)| \leqslant \eta$, и из хорошо известного неравенства

$$\left|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta(b)}{1-\overline{a}b}\right|^2 \leqslant \frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}\ \frac{1-|\Theta(b)|^2}{1-|b|^2}$$

следует, что

$$\frac{(1-\eta)^2}{\Big(1-|a|(1-\frac{1}{2}\omega(\frac{a}{|a|}))\Big)^2} \leqslant \frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}\ \frac{1}{1-(1-\frac{1}{2}\omega(\frac{a}{|a|}))^2},$$

что доказывает утверждение 2), поскольку

$$1-|a|\Big(1-\frac{1}{2}\omega\big(\frac{a}{|a|}\big)\Big)\leqslant 1-\Big(1-\frac{1}{2}\omega\big(\frac{a}{|a|}\big)\Big)^2.$$

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна. Перейдем к импликации 3) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что Θ не является однокомпонентной. Тогда для любого числа $\tau\in(0,1)$ множество $\Omega_\tau=\{z\in\mathbb{D}:|\Theta(z)|<\tau\}$ несвязно. Пусть G – компонента связности области Ω_τ такая, что $G\not\ni 0$. Ясно, что $\inf\limits_G|\Theta|=0$. Следовательно, существует точка $z_\tau\in G$ такая, что $|\Theta(z_\tau)|<\frac{1}{2}$. Возьмем число $r\in(0,1)$ такое, что $w_\tau=rz_\tau\in\partial G$. Тогда $|\Theta(w_\tau)|=\tau$ и $\omega(w_\tau)\leqslant|z_\tau-w_\tau|<1-|w_\tau|$. Значит, по теореме 1.1 имеем $\Big\|\dfrac{1-\overline{\Theta(w_\tau)}\Theta}{1-\overline{w}_\tau z}\Big\|_{H^\infty}\geqslant\dfrac{C_1}{2(1-|w_\tau|)}$, и приходим к противоречию. □

Следующая теорема показывает, что теорема 1.2.1 может быть уточнена для однокомпонентных внутренних функций.

Теорема 1.3. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда*

$$|f(a)|^p\leqslant C(p,\Theta)\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}\|f\|^p_{H^p}$$

для всех $f\in\Theta^*(H^p)$, всех $a\in\mathbb{D}$ и всех $p\in(0,+\infty)$.

Доказательство. Применяя к мере δ_a теорему Вольберга–Треиля (см. [17]), находим

$$|f(a)|^p\leqslant\frac{C(p)}{1-|a|+\omega(a)}$$

для всех $f\in\Theta^*(H^p)$, всех $a\in\mathbb{D}$ и всех $p\in(0,+\infty)$. Остается заметить, что

$$(1-|a|+\omega(a))^{-1}\leqslant C(\Theta)\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}$$

для всех $a\in\mathbb{D}$, поскольку Θ – однокомпонентная функция (см. доказательство теоремы 1.2). □

Следствие. *Если Θ – однокомпонентная внутренняя функция и $1 < p \leqslant +\infty$, то*

$$C_1(\Theta,p)\left(\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \left\|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right\|_{H^p} \leqslant$$

$$\leqslant C_2(\Theta,p)\left(\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}\right)^{1-\frac{1}{p}} \tag{1.4}$$

для всех $a \in \mathbb{D}$.

Доказательство. Оценка сверху следует из теоремы 1.3 посредством двойственности, если $1 < p < +\infty$. Случай $p = +\infty$ был рассмотрен выше (теорема 1.2). Чтобы получить оценку снизу, достаточно применить теорему 1.3 к $f = \dfrac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}$. □

Замечание 1. При $p \geqslant 2$ теорема 1.3 верна для произвольной (необязательно однокомпонентной) внутренней функции Θ. Это следует из теоремы 1.2.1. Следовательно, как ясно из доказательства следствия к теореме 1.3, оценка сверху в (1.4) при $p \in (1,2]$ и оценка снизу в (1.4) при $p \in [2,+\infty]$ верны для произвольной внутренней функции Θ. При этом соответствующие константы $C_1(\Theta,p)$ при $p \geqslant 2$ и $C_2(\Theta,p)$ при $p \leqslant 2$ могут быть выбраны зависящими только от p.

Замечание 2. Положим $\omega_\varepsilon(a) = \omega_{\varepsilon,\Theta}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{|z-a| : |\Theta(z)| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда $\omega = \omega_{\frac{1}{2}}$. Легко увидеть, что рассмотренное выше утверждение, касающееся ω, остается верным также для ω_ε, но соответствующие константы будут зависеть еще и от ε.

Теорема 1.4. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда $\mathcal{C}(\Theta) = \mathcal{C}_p(\Theta)$ для всех $p \in (0,+\infty)$.*

Следует отметить, что включение $\mathcal{C}(\Theta) \subset \mathcal{C}_p(\Theta)$ было доказано Вольбергом и Треилем [17] для произвольной внутренней функции Θ при всех $p \in (0,+\infty)$. В той же самой статье [17] было доказано, что $\mathcal{C}_p(\Theta) = \mathcal{C}(\Theta)$ для однокомпонентных внутренних функций при $p \in (1,+\infty)$. Чтобы распространить их доказательство на случай $p \leqslant 1$, нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. С каждой внутренней функцией Θ и $\lambda \in \mathbb{D}$ свяжем внутреннюю функцию $\Theta_\lambda(z) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\Theta(z)-\Theta(\lambda)}{1-\overline{\Theta(\lambda)}\Theta(z)}\ \dfrac{1-\overline{\lambda}z}{z-\lambda}$.

Лемма 1.5. *Пусть Θ – внутренняя функция. Предположим, что $|\Theta| < \eta < 1$ всюду на связном подмножестве Ω круга $\mathbb{D}$, причем $\overline{\Omega} \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$. Пусть $\lambda \in \Omega$ и $\Theta(\lambda) = 0$. Тогда $|\Theta_\lambda| < \sqrt{\eta}\dfrac{3+\eta}{1+3\eta} < 1$ всюду в Ω.*

Доказательство. Сначала докажем, что $|\Theta_\lambda(\lambda)| < \dfrac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta}$. Предположим, что $|\Theta_\lambda(\lambda)| \geqslant \dfrac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta}$. Тогда $|\Theta_\lambda| \geqslant \sqrt{\eta}$ на окружности $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{D} : |\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}| = \sqrt{\eta}\}$. Следовательно, $|\Theta| \geqslant \eta$ на Γ. Значит, ввиду того, что $\overline{\Omega} \cap \mathbb{T} \neq \varnothing$, окружность Γ разделяет множество Ω, что противоречит связности Ω. Следовательно, $|\Theta_\lambda(\lambda)| < \dfrac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta}$. Теперь ясно, что

$$|\Theta_\lambda(z)| < \frac{\sqrt{\eta} + \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta}}{1 + \frac{2\eta}{1+\eta}} = \sqrt{\eta}\frac{3+\eta}{1+3\eta},$$

если

$$\left|\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}\right| \leqslant \sqrt{\eta}.$$

Если же

$$\left|\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}\right| \geqslant \sqrt{\eta} \quad \text{и} \quad z \in \Omega,$$

то

$$|\Theta_\lambda(z)| = |\Theta(z)|\left|\frac{1-\overline{\lambda}z}{z-\lambda}\right| \leqslant \sqrt{\eta} < \sqrt{\eta}\frac{3+\eta}{1+3\eta}. \qquad \square$$

Лемма 1.6. *Пусть Θ – внутренняя функция, не являющаяся конечным произведением Бляшке. Допустим, что множество $\Omega = \{|\Theta| < \eta\}$ связно, где $0 < \eta < 1$. Тогда существует вещественное число $\eta' < 1$, зависящее только от η, такое, что множество $\{|\Theta_\lambda| < \eta'\}$ связно и содержит Ω для всех $\lambda \in \Omega$.*

Доказательство. Ясно, что $\left|\dfrac{\Theta(z) - \Theta(\lambda)}{1 - \overline{\Theta(\lambda)}\Theta(z)}\right| < \dfrac{2\eta}{1+\eta^2} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0$ для всех $z, \lambda \in \Omega$. Положим $\eta' = \sqrt{\eta_0}\dfrac{3+\eta_0}{1+3\eta_0}$. Применяя лемму 1.5 ко внутренней функции $\dfrac{\Theta - \Theta(\lambda)}{1 - \overline{\Theta(\lambda)}\Theta}$, получаем требуемое включение

$\Omega \subset \{|\Theta_\lambda| < \eta'\}$. Теперь докажем, что множество $G = \{|\Theta_\lambda| < \eta'\}$ связно. Каждая компонента связности G либо содержит Ω, либо не пересекается с Ω. Таким образом, достаточно доказать, что каждая компонента связности G пересекается с Ω. Предположим, что существует компонента связности G_0 множества G такая, что $G_0 \cap \Omega = \varnothing$. Если $z \in G_0$, то $|\Theta_\lambda(z)| \geqslant \left|\dfrac{\Theta(z) - \Theta(\lambda)}{1 - \overline{\Theta(\lambda)}\Theta(z)}\right| \geqslant \dfrac{\eta - |\Theta(\lambda)|}{1 - \eta|\Theta(\lambda)|}$. Следовательно, функция Θ_λ^{-1} ограничена в G_0. Кроме того, ясно, что $|\Theta_\lambda^{-1}| = (\eta')^{-1}$ всюду в $\mathbb{D} \cap \partial G_0$ и $m(\mathbb{T} \cap \partial G_0) = 0$. Значит, по принципу максимума имеем $|\Theta_\lambda| \geqslant \eta'$ всюду в G_0 и тем самым приходим к противоречию. □

Лемма 1.7. *В условиях леммы* 1.6 *для любых* $\lambda \in \Omega$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *существует функция* $f \in \Theta^*(H^2)$ *такая, что* $\dfrac{1}{|1 - \overline{\lambda} z|^n} \leqslant |f(z)| \leqslant \dfrac{C(n, \eta)}{|1 - \overline{\lambda} z|^n}$ *для всех* $z \in \mathbb{D}$.

Доказательство. Применим индукцию по n. Если $n = 1$, то можно взять $f = \dfrac{1}{1 - \eta} \dfrac{1 - \overline{\Theta(\lambda)}\Theta}{1 - \overline{\lambda} z}$ и $C(1, \eta) = \dfrac{1 + \eta}{1 - \eta}$. Предположим, что лемма 1.7 доказана при $n = k$, и докажем ее для $n = k + 1$. Лемма 1.6 позволяет применить лемму 1.7 при $n = k$ к внутренней функции Θ_λ и числу η'. Значит, существует функция $g \in \Theta_\lambda^*(H^2)$ такая, что $\dfrac{1}{|1 - \overline{\lambda} z|^k} \leqslant |g(z)| \leqslant \dfrac{C(n, \eta')}{|1 - \overline{\lambda} z|^k}$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Рассмотрим функцию $f = \dfrac{g}{1 - \eta} \dfrac{1 - \overline{\Theta(\lambda)}\Theta}{1 - \overline{\lambda}}$. Легко видеть, что $f \in \Theta^*(H^2)$ и $\dfrac{1}{|1 - \overline{\lambda} z|^{k+1}} \leqslant |f(z)| \leqslant \dfrac{C(k + 1, \eta)}{|1 - \overline{\lambda} z|^{k+1}}$ для всех $z \in \mathbb{D}$ при $C(k + 1, \eta) = \dfrac{1 + \eta}{1 - \eta} C(k, \eta')$. □

Доказательство теоремы 1.4. Включение $\mathcal{C}(\Theta) \subset \mathcal{C}_p(\Theta)$ было доказано Вольбергом и Треилем [17], см. также [6]. Докажем, что $\mathcal{C}_p(\Theta) \subset \mathcal{C}(\Theta)$. Если Θ – конечное произведение Бляшке, то $\mathcal{C}_p(\Theta) = M(\overline{\mathbb{D}}) = \mathcal{C}(\Theta)$. Значит, можно предполагать, что Θ не является конечным произведением Бляшке. В [17] доказано, что если r – достаточно малое положительное число и $\inf\{|\Theta(z)| : z \in \mathbb{D}, |z - \zeta| < r\} < \frac{1}{2}$, где $\zeta \in \mathbb{T}$, то $|\Theta((1 - r)\zeta)| < \eta_0$, где $\eta_0 = \eta_0(\Theta) \in (0, 1)$. Известно (см. [10]), что если множество

$\{|\Theta| < \varepsilon\}$ связно при некотором $\varepsilon = \varepsilon_0 \in (0,1)$, то оно связно при всех $\varepsilon \in [\varepsilon_0, 1)$. Следовательно, можно выбрать число $\eta \in [\eta_0, 1)$ так, чтобы множество $\Omega = \{|\Theta| < \eta\}$ было связно. Возьмем целое число n, удовлетворяющее условию $np > 1$. Пусть μ – положительная мера, принадлежащая пространству $\mathcal{C}_p(\Theta)$. Нам нужно доказать, что $\mu \in \mathcal{C}(\Theta)$. Рассмотрим достаточно малый круг $\mathcal{D}(\zeta, r)$, где $\zeta \in \mathbb{T}$, такой, что $\mathcal{D}(\zeta, r) \cap \{|\Theta| < \frac{1}{2}\} \neq \varnothing$. Тогда $|\Theta(\lambda)| < \eta_0 \leqslant \eta$, где $\lambda = (1-r)\zeta$. По лемме 1.7 существует функция $f \in \Theta^*(H^2)$ такая, что $\dfrac{1}{|1-\overline{\lambda}z|^n} \leqslant |f(z)| \leqslant \dfrac{C_n(\Theta)}{|1-\overline{\lambda}z|^n}$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Принимая во внимание то, что $|1-\overline{\lambda}z| = |\zeta(\overline{\zeta}-\overline{\lambda}) + \overline{\lambda}(\zeta - z)| \leqslant 2r$ при $z \in \mathcal{D}(\zeta, r)$ и $\|f\|_{H^p}^p \leqslant Cr^{1-np}$, находим

$$\mu(\mathcal{D}(\zeta, r)) \leqslant (2r)^{np} \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \, d\mu(z) \leqslant (2r)^{np} C \|f\|_{H^p}^p \leqslant Cr.$$

Следовательно, $\mu \in \mathcal{C}(\Theta)$. $\square$

Из следующей теоремы вытекает еще один критерий однокомпонентности внутренней функции.

Теорема 1.8. *Пусть Θ – внутренняя функция. Допустим, что $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) Θ *однокомпонентна;*
2) $\mathcal{C}_p(\Theta) = \mathcal{C}(\Theta)$.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) при $p > 1$ была доказана Вольбергом и Треилем [17]. Случай $p = 1$ содержится в теореме 1.4. Докажем, что 2) $\Longrightarrow$ 1). По теореме 1.2.1 имеем $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)} = o((1-|a|)^{-1})$ при $|\Theta(a)| \to 1$. Следовательно, $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}(\Theta)} = o((1-|a|)^{-1})$ при $|\Theta(a)| \to 1$, откуда $(1-|a|+\omega(a))^{-1} = o((1-|a|)^{-1})$ при $|\Theta(a)| \to 1$. Остается применить теоремы 1.1 и 1.2. $\square$

Замечание. Условие $p \geqslant 1$ существенно в теореме 1.8. Действительно, если $\rho(\Theta) = \mathbb{T}$, то $\mathcal{C}_p(\Theta) = \mathcal{C} = \mathcal{C}(\Theta)$ при $p < 1$ по теореме 1.3.1.

Хорошо известно, что каждая голоморфная функция $\Theta : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ удовлетворяет неравенству

$$|\Theta'(z)| \leqslant \frac{1-|\Theta(z)|^2}{1-|z|^2}$$

всюду в $\mathbb{D}$, из которого с помощью оценок Коши получаем следующее неравенство для высших производных:

$$|\Theta^{(n)}(z)| \leqslant C(n)\frac{1-|\Theta(z)|^2}{(1-|z|^2)^n}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ и при всех $n \in \mathbb{N}$ (см. также доказательство теоремы 1.12 ниже). Следующая теорема показывает, что если Θ – однокомпонентная внутренняя функция, то для высших производных имеется более сильное неравенство.

Теорема 1.9. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда*

$$|\Theta^{(n)}(z)| \leqslant C(n,\Theta)\left(\frac{1-|\Theta(z)|^2}{1-|z|^2}\right)^n \tag{1.5}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$ и $n \in \mathbb{N}$.

Начнем с некоторых следствий этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда*

$$|\Theta^{(n)}(\zeta)| \leqslant C(n,\Theta)\,|\Theta'(\zeta)|^n \tag{1.6}$$

для всех $\zeta \in \mathbb{T}\setminus\rho(\Theta)$ и $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Достаточно перейти к пределу при $z \to \zeta$ в (1.5). $\square$

Следствие 2. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда*

$$\left|\left(\frac{1}{\Theta'}\right)^{(n)}\right| \leqslant C(n,\Theta)|\Theta'|^{n-1}$$

всюду на $\mathbb{T}\setminus\rho(\Theta)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Понятно, что $\left(\frac{1}{\Theta'}\right)^{(n)}$ есть линейная комбинация элементов $(\Theta')^{\alpha_1}(\Theta'')^{\alpha_2}\dots(\Theta^{(k)})^{\alpha_k}$ при $\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_k \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{k} j\alpha_j = n-1$. Остается применить следствие 1. $\square$

Следствие 3. *Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Тогда*

$$\left|\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(\Theta')^k}\right| \leqslant C(n,k,\Theta)|\Theta'|^{n-k}$$

всюду на $\mathbb{T}\setminus\rho(\Theta)$ при всех $n,k\in\mathbb{N}$. $\square$

Чтобы доказать теорему 1.9, нам нужна следующая лемма.

Лемма 1.10. *Пусть Θ – внутренняя функция. Тогда*

$$\frac{1}{(n-1)!}\left|f^{(n-1)}(a)\right| \leqslant \left\|f\Big(\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\Big)^n\right\|_{H^1}$$

при всех $f\in\Theta^*(H^1)$, всех $a\in\mathbb{D}$ и всех $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) = \int\limits_{\mathbb{T}}\frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^{n-1}}{(1-a\overline{\zeta})^n}dm(\zeta) =$$

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{f(\zeta)\overline{\zeta}^{n-1}(1-\Theta(a)\overline{\Theta(\zeta)})^n}{(1-a\overline{\zeta})^n}dm(\zeta). \quad \square$$

Следствие. *Пусть Θ – внутренняя функция. Тогда*

$$\frac{1}{n!}\left|\Theta^{(n)}(a)\right| \leqslant \left\|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right\|^{n+1}_{H^{n+1}}$$

для всех $a\in\mathbb{D}$ и всех $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 1.10 к функции $f=\dfrac{\Theta-\Theta(a)}{z-a}$ и затем заметить, что $|f|=\left|\dfrac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right|$ почти везде на $\mathbb{T}$. $\square$

Доказательство теоремы 1.9. Требуемое утверждение вытекает из следствия к лемме 1.10 и следствия к теореме 1.3. $\square$

Замечание. Нетрудно увидеть, что доказательства теоремы 1.9 и леммы 1.10 работают также и для производных дробного порядка. При этом верны следующие неравенства:

$$|\Theta^{(s)}(a)| \leqslant C(s)\left\|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right\|^{s+1}_{H^{s+1}},$$

$$|\Theta^{(s)}(a)| \leqslant C(s)\frac{(1-|\Theta(a)|^2)^{\min(1,s)}}{(1-|a|^2)^s}$$

для всех $a \in \mathbb{D}$ и $s \in (0, +\infty)$. Последнее неравенство справедливо для произвольной голоморфной функции $\Theta : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$.

Теорема 1.11. *Пусть Θ – внутренняя функция. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *Θ однокомпонентна;*

2) *Θ удовлетворяет условию (1.5) при $n = 2$ и $\liminf\limits_{r\to 1-} |\Theta(r\zeta)| < 1$ для всех $\zeta \in \rho(\Theta)$;*

3) *Θ удовлетворяет условию (1.5) при $n = 2$ и $\sigma_\alpha(\rho(\Theta)) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{T}$;*

4) *Θ удовлетворяет условию (1.5) при $n = 2$, $m(\rho(\Theta)) = 0$, и функция Θ' неограничена на любой дуге $\Delta \subset \mathbb{T} \setminus \rho(\Theta)$ такой, что $\overline{\Delta} \cap \rho(\mathbb{T}) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Если Θ однокомпонентная, то $\limsup\limits_{r\to 1-} |\Theta(r\zeta)| \leqslant C(\Theta) < 1$ для любого $\zeta \in \rho(\Theta)$, см. [17]. Значит, импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из теоремы 1.9. Понятно, что носитель меры σ_α лежит на множестве $\{\Theta = \alpha\}$, см. [3]. Это доказывает, что 2) $\Longrightarrow$ 3). Докажем, что 3) $\Longrightarrow$ 4). В [3] доказано, что $m(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma_\alpha(E) = 0$ для почти всех $\alpha \in \mathbb{T}$. Следовательно $m(\rho(\Theta)) = 0$. Допустим, что функция Θ' ограничена на некоторой дуге $\Delta \subset \mathbb{T} \setminus \rho(\Theta)$, для которой $\overline{\Delta} \cap \rho(\Theta) \neq \varnothing$. Пусть $\zeta_0 \in \overline{\Delta} \cap \rho(\Theta)$. Заметим, что $|\Theta'(\zeta)| = \left\|\dfrac{\Theta - \Theta(\zeta)}{z - \zeta}\right\|_{H^2}$. Следовательно, по лемме Фату имеем $\dfrac{\Theta - \alpha_0}{z - \zeta_0} \in H^2$ для некоторого $\alpha_0 \in \mathbb{T}$. Значит, $\sigma_{\alpha_0}(\zeta_0) > 0$, что противоречит тому, что $\sigma_{\alpha_0}(\rho(\Theta)) = 0$. Теперь обратимся к импликации 4) $\Longrightarrow$ 1). По следствию 2 к теореме 1.9 при $n = 1$ функция $(\Theta')^{-1}$ (а следовательно и функция $|\Theta'|^{-1}$) удовлетворяет условию Липшица на каждом дополнительном интервале к $\rho(\Theta)$ с константой C, не зависящей от дополнительного интервала. Теперь оценим H^∞-норму функции $f = \dfrac{\Theta - \Theta(\zeta)}{z - \zeta}$, где $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \rho(\Theta)$. Положим $\alpha = \Theta(\zeta)$. Ясно, что $\|f\|_{L^\infty(\sigma_\alpha)} = |\Theta'(\zeta)|$. Оценим $L^\infty(\sigma_{-\alpha})$-норму функции f. Обозначим через ξ точку множества $\{\lambda \in \mathbb{T} \setminus \rho(\Theta) : \Theta(\lambda) = -\alpha\}$, ближайшую к ζ. Пусть τ – точка множества $\rho(\Theta)$, ближайшая к ζ (если $\rho(\Theta)=\varnothing$, то Θ – конечное произведение Бляшке, и в этом случае требуемое утверждение тривиально). Ясно, что $\|f\|_{L^\infty(\sigma_{-\alpha})}\leqslant\dfrac{2}{\min(|\xi-\zeta|,|\tau-\zeta|)}$. Условие Липшица и условие 4) влекут, что $|\tau-\zeta|^{-1}\leqslant C|\Theta'(\zeta)|$. Докажем аналогичное неравенство для ξ. Обозначим через Δ меньшую из замкнутых дуг окружности $\mathbb{T}$, соединяющих точки ζ и ξ. Можно предполагать, что $|\xi-\zeta|<|\tau-\zeta|$. Тогда $\Delta\cap\rho(\Theta)=\varnothing$, и имеем:

$$\int\limits_{\Delta}|\Theta'(z)||dz|=-i\int\limits_{\Delta}\frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)}=\pi.$$

Следовательно, по теореме о среднем значении существует точка $\zeta_0\in\Delta$, для которой $|\Theta'(\zeta_0)|\geqslant\dfrac{1}{2m(\Delta)}$. Используя условие Липшица для $|\Theta'|^{-1}$, найдем

$$|\Theta'(\zeta)|^{-1}-2m(\Delta)\leqslant|\Theta'(\zeta)|^{-1}-|\Theta'(\zeta_0)|^{-1}\leqslant Cm(\Delta).$$

Теперь ясно, что $\|f\|_{L^\infty(\sigma_{-\alpha})}\leqslant C|\Theta'(\zeta)|$. Из теоремы 2 в [5] получаем

$$\|f\|_{H^\infty}\leqslant\mathrm{const}\left(\|f\|_{L^\infty(\sigma_\alpha)}+\|f\|_{L^\infty(\sigma_{-\alpha})}\right)\leqslant C|\Theta'(\zeta)|.$$

Таким образом, мы доказали, что $|\Theta(z)-\Theta(\zeta)|\leqslant C|\Theta'(\zeta)||z-\zeta|$. Остается применить теорему 6.4 из [4]. $\square$

Автору неизвестно, обязана ли быть однокомпонентной внутренняя функция Θ, для которой $m(\rho(\Theta))=0$ и выполнено условие (1.5) при $n=2$.

Замечание 1. Пусть Θ – однокомпонентная внутренняя функция. Положим

$$\varphi(z)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}(\Theta'(\zeta))^{-1}, & \text{если}\quad \zeta\in\mathbb{T}\setminus\rho(\Theta);\\ 0, & \text{если}\quad \zeta\in\rho(\Theta).\end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что φ (а значит $|\varphi|$) удовлетворяет условию Липшица. Более того, функции φ^n и $|\varphi|^n$ принадлежат классу C^{n-1}, и их $(n-1)$-ые производные удовлетворяют условию Липшица.

Замечание 2. Из доказательства ясно, что теорема 1.11 остается верной, если заменить условие (1.5) при $n=2$ условием (1.6) при $n=2$.

Замечание 3. Существует интерполяционное произведение Бляшке с единственной особой точкой на $\mathbb{T}$, которое не удовлетворяет условию (1.5) при $n = 2$.

Доказательство. Рассмотрим произведение Бляшке B с последовательностью нулей $\{a_j\}_{j\geqslant 1}$ на $[0, 1)$, удовлетворяющих соотношению $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{1 - a_{j+1}}{1 - a_j} = 0$. Легко проверить, что функция B не является однокомпонентной. Следовательно, по теореме 1.11 B не удовлетворяет условию (1.5) при $n = 2$. $\square$

С другой стороны, следующая теорема показывает, что существует интерполяционное произведение Бляшке B, для которого $\rho(B) = \mathbb{T}$, и выполнены неравенства (1.5) для всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.12. *Существует интерполяционное произведение Бляшке B, для которого $\rho(B) = \mathbb{T}$, удовлетворяющее следующим неравенствам:*

$$|B^{(k)}(z)| \leqslant C_{k,n} \frac{(1 - |B(z)|^2)^n}{(1 - |z|^2)^k} \tag{1.7}$$

при всех $z \in \mathbb{D}$ и всех $k, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Легко понять, что из (1.7) при $k = 1$, $n = 2$ вытекает, что $\rho(B) = \mathbb{T}$. В [8] доказано, что существует интерполяционное произведение Бляшке, удовлетворяющее условию (1.7) при $k = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что если $|z - w| \leqslant \dfrac{1 - |w|}{2}$, то $C^{-1} \leqslant \dfrac{1 - |B(z)|^2}{1 - |B(w)|^2} \leqslant C$, где C – абсолютная постоянная. Остается заметить, что по оценкам Коши из условия (1.7) при $k = 1$ и всех n следует выполнение (1.7) при всех $k, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Закончим этот параграф еще одним необходимым и достаточным условием однокомпонентности для внутренних функций.

Теорема 1.13. *Внутренняя функция Θ является однокомпонентной тогда и только тогда, когда $\mathcal{C}_p(\Theta)$ не зависит от $p \in (0, +\infty)$, т.е. $\mathcal{C}_p(\Theta) = \mathcal{C}_q(\Theta)$ для всех $p, q \in (0, +\infty)$.*

Доказательство. Если Θ однокомпонентна, то $\mathcal{C}_p(\Theta) = \mathcal{C}(\Theta)$ для всех $p \in (0, +\infty)$ по теореме 1.4. Теперь предположим, что $\mathcal{C}_p(\Theta)$ не зависит от $p \in (0, +\infty)$. Тогда по теореме об открытом отображении нормы $\|\ \|_{\mathcal{C}_p(\Theta)}$ и $\|\ \|_{\mathcal{C}_q(\Theta)}$ эквивалентны для всех $p, q \in$

$(0,+\infty)$. В частности, $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_{\frac{3}{2}}(\Theta)} \leqslant C\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_2(\Theta)}$. Заметим, что

$$\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_2(\Theta)} = \frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2} \quad \text{и} \quad \|\delta_a\|_{\mathcal{C}_{\frac{3}{2}}(\Theta)} \geqslant C\left\|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right\|_{H^3}^{\frac{3}{2}}.$$

Следовательно,

$$\left\|\frac{1-\overline{\Theta(a)}\Theta}{1-\overline{a}z}\right\|_{H^3}^{3} \leqslant C\left(\frac{1-|\Theta(a)|^2}{1-|a|^2}\right)^2.$$

Применяя следствие из леммы 1.10, получаем, что Θ удовлетворяет условию (1.5) при $n=2$. Из теоремы 4 из [7] следует, что $\sigma_\alpha(\rho(\Theta))=0$ для всех $\alpha\in\mathbb{T}$, так как $\sigma_\alpha\in\mathcal{C}_p(\Theta)$ при $p<1$. Остается применить теорему 1.11. $\square$

§2. Два замечания о мерах σ_α

Теорема 2.1. *Пусть Θ – внутренняя функция. Пусть $\alpha\in\mathbb{T}$. Для того, чтобы $\sigma_\alpha\in\mathcal{C}(\Theta)$, необходимо и достаточно, чтобы $\sigma_\alpha(\rho(\Theta))=0$, и семейство $\left\{\dfrac{\Theta-\alpha}{\Theta'(\zeta)(z-\zeta)}\right\}_{\zeta\in\Lambda}$ было ограничено в H^∞, где $\Lambda=\{\zeta\in\mathbb{T}\setminus\rho(\Theta):\Theta(\zeta)=\alpha\}$.*

Доказательство. Мы докажем только необходимость, поскольку достаточность в существенном была доказана в [4], см. доказательство теоремы 5.1 и замечание после него. Заметим, что $\mathcal{D}(\zeta,r)\cap\{|\Theta|<\frac{1}{2}\}\neq\varnothing$ для всех $\zeta\in\rho(\Theta)$ и $r>0$. Таким образом, из условия $\sigma_\alpha\in\mathcal{C}(\Theta)$ вытекает, что $\sigma_\alpha\{\xi\in\mathbb{T}:|\xi-\zeta|<r\}\leqslant Cr$ для всех $\zeta\in\rho(\Theta)$ и всех $r>0$. Следовательно, мера $\mathbb{I}_{\rho(\Theta)}\sigma_\alpha$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега m. Значит, $\sigma_\alpha(\rho(\Theta))=0$, так как мера σ_α сингулярна. Из условия $\sigma_\alpha\in\mathcal{C}(\Theta)$ также вытекает, что существует константа c_0 такая, что $\mathcal{D}(\zeta,c_0\sigma_\alpha(\{\zeta\}))\cap\{|\Theta|<\frac{1}{2}\}=\varnothing$ для всех $\zeta\in\mathbb{T}$. Заметим, что $\sigma_\alpha(\{\zeta\})>0$ тогда и только тогда, когда $\zeta\in\Lambda$. При этом $\sigma_\alpha(\{\zeta\})=|\Theta'(\zeta)|^{-1}$ для всех $\zeta\in\Lambda$. Значит, для любой точки $\zeta\in\Lambda$ функция Θ допускает аналитическое продолжение в области $G=G_\zeta=\mathbb{D}\cup\mathcal{D}(\zeta,c_0\sigma_\alpha(\{\zeta\}))$, и $|\Theta|<2$ всюду в G. По принципу максимума имеем $\left|\dfrac{\Theta-\alpha}{\Theta'(\zeta)(z-\zeta)}\right|\leqslant\dfrac{3}{c_0}$ всюду в $G\supset\mathbb{D}$, и необходимость доказана. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть Θ – внутренняя функция. Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{T}}\Big(\int\limits_{\mathbb{T}}|f|^p\,d\sigma_\alpha\Big)^{\frac{1}{2-p}}dm(\alpha)\leqslant C(p)\|f\|_{H^p}^{\frac{p}{2-p}}$$

для любой функции $f\in\Theta^*(H^p)$ при $p<2$.

Вначале мы докажем следующую лемму.

Лемма 2.3. *Пусть Θ – внутренняя функция, E – борелевское подмножество окружности $\mathbb{T}$. Тогда*

$$\int\limits_{\Theta^{-1}(E)}|f|^p\,dm\leqslant C(p)(m(E))^{p-1}\|f\|_{H^p}^p$$

для любой функции $f\in\Theta^*(H^p)$ при $p\in[1,2]$.

Доказательство. Случай $p=1$ очевиден. Рассмотрим случай $p=2$. Применяя теорему Кларка [9] и предложение 1 из [3], имеем

$$\int\limits_{\Theta^{-1}(E)}|f|^2dm=\int\limits_{E}\Big(\int\limits_{\mathbb{T}}|f|^2d\sigma_\alpha\Big)dm=(m(E))\|f\|_{H^2}^2. \tag{2.1}$$

Теперь пусть $p\in(1,2)$. По теореме 5 из [5] функция f может быть представлена в виде $f=(1-\Theta)(g\sigma_1)_+ + (1+\Theta)(h\sigma_{-1})_+$, где $g\in L^p(\sigma_1)$, $h\in L^p(\sigma_{-1})$, причем $\|g\|_{L^p(\sigma_1)}+\|h\|_{L^p(\sigma_{-1})}\leqslant C(p)\|f\|_{H^p}^p$. Значит, достаточно доказать следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Theta^{-1}(E)}|(1-\overline{\alpha}\Theta)(g\sigma_\alpha)_+|^p dm\leqslant C(m(E))^{p-1}\|g\|_{L^p(\sigma_\alpha)}^p,$$

где $\alpha\in\mathbb{T}$, $g\in L^p(\sigma_\alpha)$ при $p\in(1,2)$. Рассмотрим оператор $T: L^1(\sigma_\alpha)\to L^0(\mathbb{1}_{\Theta^{-1}(E)}m)$, $Tg\stackrel{\text{def}}{=}(1-\overline{\alpha}\Theta)(g\sigma_\alpha)_+$. По теореме Колмогорова T имеет слабый тип $(1,1)$. Кроме того, T имеет сильный тип $(2,2)$, поскольку в силу (2.1) и теоремы Кларка [9]

$$\int\limits_{\Theta^{-1}(E)}|(1-\overline{\alpha}\Theta)(g\sigma_\alpha)_+|^2dm=m(E)\|g\|_{L^2(\sigma_\alpha)}^2.$$

Остается сослаться на интерполяционную теорему Марцинкевича. □

Доказательство теоремы 2.2. Сначала следует отметить, что случай $p \leqslant 1$ неинтересен, поскольку, применяя неравенство Гельдера и (0.6), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma_\alpha \Big)^{\frac{1}{2-p}} dm \leqslant \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma_\alpha \Big) dm \Big)^{\frac{1}{2-p}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{2-p}}$$

для любой функции $f \in L^p(m)$ при $p \leqslant 1$. Пусть $p \in (1,2)$. Из равенства

$$\int\limits_{\Theta^{-1}(E)} |f|^p dm = \int\limits_{E} \big(\int\limits_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma_\alpha \big)$$

и леммы 2.3 вытекает, что сублинейный оператор $f \mapsto$ $\mapsto \Big(\int\limits_{\mathbb{T}} |P_\Theta f|^p dm \Big)^{\frac{1}{p}}$ является ограниченным оператором из $L^p(m)$ в $L^{\frac{p}{2-p},\infty}(m)$ при $1 < p < 2$. Следовательно, по интерполяциооной теореме Марцинкевича этот оператор является ограниченным оператором из $L^p(m)$ в $L^{\frac{p}{2-p},\infty}(m)$. $\square$

§3. Теорема вложения для некоторого класса произведений Бляшке

Пусть $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ обозначает последовательность всех нулей произведений Бляшке B с учетом кратностей. В дальнейшем мы будем предполагать, что эта последовательность удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\sum_{n\geqslant 1} (1-|a_n|)\delta_{a_n} \in \mathcal{C}, \tag{3.1}$$

$$\sup_{n\geqslant 1} \frac{|1-a_n|}{1-|a_n|} < +\infty. \tag{3.2}$$

Последнее условие означает, что множество $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ скапливается к 1 некасательным образом. Другими словами, множество нулей B содержится в угле Штольца с вершиной в 1. Еще мы будем предполагать, что нули B пронумерованы так, что последовательность $\{|1-a_n|\}_{n\geqslant 1}$ убывает. Тогда условие (3.2) позволяет переформулировать карлесоново свойство (3.1) следующим образом: существуют постоянные $C > 0$ и $q \in (0,1)$ такие, что

$$|1-a_k| \leqslant Cq^{k-n}|1-a_n| \tag{3.3}$$

для всех $k, n \in \mathbb{N}$, где $k \geqslant n$.

Наша цель в этом параграфе – получить для таких произведений Бляшке полное описание $\mathcal{C}_p(B)$ при всех $p > 0$. Чтобы сформулировать основные результаты этого параграфа (теоремы 3.1 и 3.2), введем ряд обозначений. Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ бесконечно малая последовательность из интервала $(0,2)$. С каждой такой последовательностью свяжем пространства $C_p(\varepsilon)$, где $p \in [0,1)\cup(1,+\infty)$. Для $p \in [0,1)$ определим $C_p(\varepsilon)$ как пространство всех мер $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ таких, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}(1,\varepsilon_n)} \frac{d\mu(z)}{|1-z|^p} \leqslant C\varepsilon_n^{1-p}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. При $p \in (1,+\infty)$ пространство $C_p(\varepsilon)$ есть множество всех мер $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\mathcal{D}(1,\varepsilon_n)} \frac{d\mu(z)}{|1-z|^p} \leqslant C\varepsilon_n^{1-p}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Теперь определим пространства $C_p^*(\varepsilon)$ при $p \in [0,+\infty)$. Сначала предположим, что последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ убывает. Для $p \in [0,1)$ пространство $C_p^*(\varepsilon)$ есть множество всех мер $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ таких, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}(1,\varepsilon_n)} \frac{d\mu(z)}{|1-z|^p} \leqslant C\varepsilon_n^{1-p}\left(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\right)$$

при всех $n \geqslant 2$. Определим C_1^* как множество всех мер $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ таких, что

$$\int\limits_{\mathcal{D}(1,\varepsilon_n)\setminus\mathcal{D}(1,\varepsilon_{n+1})} \frac{d\mu(z)}{|1-z|} \leqslant C\left(1+\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Наконец, для $p \in (1,+\infty)$ определим $C_p^*(\varepsilon)$ как множество всех мер $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ таких, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus\mathcal{D}(1,\varepsilon_n)} \frac{d\mu(z)}{|1-z|^p} \leqslant C\varepsilon_n^{1-p}\left(1+\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ – произвольная бесконечно малая последовательность из $(0,2)$, то положим $C_p^*(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} C_p^*(\varepsilon^*)$, где ε^* – убывающая перестановка последовательности ε. Следует отметить, что в отличие от $C_p^*(\varepsilon)$, пространство $C_p(\varepsilon)$ определяется однозначно множеством значений последовательности ε.

Теорема 3.1. *Пусть $p \in (\frac{1}{N+1}, \frac{1}{N})$ при $N \in \mathbb{Z}_+$, и $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

1) $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$;

2)
$$\sup_{n\geqslant 1} \int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{|1-a_n|^{(N+1)p-1}}{|1-\overline{a}_n z|^p |1-z|^{Np}} d\mu(z) < +\infty;$$

3) $\mu \in C_{Np}(\varepsilon) \cap C_{(N+1)p}(\varepsilon)$, *где* $\varepsilon_n = |1-a_n|$ *для* $n \in \mathbb{N}$.

Сначала выведем некоторые следствия из этой теоремы.

Следствие 1. *Пусть p, N и B удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Предположим, что $a \in \overline{\mathbb{D}}$ и $|1-a_{n+1}| \leqslant |1-a| \leqslant |1-a_n|$. Тогда*
$$C_1(B)\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} \leqslant$$
$$\leqslant \max\Big(\frac{|1-a_n|^{Np-1}}{|1-a|^{Np}}, \frac{|1-a_{n+1}|^{(N+1)p-1}}{|1-a|^{(N+1)p}}\Big) \leqslant C_2(B)\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)}.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что
$$C_1 \max\Big(\frac{|1-a_n|^{Np-1}}{|1-a|^{Np}}, \frac{|1-a_{n+1}|^{(N+1)p-1}}{|1-a|^{(N+1)p}}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{k\geqslant 1} \frac{|1-a_k|^{(N+1)p-1}}{|1-\overline{a}_k a|^p |1-a|^{Np}} \leqslant$$
$$C_2 \max\Big(\frac{|1-a_n|^{Np-1}}{|1-a|^{Np}}, \frac{|1-a_{n+1}|^{(N+1)p-1}}{|1-a|^{(N+1)p}}\Big). \qquad \square$$

Следствие 2. *В условиях теоремы 3.1 из включения $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ вытекает включение $(B^l)^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ при всех $l \geqslant 1$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что множество значений последовательности ε совпадает с множеством значений такой же последовательности, соответствующей B^l. $\square$

Замечание. Можно доказать, что в условиях теоремы 3.1 следующее неравенство

$$(B^l)^*(H^p) = \sum_{k=0}^{l-1} B^k B^*(H^p)$$

верно при всех $l \geqslant 1$.

Теорема 3.2. *Пусть $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$. Допустим, что $p = \frac{1}{N}$ при $N \in \mathbb{N}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

1) $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$;

2)

$$\sup_{n \geqslant 1} \left(1 + \log \left|\frac{1-a_n}{1-a_{n+1}}\right|\right)^{-1} \int\limits_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{|1-a_n|^p d\mu(z)}{|1-\overline{a}_n z|^p |1-\overline{a}_{n+1} z|^p |1-z|^{1-p}} < +\infty;$$

3) $\mu \in C^*_{1-p}(\varepsilon) \cap C^*_1(\varepsilon) \cap C^*_{1+p}(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon_n = |1-a_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 1. *Пусть p, N и B удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Предположим, что $a \in \overline{\mathbb{D}}$ и $|1-a_{n+1}| \leqslant |1-a| \leqslant |1-a_n|$. Тогда*

$$C_1(B)\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} \leqslant$$
$$\max\Big(\frac{1}{(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n})\varepsilon_n^p|1-a|^{1-p}}, \frac{1}{(1+\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}})|1-a|}, \frac{\varepsilon_{n+1}^p}{(1+\log\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}})|1-a|^{1+p}}\Big)$$
$$\leqslant C_2(B)\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)},$$

где $\varepsilon_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} |1-a_k|$.

Доказательство. Нам нужно проверить, что

$$\frac{C_1}{|1-a|}\max\Big(\frac{|1-a|^p}{(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n})\varepsilon_n^p}, \frac{1}{(1+\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}})}, \frac{\varepsilon_{n+1}^p}{(1+\log\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}})|1-a|^p}\Big) \leqslant$$
$$\sup_{k \geqslant 1}\big(1+\log\tfrac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}\big)^{-1}\frac{\varepsilon_k^p}{|1-\overline{a}_k a|^p|1-\overline{a}_{k+1}a|^p|1-a|^{1-p}} \leqslant$$
$$\frac{C_2}{|1-a|}\max\Big(\frac{|1-a|^p}{(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n})\varepsilon_n^p}, \frac{1}{(1+\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}})}, \frac{\varepsilon_{n+1}^p}{(1+\log\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}})|1-a|^p}\Big).$$

Чтобы проверить требуемое неравенство, достаточно заметить, что

$$\frac{1}{(1+\log\frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k})\varepsilon_k^p} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_{n-1}^p} \leqslant \frac{C}{(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n})\varepsilon_n^p}$$

при $k < n-1$ и

$$\frac{\varepsilon_k^p}{1+\log\frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}} \leqslant \varepsilon_{n+1}^p \leqslant \frac{C\varepsilon_n^p}{1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}}$$

при $k > n+1$. $\square$

Следствие 2. *Пусть p, N и B удовлетворяют условиям теоремы 3.2. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} = o(|1-a|^{-1})$ *при* $a \in \overline{\mathbb{D}}$, $a \to 1$;

2) *существует связное подмножество* Γ *множества* $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ *такое, что* $\overline{\Gamma} \ni 1$ *и* $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} = o(|1-a|^{-1})$ *при* $a \in \Gamma$, $a \to 1$;

3) $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} = o((1-|a|)^{-1})$ *при* $|a| \to 1-$;

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{1-a_{n+1}}{1-a_n}\right| = 0.$

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидна. Импликации 2) $\Longrightarrow$ 4) и 4) $\Longrightarrow$ 1) вытекают из следствия 1. Остается доказать, что 1) влечет 3). Зафиксируем положительное число ε. Положим $\mathbb{D}_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{D} : \varepsilon|1-a| \leqslant 1-|a|\}$, $\mathbb{D}^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{D} : \varepsilon|1-a| > 1-|a|\}$. Ясно, что $\lim\limits_{a\in\mathbb{D}_\varepsilon, |a|\to 1-} (1-|a|)\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} = 0$. Легко видеть, что функция $a \mapsto \|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)}$ непрерывна на $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$. Следовательно, из 1) вытекает, что $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} \leqslant C|1-a|^{-1}$, откуда $\limsup\limits_{a\in\mathbb{D}^\varepsilon, |a|\to 1-} (1-|a|)\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} \leqslant C\varepsilon$. Значит, $\limsup\limits_{a\in\mathbb{D}, |a|\to 1-} (1-|a|)\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(B)} \leqslant C\varepsilon$. Остается заметить, что ε – произвольное положительное число. $\square$

Следствие 3. *Пусть $l \geqslant 2$. Тогда в условиях теоремы 3.2 следующие утверждения равносильны:*

1) $(B^l)^*(H^p) \subset L^p(\mu)$;

2) $\mu \in C_{1-p}(\varepsilon) \cap C_1^*(\varepsilon) \cap C_{1+p}(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon_n = |1-a_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

В частности, утверждение 1) *не зависит от* $l \geqslant 2$.

Доказательство. Заметим, что последовательность $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_{[\frac{n-1}{l}]+1}$ соответствует произведению Бляшке B^l, где $[x]$ обозначает целую часть x. Легко понять, что $C_p^*(\tilde{\varepsilon}) = C_p(\varepsilon)$ при всех $l \geqslant 2$ и $p \neq 1$. Кроме того, $C_1^*(\tilde{\varepsilon}) \subset C_1^*(\varepsilon)$. Остается заметить, что $C_1^*(\varepsilon) \cap C_p(\varepsilon) \subset C_1^*(\tilde{\varepsilon})$ при всех $p \neq 1$. $\square$

Замечание 1. Можно доказать, что в условиях теоремы 3.2 равенство

$$(B^l)^*(H^p) = \sum_{k=0}^{l-2} B^k (B^2)^*(H^p)$$

верно при всех $l \geqslant 2$.

Замечание 2. Отметим, что при $p \neq \frac{1}{N}$ утверждение 3 следствия 2 к теореме 3.2 может выполняться только для конечных произведений Бляшке. Точнее, имеет место следующий факт.

Пусть Θ – внутренняя функция. Тогда при $p > 0$, где $p^{-1} \notin \mathbb{N}$, следующие утверждения равносильны:

1) $\|\delta_a\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)} = o((1-|a|)^{-1})$ при $|a| \to 1$;

2) Θ – конечное произведение Бляшке.

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. Докажем, что 1) $\Longrightarrow$ 2). Случай $p > 1$ рассмотрен в доказательстве теоремы 1.3.2. Теперь пусть $\frac{1}{N+1} < p < \frac{1}{N}$ при $N \in \mathbb{N}$. Допустим, что Θ не является конечным произведением Бляшке. Тогда $\rho(\Theta) \neq \varnothing$. Можно предположить, что $1 \in \rho(\Theta)$. С каждой точкой $a \in \mathbb{D}$ свяжем функцию $f = f_a = \dfrac{1 - \overline{\Theta(a)}\Theta}{(1-\overline{a}z)(1-z)^N}$ и точку $b = b_a = 1 - |1-a|$. Ясно, что $f \in \mathcal{C}_p(\Theta)$. Легко проверить, что $\|f\|^p_{H^p} \leqslant C|1-a|^{1-(N+1)p}$ и $|f(b)| \geqslant C|1-a|^{-(N+1)p}$, если $|\Theta(a)| < \frac{1}{2}$ и $|1-a| < \frac{1}{2}$. Следовательно, $\|\delta_b\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)} \geqslant C(1-|b|)^{-1}$, если $|\Theta(a)| < \frac{1}{2}$ и $|1-a| < \frac{1}{2}$. Получаем $\|\delta_z\|_{\mathcal{C}_p(\Theta)} \neq o((1-|z|)^{-1})$ при $|z| \to 1$, и тем самым приходим к противоречию. $\square$

Прежде чем доказывать теорему 3.1, установим две леммы.

Лемма 3.3. *Пусть $(T, \mathfrak{A})$ – измеримое пространство, $\{f_k\}_{k \geqslant 1}$ – последовательность функций, измеримых на T. Предположим, что существует последовательность $\{E_k\}_{k \geqslant 1}$ непустых измеримых подмножеств T, удовлетворяющая следующим условиям:*

a) $T \setminus \bigcup\limits_{k \geqslant 1} E_k \subset \bigcap\limits_{k \geqslant 1} \{f_k = 0\}$;

b) $f_k \neq 0$ *всюду на* E_k *при всех* $k \in \mathbb{N}$;

c) $\sum\limits_{k \geqslant 1} \left|\frac{f_k(x_j)}{f_j(x_j)}\right| \leqslant C_0$ *для всех* $j \in \mathbb{N}$ *и всех* $x_j \in E_j$;

d) $\sum\limits_{j \geqslant 1} \left|\frac{f_k(x_j)}{f_j(x_j)}\right| \leqslant C_0$ *для всех* $k \in \mathbb{N}$ *и всех* $\{x_j\}_{j \geqslant 1}$, *где* $x_j \in E_j$.

Тогда для любой положительной меры на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ и при любом $p \in (0,+\infty)$ следующие утверждения равносильны:

1) $\sup\limits_{k\geqslant 1} \int\limits_T |f_k|^p d\mu < +\infty$;

2) *существует константа C такая, что*

$$\int\limits_T \Big| \sum_{k\geqslant 1} \lambda_k f_k \Big|^p \leqslant C \sum_{k\geqslant 1} |\lambda_k|^p$$

для всех $\lambda \in \ell^p$.

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) тривиальна. Кроме того, ясно, что при $p \leqslant 1$ импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) имеет место и без условий на измеримые функции f_k. Значит, нам нужно доказать, что 1) $\Longrightarrow$ 2) при $p \in (1,+\infty)$. Можно предполагать, что $f_k \geqslant 0$ и $\lambda_k \geqslant 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеем:

$$\int\limits_T \Big(\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k f_k \Big)^p d\mu \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \int\limits_{E_j} \Big(\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k \frac{f_k}{f_j} \Big)^p f_j^p \, d\mu \leqslant$$

$$\sum_{j\geqslant 1} \Big(\sup_{x_j\in E_j} \Big(\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k \frac{f_k(x_j)}{f_j(x_j)} \Big)^p \Big) \int\limits_T f_j^p \, d\mu \leqslant$$

$$\Big(\sup_{j\geqslant 1} \int\limits_T f_j^p \, d\mu \Big) \sum_{j\geqslant 1} \sup_{x_j\in E_j} \Big(\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k \frac{f_k(x_j)}{f_j(x_j)} \Big)^p .$$

Остается заметить, что из условий c) и d) вытекает, что

$$\sum_{j\geqslant 1} \Big| \sum_{k\geqslant 1} \lambda_k \frac{f_k(x_j)}{f_j(x_j)} \Big|^p \leqslant C_0^p \sum_{k\geqslant 1} |\lambda_k|^p$$

для всех $p \geqslant 1$, всех $\lambda \in \ell^p$ и всех $x_j \in E_j$. $\square$

Лемма 3.4. *Положим $\varphi_n(z) = \dfrac{(1-a_n)^{1+N-\frac{1}{p}} B(z)}{(z-a_n)(1-z)^N}$. Пусть p и N обозначают то же самое, что и в теореме 3.1. В дополнение к (3.1) и (3.2), допустим, что B является интерполяционным произведением Бляшке. Тогда каждая функция $f \in H^p$ может быть представлена единственным образом в виде $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n \varphi_n + Bb$ (ряд сходится в H^p), где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $g \in H^p$, причем*

$$C_1 \|f\|_{H^p}^p \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p + \|g\|_{H^p}^p \leqslant C_2 \|f\|_{H^p}^p$$

для некоторых положительных $C_1 = C_1(B,p)$ *и* $C_2 = C_2(B,p)$.

Доказательство. Случай $N = 0$, т.е. когда $p > 1$, хорошо известен. Пусть $N \geqslant 1$, тогда $p < 1$. Мы докажем только существование требуемого представления, поскольку единственность очевидна. Положим $\lambda_n = \dfrac{f(a_n)}{\varphi(a_n)}$ при $n \geqslant 1$. Заметим, что

$$\sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p \leqslant C \sum_{n\geqslant 1} |f(a_n)|^p (1-|a_n|) \leqslant C\|f\|^p_{H^p}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n\varphi_n$ сходится в H^p, поскольку $\|\varphi_n\|_{H^p} \leqslant C(B,p)$. Теперь ясно, что существует функция $g \in H^p$ такая, что $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n\varphi_n + Bg$ и $\|g\|^p_{H^p} \leqslant \|f\|^p_{H^p} + C\sum\limits_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p \leqslant C\|f\|^p_{H^p}$. Следовательно, $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p + \|g\|^p_{H^p} \leqslant C\|f\|^p_{H^p}$. Остается заметить, что

$$\|f\|^p_{H^p} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p \|\varphi_n\|^p_{H^p} + \|g\|^p_{H^p} \leqslant C\sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p + \|g\|^p_{H^p}. \ \square$$

Следствие. *В условиях леммы 3.4 каждая функция* $f \in B^*(H^p)$ *может быть представлена единственным образом в виде*

$$f = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n\varphi_n + \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k B}{(1-z)^k}$$

(ряд сходится в H^p*), где* $\lambda_n, \alpha_k \in \mathbb{C}$, *причем*

$$C_1\|f\|^p_{H^p} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p + \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^p \leqslant C_2\|f\|^p_{H^p}$$

для некоторых положительных $C_1 = C_1(B,p)$ *и* $C_2 = C_2(B,p)$.

Доказательство. Опять предположим, что $N \geqslant 1$, т.е. $p < 1$, поскольку случай $p > 1$ хорошо известен. Применяя лемму 3.4 к функции f, имеем $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n\varphi_n + Bg$ (ряд сходится в H^p). Из того, что $f \in B^*(H^p)$ и $\varphi_n \in B^*(H^p)$ при $n \geqslant 1$, следует, что $Bg \in B^*(H^p)$. Значит, существует функция $h \in H^p$ такая, что $h(0) = 0$ и $\overline{h} = g$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Отсюда и из того, что g допускает аналитическое продолжение через дугу $\mathbb{T}\setminus\{1\}$, следует, что $g = \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{\alpha_k}{(1-z)^k}$, где $\alpha_k\in\mathbb{C}$ при $1\leqslant k\leqslant N$. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Чтобы доказать, что утверждения 2) и 3) равносильны, достаточно разбить $\overline{\mathbb{D}}$ на два множества следующим образом: $\overline{\mathbb{D}} = \{z\in\overline{\mathbb{D}} : |1-z|<|1-a_n|\}\cup\{z\in\overline{\mathbb{D}} : |1-z|\geqslant |1-a_n|\}$, и оценить надлежащим образом подинтегральные выражения на каждом из множеств. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна, поскольку

$$\sup_{n\geqslant 1}\left\|\frac{(1-a_n)^{N+1-\frac{1}{p}}}{(1-\overline{a}_n z)(1-z)^N}\right\|_{H^p}<+\infty.$$

Теперь докажем, что из 2) следует 1). Сначала предположим, что в дополнение к свойствам (3.1) и (3.2) произведение Бляшке B также удовлетворяет следующему условию:

$$2|1-a_{n+1}|\leqslant|1-a_n| \tag{3.4}$$

при всех $n\in\mathbb{N}$. Такое произведение Бляшке является интерполяционным. Следовательно, в этом случае импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна при $p<1$ в силу следствия к лемме 3.4. Теперь пусть $p>1$. Положим $f_n(z) = \dfrac{(1-a_n)^{1-\frac{1}{p}}}{1-\overline{a}_n z}$ при $n\in\mathbb{N}$. Нам нужно доказать, что если $\sup\limits_{n\geqslant 1}\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|f_n|^p\,d\mu<+\infty$, то $\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda_n f_n|^p\,d\mu\leqslant C\sum\limits_{n\geqslant 1}|\lambda_n|^p$ для любых $\lambda=\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}\in\ell^p$. Определим функции $g_n : \overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{R}$ и $h_n : \overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{R}$ при $n\in\mathbb{N}$ следующим образом:

$$g_n(z) = \begin{cases} |1-a_n|^{-\frac{1}{p}}, & \text{если}\quad |1-z|<|1-a_n|,\\ 0, & \text{если}\quad |1-z|\geqslant|1-a_n|;\end{cases}$$

$$h_n(z) = \begin{cases} 0, & \text{если}\quad |1-z|<|1-a_n|,\\ \dfrac{|1-a_n|^{1-\frac{1}{p}}}{|1-z|}, & \text{если}\quad |1-z|\geqslant|1-a_n|.\end{cases}$$

Легко увидеть, что $C_1|f_n|\leqslant g_n+h_n\leqslant C_2|f_n|$. Значит, чтобы доказать импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1) в этом частном случае, достаточно проверить, что $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяют условиям леммы 3.3. В случае первой последовательности можно положить

$E_n = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |1-a_{n+1}| \leqslant |1-z| < |1-a_n|\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $E_n \neq \varnothing$ по (3.4). Кроме того, по определению g_n имеем

$$\frac{g_k(z_j)}{g_j(z_j)} = \begin{cases} \left|\dfrac{1-a_j}{1-a_k}\right|^{\frac{1}{p}}, & \text{если} \quad k \leqslant j, \\ 0, \quad \text{если} \quad k > j, \end{cases}$$

где $z_j \in E_j$. Теперь ясно, что $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{g_k(z_j)}{g_j(z_j)} \leqslant C(B,p)$ и $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{g_k(z_j)}{g_j(z_j)} \leqslant C(B,p)$. Таким образом, $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условиям леммы 3.3. Чтобы доказать, что $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условиям леммы 3.3, можно положить $E_n = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |1-a_n| \leqslant |1-z| < |1-a_{n-1}|\}$ при $n \geqslant 2$ и $E_1 = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |1-a_1| \leqslant |1-z|\}$. Тогда

$$\frac{h_k(z_j)}{h_j(z_j)} = \begin{cases} \left|\dfrac{1-a_k}{1-a_j}\right|^{1-\frac{1}{p}}, & \text{если} \quad k \geqslant j, \\ 0, \quad \text{если} \quad k < j \end{cases}$$

при $z_j \in E_j$, и опять требуемые оценки очевидны. В общем случае B можно представить в виде $B = \prod\limits_{j=1}^{r} B_j$ так, что каждое произведение Бляшке B_j при $j = 1, 2, \ldots, r$ удовлетворяет условию (3.4). Чтобы доказать импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1), применим индукцию по r. База индукции уже доказана; нужно перейти от $r-1$ к r. Пусть $f \in B^*(H^p)$. Лемма 3.4 позволяет представить f в виде $f = \varphi + B_1 g$, где $\varphi \in B_1^*(H^p)$ и $g \in H^p$, причем $\|\varphi\|_{H^p}^p + \|g\|_{H^p}^p \leqslant C\|f\|_{H^p}^p$. Ясно, что $B_1 g \in B^*(H^p)$, откуда $g \in (\prod\limits_{j=2}^{r} B_j)^*(H^p)$. Остается заметить, что $\int\limits_{\mathbb{D}} |\varphi|^p d\mu \leqslant C\|\varphi\|_{H^p}^p$ (база индукции), а по индукционному предположению $\int\limits_{\mathbb{D}} |B_1 g|^p d\mu \leqslant \int\limits_{\mathbb{D}} |g|^p d\mu \leqslant C\|g\|_{H^p}^p$. $\square$

Чтобы доказать теорему 3.2, нам понадобятся еще некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 3.5. *Пусть* $p \in (0,1)$ *и* $f \in B^*(H^p)$. *Тогда* $(1-z)^{\frac{1}{p}-1} f \in H^1$, *причем* $\|(1-z)^{\frac{1}{p}-1} f\|_{H^1} \leqslant C(B,p)\|f\|_{H^p}$.

Доказательство. Из теоремы Вольберга–Треиля [17] следует, что $|f(z)|^p \leqslant C\dfrac{\|f\|^p_{H^p}}{|1-z|}$ для всех $z \in \mathbb{T}\setminus\{1\}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{T}} |f(z)||1-z|^{\frac{1}{p}-1}dm(z) \leqslant C\|f\|^{1-p}_{H^p}\int\limits_{\mathbb{T}}|f(z)|^p dm(z) = C\|f\|_{H^p}. \ \square$$

Лемма 3.6. *Пусть* $p = \frac{1}{N}$ *при* $N \in \mathbb{N}$. *Допустим, что вместе с условиями* (3.1) *и* (3.2) B *удовлетворяет также и условию* (3.4). *Пусть* Γ_n *обозначает окружность с центром в точке* 1 *и радиусом* $\frac{3}{2}|1-a_n|$, *где* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{k\geqslant n}\frac{(1-a_k)^{N-1}f(a_k)}{B'(a_k)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{(1-z)^{N-1}f(z)}{B(z)}dz$$

для любой функции $f \in B^*(H^p)$ *и любого* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из леммы 3.5 следует, что достаточно проверить требуемое равенство на плотном подмножестве пространства $B^*(H^p)$. Это равенство очевидно для $f = \dfrac{B}{z-a_k}$, где $k \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что линейная оболочка семейства $\left\{\dfrac{B}{z-a_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ плотна в $B^*(H^p)$ при всех $p > 0$. $\square$

Лемма 3.7. *Пусть* p, N *и* B *обозначают то же, что и в лемме* 3.6. *Тогда существует константа* $C = C(B,p)$ *такая, что*

$$\sum_{n\geqslant 1}\Big|\sum_{k\geqslant n}\frac{(1-a_k)^{N-1}f(a_k)}{B'(a_k)}\Big|^p \leqslant C\|f\|^p_{H^p}$$

для всех $f \in B^*(H^p)$.

Доказательство. Пусть Γ_n обозначает то же самое, что и в лемме 3.6. Из леммы 3.6 и теоремы о среднем значении следует, что

$$\Big|\sum_{k\geqslant 1}\frac{(1-a_k)^{N-1}f(a_k)}{B'(a_k)}\Big| \leqslant \frac{3^N|1-a_n|^N|f(z_n)|}{2^N|B(z_n)|}$$

для некоторых $z_n \in \Gamma_n$, где $n \in \mathbb{N}$. Остается доказать, что

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{|1-a_n||f(z_n)|^p}{|B(z_n)|^p} \leqslant C\|f\|^p_{H^p}$$

для любой функции $f \in B^*(H^p)$ и любой последовательности $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$, где $z_n \in \Gamma_n$. Имеем

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{|1-a_n||f(z_n)|^p}{|B(z_n)|^p} \leqslant \sum_{|z_n|\leqslant 1} \frac{|1-a_n||f(z_n)|^p}{|B(z_n)|^p} + \sum_{|z_n|\geqslant 1} \frac{|1-a_n||f(z_n)|^p}{|B(z_n)|^p}. \tag{3.5}$$

Ясно, что $\inf\limits_{n\geqslant 1} \inf\limits_{\Gamma_n} |B| > 0$. Следовательно, по теореме Вольберга–Треиля первая сумма в правой части (3.5) оценивается величиной $C\|f\|^p_{H^p}$. Чтобы оценить вторую сумму в правой части (3.5), рассмотрим функцию $\widetilde{f}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(z^*)}B(z)$, где $z^* \stackrel{\text{def}}{=} \overline{z}^{-1}$. Ясно, что $\widetilde{f} \in (zB)^*(H^p)$ и $\|\widetilde{f}\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$. Заметим, что

$$\sum_{|z_n|\geqslant 1} \frac{|1-a_n||f(z_n)|^p}{|B(z_n)|^p} = \sum_{|z_n|\geqslant 1} |1-a_n||\widetilde{f}(z_n^*)|^p.$$

Это позволяет еще раз применить теорему Вольберга–Треиля. $\square$

Замечание. Лемма 3.7 остается верной для произвольного интерполяционного произведения Бляшке, нули которого расположены в некотором угле Штольца. Доказательство проводится аналогичным образом, только вместо окружностей Γ_n нужно рассматривать несколько более сложные контуры.

Лемма 3.8. *Положим* $\varphi_n(z) = \left(\dfrac{B(z)}{z-a_n} - \dfrac{B(z)}{z-a_{n-1}}\right)\dfrac{1}{(1-z)^{N-1}}$ *при* $n \geqslant 2$ *и* $\varphi_1(z) = \dfrac{B(z)}{(z-a_1)(1-z)^{N-1}}$. *Допустим, что выполнены условия леммы* 3.6. *Тогда каждая функция* $f \in B^*(H^p)$ *может быть единственным образом представлена в виде*

$$f = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n \varphi_n + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k B}{(1-z)^k}$$

(ряд сходится в H^p*), где* $\lambda_n, \alpha_k \in \mathbb{C}$, *причем*

$$C_1\|f\|^p_{H^p} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p + \sum_{k=1}^{N-1} |\alpha_k|^p \leqslant C_2\|f\|^p_{H^p}$$

для некоторых положительных $C_1 = C_1(B,p)$ *и* $C_2 = C_2(B,p)$.

Доказательство. Нам нужно доказать только существование такого представления, поскольку единственность очевидна. Сначала предположим, что $|1-a_n| \leqslant 4|1-a_{n+1}|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда несложно проверить, что $\inf\limits_{n\geqslant 1} \|\varphi_n\|_{H^p} > 0$ и $\sup\limits_{n\geqslant 1} \|\varphi_n\|_{H^p} < +\infty$. Положим $\lambda_n = \sum\limits_{k\geqslant n} \dfrac{(1-a_k)^{N-1} f(a_k)}{B'(a_k)}$. Тогда $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p \leqslant C\|f\|^p_{H^p}$ по лемме 3.7. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n\varphi_n$ сходится в H^p. Ясно, что

$$\sum_{k\geqslant 1} \lambda_k\varphi_k(a_n) = \lambda_n\varphi_n(a_n) + \lambda_{n+1}\varphi_n(a_n) = f(a_n) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Значит, $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n\varphi_n + Bg$, где $Bg \in B^*(H^p)$, $g \in H^p$. Из включений $Bg \in B^*(H^p)$ и $g \in H^p$ следует (см. доказательство следствия к лемме 3.4), что $g = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \dfrac{\alpha_k}{(1-z)^k}$, где $\alpha_k \in \mathbb{C}$ при $1 \leqslant k \leqslant N-1$. Легко видеть, что

$$C_1\|f\|^p_{H^p} \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p + \sum_{k=1}^{N-1} |\alpha_k|^p \leqslant C_2\|f\|^p_{H^p}.$$

Теперь рассмотрим общий случай. Можно построить последовательность $\{\widetilde{a}_n\}_{n\geqslant 1}$ в круге $\mathbb{D}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1)
$$\sup_{n\geqslant 1} \frac{|1-\widetilde{a}_n|}{1-|\widetilde{a}_n|} \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \frac{|1-a_n|}{1-|a_n|} < +\infty;$$

2) $2|1-\widetilde{a}_{n+1}| \leqslant |1-\widetilde{a}_n| \leqslant 4|1-\widetilde{a}_{n+1}|$ при всех $n \geqslant 1$;

3) существует строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k\geqslant 1}$ в $\mathbb{N}$ такая, что $n_1 = 1$ и $\widetilde{a}_{n_k} = a_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\widetilde{B}$ – произведение Бляшке, нули которого образуют последовательность $\{\widetilde{a}_n\}_{n\geqslant 1}$. Положим

$$\widetilde{\varphi}_n(z) = \left(\frac{\widetilde{B}(z)}{z-\widetilde{a}_n} - \frac{\widetilde{B}(z)}{z-\widetilde{a}_{n-1}}\right)\frac{1}{(1-z)^{N-1}} \quad \text{при} \quad n \geqslant 2$$

и

$$\widetilde{\varphi}_1(z) = \frac{\widetilde{B}(z)}{(z-a_1)(1-z)^{N-1}}.$$

Мы доказали, что каждая функция $f \in \widetilde{B}^*(H^p)$ может быть единственным образом представлена в виде

$$f = \sum_{n \geqslant 1} \widetilde{\lambda}_n \widetilde{\varphi}_n + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k \widetilde{B}}{(1-z)^k}.$$

Из равенства

$$\widetilde{\lambda}_j = \sum_{l \geqslant j} \frac{(1-\widetilde{a}_l)^{N-1} g(\widetilde{a}_l)}{B'(a_l)}$$

видно, что $\widetilde{\lambda}_j = \widetilde{\lambda}_{j+1}$ тогда и только тогда, когда $g(\widetilde{a}_j) = 0$. Следовательно, внутренняя функция $I \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\widetilde{B}}{B}$ является делителем g тогда и только тогда, когда $\widetilde{\lambda}_j = \widetilde{\lambda}_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию $n_k < j < n_{k+1}$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Значит, I является делителем $g \in \widetilde{B}^*(H^p)$ тогда и только тогда, когда g может быть представлена в виде

$$g = \lambda_1 \widetilde{\varphi}_1 + \sum_{k \geqslant 2} \lambda_k \Big(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} \widetilde{\varphi}_j \Big) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k \widetilde{B}}{(1-z)^k} =$$

$$= \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \varphi_k I + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k B I}{(1-z)^k}. \tag{3.6}$$

Пусть $f \in B^*(H^p)$. Положим $g = If$. Мы доказали, что g представляется в виде (3.6), откуда

$$f = \sum_{k \geqslant 1} \lambda_k \varphi_k + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\alpha_k B}{(1-z)^k},$$

причем

$$C_1 \|f\|_{H^p}^p \leqslant |\lambda_1|^p + \sum_{k \geqslant 2} (n_k - n_{k-1}) |\lambda_k|^p + \sum_{k=1}^{N-1} |\alpha_k|^p \leqslant C_2 \|f\|_{H^p}^p.$$

Остается убедиться в том, что

$$C_3 (n_k - n_{k-1}) \leqslant \|\varphi_k\|^p \leqslant C_4 (n_k - n_{k-1}) \tag{3.7}$$

при $k \geqslant 2$. Нетрудно проверить, что

$$C_5\|\varphi_k\|^p_{H^p} \leqslant 1 + \log\left|\frac{1-a_{k-1}}{1-a_k}\right| \leqslant C_6\|\varphi_k\|^p_{H^p}.$$

Таким образом, неравенства (3.7) сведены к очевидным неравенствам

$$C_7(n_k - n_{k-1}) \leqslant 1 + \log\left|\frac{1-a_{k-1}}{1-a_k}\right| \leqslant C_8(n_k - n_{k-1}). \quad \square$$

Следует отметить, что лемма 3.8 при $p = 1$ по существу содержится в [15].

Лемма 3.9. *Пусть $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{b'_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательности в $\mathbb{D}$, обладающие следующими свойствами:*

a) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|1-b_n|}{1-|b_n|} < +\infty$;

b) $\sup\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{|1-b'_n|}{1-|b'_n|} < +\infty$;

c) $2|1-b_{n+1}| \leqslant |1-b_n| \leqslant |1-b'_n| \leqslant 2|1-b_n|$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $p = \frac{1}{N}$ при $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через Θ произведение Бляшке, нули которого образуют последовательность $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$. Положим

$$\psi_n(z) = \frac{(1-b_n\overline{b}'_n)\Theta(z)}{(z-b_n)(1-\overline{b}'_n z)(1-z)^{N-1}}.$$

Тогда каждая функция $f \in H^p$ может быть представлена единственным образом в виде $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n\psi_n + \Theta h$ (ряд сходится в H^p), где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $h \in H^p$, причем

$$C_1\|f\|^p_{H^p} \leqslant \sum_{n\geqslant 1}|\lambda_n|^p + \|h\|^p_{H^p} \leqslant C_2\|f\|^p_{H^p}$$

для некоторых положительных $C_1 = C_1(\{b_n\}_{n\geqslant 1}, \{b'_n\}_{n\geqslant 1}, p)$ и $C_2 = C_2(\{b_n\}_{n\geqslant 1}, \{b'_n\}_{n\geqslant 1}, p)$.

Доказательство. Снова достаточно доказать только существование. Положим $\lambda_n = \dfrac{f(b_n)}{\Theta'(b_n)}(1-b_n)^{N-1}$. Тогда

$$\sum_{n\geqslant 1}|\lambda_n|^p = \sum_{n\geqslant 1}\frac{|f(b_n)|^p}{|\Theta'(b_n)|^p}|1-b_n|^{1-p} \leqslant C\sum_{n\geqslant 1}|f(b_n)|^p(1-|b_n|) \leqslant C\|f\|^p_{H^p}.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda_n\psi_n$ сходится в H^p, так как $\sup\|\psi_n\|_{H^p}<+\infty$. Теперь ясно, что $f=\sum\limits_{n\geqslant 1}\lambda_n\psi_n+\Theta h$, причем

$$C_1\|f\|^p_{H^p}\leqslant\sum_{n\geqslant 1}|\lambda_n|^p+\|h\|^p_{H^p}\leqslant C_2\|f\|^p_{H^p}.\quad\square$$

Лемма 3.10. *Из утверждения* 2) *теоремы* 4.2 *следует, что*

$$\sup_{k>n\geqslant 1}\left(1+\log\left|\frac{1-a_n}{1-a_k}\right|\right)^{-1}\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}\frac{|1-a_n|^p\,d\mu(z)}{|1-\overline{a}_nz|^p|1-\overline{a}_kz|^p|1-z|^{1-p}}<+\infty.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $|1-a_n|\leqslant 2|1-a_k|$. Тогда $|1-a_{n+1}|\leqslant 2|1-a_k|$, и, следовательно, $|1-\overline{a}_kz|\geqslant C|1-\overline{a}_{n+1}z|$ всюду в $\overline{\mathbb{D}}$ для некоторой положительной константы $C=C(B)$. Таким образом, в этом случае имеем

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}\frac{|1-a_n|^p\,d\mu(z)}{|1-\overline{a}_nz|^p|1-\overline{a}_kz|^p|1-z|^{1-p}}\leqslant$$
$$\leqslant C\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}\frac{|1-a_n|^p\,d\mu(z)}{|1-\overline{a}_nz|^p|1-\overline{a}_{n+1}z|^p|1-z|^{1-p}}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $|1-a_n|\geqslant 2|1-a_k|$. По условию имеем

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}\frac{|1-a_l|^p\,d\mu(z)}{|1-\overline{a}_lz|^p|1-\overline{a}_{l+1}z|^p|1-z|^{1-p}}\leqslant C\Big(1+\log\Big|\frac{1-a_l}{1-a_{l+1}}\Big|\Big)\tag{3.8}$$

для всех $l\in\mathbb{N}$. Заметим, что $|a_l-a_{l+1}|\leqslant|1-a_l|+|1-a_{l+1}|\leqslant 2|1-a_l|$. Значит, из (3.8) следует, что

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}\Big|\frac{1}{1-\overline{a}_lz}-\frac{1}{1-\overline{a}_{l+1}z}\Big|^p\frac{d\mu(z)}{|1-z|^{1-p}}\leqslant C\Big(1+\log\Big|\frac{1-a_l}{1-a_{l+1}}\Big|\Big).\tag{3.9}$$

Суммируя неравенство (3.9) по $l\in\mathbb{N}\cap[n,k-1]$, имеем

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{D}}}\frac{|a_k-a_n|^p\,d\mu(z)}{|1-\overline{a}_nz|^p|1-\overline{a}_kz|^p|1-z|^{1-p}}\leqslant C\Big(k-n+\log\Big|\frac{1-a_n}{1-a_k}\Big|\Big).$$

Остается заметить, что $|a_k - a_n| \geqslant |1-a_n| - |1-a_k| \geqslant \frac{1}{2}|1-a_n|$, и, согласно (3.3),

$$k - n + \log\left|\frac{1-a_n}{1-a_k}\right| \leqslant C\Big(1 + \log\left|\frac{1-a_n}{1-a_k}\right|\Big). \quad \square$$

Доказательство теоремы 3.2. Равносильность утверждений 2) и 3) можно установить так же, как в доказательстве теоремы 3.1, только теперь нужно разбить круг $\overline{\mathbb{D}}$ на три множества следующим образом:

$$\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |1-z| < |1-a_{n+1}|\} \cup \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |1-a_{n+1}| \leqslant |1-z| < |1-a_n|\} \cup \\ \cup \{z \in \overline{\mathbb{D}} : |1-z| \geqslant |1-a_n|\}.$$

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) полностью аналогична соответствующей импликации в доказательстве теоремы 3.1. Перейдем к доказательству импликации 2) $\Longrightarrow$ 1). По индукции выделим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ такую, что $n_1 = 1$ и n_k при $k \geqslant 2$ – наименьший индекс, удовлетворяющий соотношению $2|1-a_{n_k}| < |1-a_{n_{k-1}}|$. Обозначим через B_1 произведение Бляшке, нули которого образуют последовательность $\{a_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$. Сначала допустим, что BB_1^{-1} – конечное произведение Бляшке. Тогда из леммы 3.8 легко вытекает, что $B_1^*(H^p) \subset L^p(\mu)$. Чтобы получить 1), достаточно заметить, что $B^*(H^p) = B_1^*(H^p) + (BB_1^{-1})^*(H^p) = B_1^*(H^p) + (BB_1^{-1})^*(H^\infty)$. Теперь пусть BB_1^{-1} – бесконечное произведение Бляшке. Тогда существует конечное семейство $\{B_j\}_{j=2}^r$ бесконечных произведений Бляшке, удовлетворяющих условию (3.4) и таких, что $B = \prod\limits_{j=1}^r B_j$. Мы докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1) индукцией по r. Заметим, что по лемме 3.10 утверждение 2) выполнено для любого делителя B. Таким образом, по индукционному предположению имеем $\big(\prod\limits_{j=1}^{r-1} B_j\big)^*(H^p) \subset L^p(\mu)$. Пусть $\{b_j\}_{j\geqslant 1} = \{a_{l_j}\}_{j\geqslant 1}$ – последовательность нулей B_r. Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$. Существует единственный индекс $k \in \mathbb{N}$ такой, что $n_k < l_j < n_{k+1}$. Положим $b_j' \stackrel{\mathrm{def}}{=} a_{n_k}$. Тогда $|1-b_j| \leqslant |1-b_j'| \leqslant 2|1-b_j|$, и можно применить лемму 3.9. Значит, любая функция $f \in B^*(H^p)$ может быть представлена в виде $f = \sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_n \psi_n + B_r h$ (ряд сходится в H^p), причем

$$C_1\|f\|_{H^p}^p \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^p + \|h\|_{H^p}^p \leqslant C_2\|f\|_{H^p}^p.$$

Из того, что $f \in B^*(H^p)$, вытекает, что $h \in \big(\prod_{j=1}^{r-1} B_j\big)^*(H^p)$. Следовательно, по индукционному предположению имеем $\|B_r h\|_{L^p(\mu)} \leqslant \|h\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|h\|_{H^p}$. Остается заметить, что

$$|\psi_n(z)| = \frac{|1 - b_n\overline{b}'_n|}{|1-\overline{b}_n z||1-\overline{b}'_n z||1-z|^{N-1}} \leqslant C\frac{|1-b'_n|}{|1-\overline{b}_n z||1-\overline{b}'_n z||1-z|^{N-1}}$$

и применить лемму 3.10. □

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что включение $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ устойчиво относительно малых возмущений нулей B, удовлетворяющих условиям (3.1) и (3.2). Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.11. *Пусть $\{a'_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность в $\mathbb{D}$, удовлетворяющая условиям* (3.1) *и* (3.2)*. Допустим, что*

$$C_1|1-a_n| \leqslant |1-a'_n| \leqslant C_2|1-a_n| \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.10}$$

для некоторых положительных констант C_1 и C_2. Обозначим через Θ произведение Бляшке, нули которого образуют последовательность $\{a'_n\}_{n\geqslant 1}$. Тогда для любой меры $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ и при любом $p \in (0,+\infty)$ следующие утверждения равносильны:

1) *$B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$;*
2) *$\Theta^*(H^p) \subset L^p(\mu)$.*

Доказательство. Можно предположить, что последовательность $\{|1-a'_n|\}_{n\geqslant 1}$ также является убывающей. Действительно, если выполнены неравенства

$$C_1\varepsilon_n \leqslant \varepsilon'_n \leqslant C_2\varepsilon_n \tag{3.11}$$

для некоторых бесконечно малых последовательностей $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\varepsilon'_n\}_{n\geqslant 1}$, то они также выполнены для их возрастающих перестановок. Заметим, что

$$C_3\frac{1}{|1-\overline{a}_n z|} \leqslant \frac{1}{|1-\overline{a}'_n z|} \leqslant C_4\frac{1}{|1-\overline{a}_n z|}.$$

Ясно, что утверждение 2) теоремы 3.1 (или теоремы 3.2, если $\frac{1}{p} \in \mathbb{N}$) для B равносильно соответствующему утверждению для Θ. Остается применить теорему 3.1 (или теорему 3.2). □

Следствие. *Теоремы* 3.1 *и* 3.2 *остаются верными, если положить* $\varepsilon_n = 1 - |a_n|$ *или* $\varepsilon_n = 1 - |a_n|^2$ *в их утверждениях* 3). $\square$

Замечание. Легко проверить, что если бесконечно малые положительные последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\varepsilon' = \{\varepsilon'_n\}_{n\geqslant 1}$ из интервала $(0,2)$ удовлетворяют условию (3.11) и $0 \leqslant p < 1 < q < +\infty$, то $C_p(\varepsilon) \cap C_q(\varepsilon) = C_p(\varepsilon') \cap C_q(\varepsilon')$ и $C_p^*(\varepsilon) \cap C_1^*(\varepsilon) \cap C_q^*(\varepsilon) = C_p^*(\varepsilon') \cap C_1^*(\varepsilon') \cap C_q^*(\varepsilon')$.

§4. Примеры

Ясно, что из определений $C_p(\varepsilon)$ и $C_p^*(\varepsilon)$ следует:

C1) $C_p(\varepsilon) \subset C_p^*(\varepsilon)$ при $p \geqslant 0$, $p \neq 1$;

C2) $C_p(\varepsilon) \supset C_q(\varepsilon)$ и $C_p^*(\varepsilon) \supset C_q^*(\varepsilon)$ при $0 \leqslant p < q < 1$;

C3) $C_p(\varepsilon) \subset C_q(\varepsilon)$ и $C_p^*(\varepsilon) \subset C_q^*(\varepsilon)$ при $1 < p < q < +\infty$.

Пусть $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$. Положим $Q(\mu,\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in [0,1) \cup (1,+\infty) : \mu \in C_p(\varepsilon)\}$, $Q^*(\mu,\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in [0,+\infty) : \mu \in C_p^*(\varepsilon)\}$.

Из свойств C1, C2, C3 вытекают следующие свойства $Q(\mu,\varepsilon)$ и $Q^*(\mu,\varepsilon)$:

Q1) $Q(\mu,\varepsilon) \subset Q^*(\mu,\varepsilon)$;

Q2) пересечения $Q(\mu,\varepsilon) \cap [0,1)$ и $Q^*(\mu,\varepsilon) \cap [0,1)$ являются интервалами вида $[0,a\rangle$ при $a \in [0,1]$;

Q3) пересечения $Q(\mu,\varepsilon) \cap (1,+\infty)$ и $Q^*(\mu,\varepsilon) \cap (1,+\infty)$ являются интервалами вида $\langle a,+\infty)$ при $a \in [1,+\infty]$.

Здесь по определению $[0,0) = [+\infty,+\infty) = \varnothing$.

Наша цель в этом параграфе – доказать, что если подмножества Q и Q^* луча $[0,+\infty)$ удовлетворяют условиям $Q1$), $Q2$), $Q3$) и $Q \not\ni 1$, то существуют мера $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ и последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ из интервала $(0,2)$ такие, что $Q(\mu,\varepsilon) = Q$ и $Q^*(\mu,\varepsilon) = Q^*$. Из этого получается ряд приложений, касающихся вложений $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$. В частности, мы покажем, что множество $\{p \in (0,+\infty) : B^*(H^p) \subset L^p(\mu)\}$ может быть несвязным и состоять из произвольного конечного или бесконечного числа связных компонент.

Следующая теорема позволяет упростить проверку включений $\mu \in C_p(\varepsilon)$ и $\mu \in C_p^*(\varepsilon)$. Для формулировки этой теоремы нам нужно следующее обозначение:

$$I_n^p(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\varepsilon_{n+1} \leqslant |1-z| < \varepsilon_n} \frac{d\mu(z)}{|1-z|^p}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$. Предположим, что убывающая последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ из интервала $(0,2)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$\varepsilon_k \leqslant C_0 q^{k-n}\varepsilon_n \tag{4.1}$$

для всех $k > n$, где $C_0 > 0$ и $q \in (0,1)$ – константы. Тогда имеют место следующие утверждения:

a) *$\mu \in C_p(\varepsilon)$ при $0 \leqslant p < 1$ тогда и только тогда, когда $\mu(\{1\}) = 0$ и $I_n^p(\mu) \leqslant C\varepsilon_n^{1-p}$ для всех $n \geqslant 1$;*

b) *$\mu \in C_p(\varepsilon)$ при $p > 1$ тогда и только тогда, когда $I_n^p(\mu) \leqslant C\varepsilon_{n+1}^{1-p}$ для всех $n \geqslant 1$;*

c) *$\mu \in C_p^*(\varepsilon)$ при $0 \leqslant p < 1$ тогда и только тогда, когда $\mu(\{1\}) = 0$ и $I_n^p(\mu) \leqslant C\varepsilon_n^{1-p}\Big(1 + \log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\Big)$ для всех $n \geqslant 2$;*

d) *$\mu \in C_p^*(\varepsilon)$ при $p > 1$ тогда и только тогда, когда $I_n^p(\mu) \leqslant C\varepsilon_{n+1}^{1-p}\Big(1 + \log\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}}\Big)$ для всех $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Утверждения a) и b) очевидны. Ясно, что утверждение c) сводится к следующему неравенству:

$$\sum_{k\geqslant n}\varepsilon_k^{1-p}\Big(1+\log\frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}\Big) \leqslant C\varepsilon_n^{1-p}\Big(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\Big).$$

Чтобы доказать это неравенство, достаточно заметить, что

$$\sum_{k\geqslant n}\varepsilon_k^{1-p}\Big(1+\log\frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}\Big) = \varepsilon_n^{1-p}\Big(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\Big) +$$

$$\sum_{k>n}\Big(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}}\Big)^{1-p}\Big(1+\log\frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}\Big)\varepsilon_{k-1}^{1-p} \leqslant \varepsilon_n^{1-p}\Big(1+\log\frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}\Big) + C\sum_{k\geqslant n}\varepsilon_k^{1-p},$$

где $C = \sup\limits_{x\geqslant 1}\dfrac{1+\log x}{x^{1-p}} < +\infty$. Теперь требуемое неравенство очевидно. Утверждение d) доказывается аналогично. □

Напомним, что B – произведение Бляшке, удовлетворяющее условиям (3.1) и (3.2). Зафиксировав последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$, в дальнейшем будем считать, что

$$C_1\varepsilon_n \leqslant |1 - a_n| \leqslant C_2\varepsilon_n \quad (n \geqslant 1)$$

для некоторых положительных констант C_1 и C_2. Заметим, что если $\inf\limits_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} > 0$, то функция B однокомпонентна. Но мы будем предполагать, что
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = 0.$$
Будем рассматривать только меры μ, представимые в виде $\mu = \sum\limits_{n\in\Lambda} \lambda_n \delta_{1-t_n}$, где $\lambda_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_{n+1} \leqslant t_n < \varepsilon_n$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, и Λ – бесконечное подмножество $\mathbb{N}$. Ясно, что для такой меры μ имеем $I_n^p(\mu) = \lambda_n t_n^{-p}$ при всех достаточно больших $n \in \Lambda$.

Пример 1. Пусть $t_n = \sqrt{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}$ и $\lambda_n = \sqrt{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}} \log \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$. Легко видеть, что $\mu \in C_p(\varepsilon)$ и $\mu \in C_p^*(\varepsilon)$ при всех p, т.е. $Q(\mu,\varepsilon) = [0,1) \cup (1,+\infty)$, $Q^*(\mu,\varepsilon) = [0,+\infty)$. Следовательно, $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ при всех $p > 0$. Однако, $\mu \notin \mathcal{C}(B)$.

Пример 2. Пусть $t_n = \sqrt{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}$ и $\lambda_n = \sqrt{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}} \log^2 \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}$. Тогда $Q(\mu,\varepsilon) = Q^*(\mu,\varepsilon) = [0,1) \cup (1,+\infty)$. Следовательно, $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $p \neq \frac{1}{N}$ при $N \in \mathbb{N}$. Аналогичное утверждение справедливо также для B^l при $l \in \mathbb{N}$.

Пример 3. Пусть $0 \leqslant \alpha < 1$. Положим
$$t_n = \varepsilon_n \left(\log \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}},$$
$$\lambda_n = \varepsilon_n \left(\log \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$
Допустим, что
$$\log \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} \leqslant C \log \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}$$
при всех $n \in \Lambda$, $n \geqslant 2$. Тогда $Q(\mu,\varepsilon) = [0,\alpha] \cup (1,+\infty)$, $Q^*(\mu,\varepsilon) = [0,+\infty)$. Следовательно, $B^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $p = \frac{1}{N}$ при $N \in \mathbb{N}$ или $\dfrac{1}{N+1} < p \leqslant \dfrac{\alpha}{N}$ при $N \in \mathbb{Z}_+$, $N < \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. Кроме того, при $l \geqslant 2$ включение $(B^l)^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ справедливо тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{N+1} \leqslant p \leqslant \dfrac{\alpha}{N}$ при $N \in \mathbb{Z}_+$, $N \leqslant \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Замечание. Несложная модификация этого примера позволяет построить меру μ, удовлетворяющую условиям $Q(\mu,\varepsilon)=[0,\alpha)\cup(1,+\infty)$ и $Q^*(\mu,\varepsilon)=[0,+\infty)$.

Пример 4. Пусть $0\leqslant\alpha<1$. Положим $t_n=\varepsilon_n\left(\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}$, $\lambda_n=\varepsilon_n\left(\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Допустим, что

$$\limsup_{n\in\Lambda,n\to\infty}\frac{\log\log\dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}}{\log\log\dfrac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}}=+\infty.$$

Тогда $Q(\mu,\varepsilon)=[0,\alpha]\cup(1,+\infty)$, $Q^*(\mu,\varepsilon)=[0,\alpha]\cup[1,+\infty)$. Следовательно, $B^*(H^p)\subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{1}{N+1}\leqslant p\leqslant\dfrac{\alpha}{N}$ при $N\in\mathbb{Z}_+$, $N\leqslant\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$. Аналогичное утверждение верно также для B^l при $l\in\mathbb{N}$.

Замечание. Несложная модификация этого примера дает меру, обладающую свойствами $Q(\mu,\varepsilon)=[0,\alpha)\cup(1,+\infty)$ и $Q^*(\mu,\varepsilon)=[0,\alpha)\cup[1,+\infty)$.

Пример 5. Пусть $1<\beta\leqslant+\infty$. Положим $t_n=\varepsilon_{n+1}\left(\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, $\lambda_n=\varepsilon_{n+1}\left(\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}$. Предположим, что

$$\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\leqslant C\log\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}}$$

для всех $n\in\Lambda$, $n\geqslant 2$. Тогда $Q(\mu,\varepsilon)=[0,1)\cup[\beta,+\infty)$, $Q^*(\mu,\varepsilon)=[0,+\infty)$. Следовательно, $B^*(H^p)\subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $p=\frac{1}{N}$ при $N\in\mathbb{N}$ или $\dfrac{\beta}{N+1}\leqslant p<\dfrac{1}{N}$ при $N\in\mathbb{Z}_+$, $N<\dfrac{1}{\beta-1}$. Кроме того, при $l\geqslant 2$, $(B^l)^*(H^p)\subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\beta}{N+1}\leqslant p\leqslant\dfrac{1}{N}$ при $N\in\mathbb{Z}_+$, $N\leqslant\dfrac{1}{\beta-1}$.

Замечание. Несложная модификация этого примера позволяет построить меру μ такую, что $Q(\mu,\varepsilon)=[0,1)\cup(\beta,+\infty)$ и $Q^*(\mu,\varepsilon)=[0,+\infty)$.

Пример 6. Пусть $1 < \beta \leqslant +\infty$. Положим $t_n = \varepsilon_{n+1}\left(\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, $\lambda_n = \varepsilon_{n+1}\left(\log\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}}$. Допустим, что

$$\liminf_{n\in\Lambda, n\to\infty} \frac{\log\log\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+2}}}{\log\log\dfrac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}} = 0.$$

Тогда $Q(\mu,\varepsilon) = [0,1)\cup[\beta,+\infty)$, $Q^*(\mu,\varepsilon) = [0,1]\cup[\beta,+\infty)$. Следовательно, $B^*(H^p)\subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\beta}{N+1} \leqslant p \leqslant \dfrac{1}{N}$ при $N\in\mathbb{Z}_+$, $N \leqslant \dfrac{1}{\beta-1}$. Аналогичный факт верен также для B^l при $l\in\mathbb{N}$.

Замечание. Несложная модификация этого примера дает меру μ, для которой $Q(\mu,\varepsilon) = [0,1)\cup(\beta,+\infty)$ и $Q^*(\mu,\varepsilon) = [0,1]\cup(\beta,+\infty)$.

Теорема 4.2. *Пусть $1 < p_0 \leqslant +\infty$. Тогда существуют интерполяционное произведение Бляшке B и мера $\mu\in M_+(\mathbb{D})$ такие, что $B^*(H^1)\subset L^1(\mu)$ и $B^*(H^{p_0})\subset L^{p_0}(\mu)$, но $B^*(H^p)\not\subset L^p(\mu)$ для любого $p\in(1,p_0)$.*

Доказательство. См. пример 5 при $\beta = p_0$. □

Заметим, что если $(B^2)^*(H^1)\subset L^1(\mu)$, то $(B^2)^*(H^p)\subset L^p(\mu)$ при всех $p\geqslant 2$. Это следует из теорем 1.1, 1.2 и 1.4.

Теорема 4.3. *Пусть $1 < p_0 \leqslant 2$. Тогда существуют интерполяционное произведение Бляшке B и мера $\mu\in M_+(\mathbb{D})$ такие, что $(B^2)^*(H^1)\subset L^1(\mu)$ и $(B^2)^*(H^{p_0})\subset L^{p_0}(\mu)$, но $(B^2)^*(H^p)\not\subset L^p(\mu)$ для любого $p\in(1,p_0)$.*

Доказательство. См. пример 6 при $\beta = p_0$. □

В связи с примером 2 отметим также следующий факт.

Теорема 4.4. *Существуют интерполяционное произведение Бляшке B и мера $\mu\in M_+(\mathbb{D})$ такие, что $B^*(H^p)\subset L^p(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{p}\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. См. пример 5 при $\beta = +\infty$. □

Из замечания после теоремы 4.2 следует, что не существует внутренней функции Θ и меры $\mu\in M_+(\overline{\mathbb{D}})$ таких, что включение

$(\Theta^2)^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ имеет место в том и только том случае, когда $\frac{1}{p} \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.5. *Пусть* $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ *– последовательность из интервала* $(0,2)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = 0$;

b) $\limsup\limits_{n\in\Lambda, n\to\infty} \dfrac{\log\log \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}}{\log\log \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}} = +\infty$;

c) $\liminf\limits_{n\in\Lambda, n\to\infty} \dfrac{\log\log \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}}}{\log\log \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_n}} = 0$;

d) *существует последовательность* $\{\varepsilon_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ *такая, что* $0 < \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\log \frac{\varepsilon_{n_k}}{\varepsilon_{n_k+1}}}{\log \frac{\varepsilon_{n_k-1}}{\varepsilon_{n_k}}} < +\infty$.

Пусть $Q \subset [0,1) \cap (1,+\infty)$ *и* $Q^* \subset [0,+\infty)$. *Допустим, что* Q *и* Q^* *удовлетворяют условиям Q1), Q2), Q3). Тогда существует мера* $\mu \in M_+(\mathbb{D})$ *такая, что* $Q = Q(\mu,\varepsilon)$ *и* $Q^* = Q^*(\mu,\varepsilon)$.

Доказательство. Заметим, что $Q(\mu+\nu,\varepsilon) = Q(\mu,\varepsilon) \cap Q(\nu,\varepsilon)$ и $Q^*(\mu+\nu,\varepsilon) = Q^*(\mu,\varepsilon) \cap Q^*(\nu,\varepsilon)$. Остается использовать примеры 1–6 и замечания к примерам 3–6. □

Литература

1. А. Б. Александров, *Инвариантные подпространства оператора обратного сдвига в пространстве* H^p $(p \in (0,1))$. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **92** (1979), 7–29.
2. А. Б. Александров, *Инвариантные подпространства операторов сдвига. Аксиоматический подход.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **113** (1981), 7–26.
3. А. Б. Александров, *Кратность граничных значений внутренних функций.* — Изв. АН Арм. ССР, Математика **22**, № 5 (1987), 490–503.
4. А. Б. Александров, *Внутренние функции и связанные с ними пространства псевдопродолжимых функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **170** (1989), 7–33.
5. А. Б. Александров, *О принципе максимума для псевдопродолжимых функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **217** (1994), 16–25.
6. А. Б. Александров, *Простое доказательство теоремы Вольберга–Треиля о вложении коинвариантных подпространств оператора сдвига.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **217** (1994), 26–35.

7. А. Б. Александров, *О существовании угловых граничных значений псевдопродолжимых функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **222** (1995), 5–17.
8. A. B. Aleksandrov, J. M. Anderson, and A. Nicolau, *Inner functions, Bloch spaces and symmetric measures.* — Preprint (1997).
9. D. Clark, *One dimensional perturbation of restricted shifts.* — J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.
10. W. S. Cohn, *Carleson measures for functions orthogonal to invariant subspaces.* — Pacific J. Math. **103** no. 2 (1982), 347–364.
11. W. S. Cohn, *Radial imbedding theorems for invariant subspaces.* — Complex Variables Theory Appl. **17** no. 1-2 (1991), 33–42.
12. R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields, *Cyclic vectors and invariant subspaces for the backward shift operator.* — Ann. Inst. Fourier **20** no. 1 (1970), 37–76.
13. К. М. Дьяконов, *Гладкие функции и коинвариантные подпространства оператора сдвига.* — Алгебра и Анализ **4**, № 5 (1992), 117–147.
14. K. M. Dyakonov, *Moment problems for bounded functions.* — Communications in Analysis and Geometry **2** no. 3 (1994), 533–562.
15. А. М. Коточигов, *Свободная интерполяция аналитическими функциями.* Ленинград, Диссертация, 1981.
16. А. Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций.* — Алгебра и Анализ **5**, № 2 (1993), 189–210.
17. А. Л. Вольберг, С. Р. Треиль, *Теоремы вложения для инвариантных подпространств оператора обратного сдвига.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **149** (1986), 38–51.

Aleksandrov A. B. On imbedding theorems for coinvariant subspaces of the shift operator. II.

For every inner function Θ, we put $\Theta^*(H^2) \stackrel{\text{def}}{=} H^2 \ominus \Theta H^2$, and $\Theta^*(H^p) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{clos}_{H^p}(H^p \cap \Theta^*(H^2))$ for $p \neq 2$. Denote $\mathcal{C}_p(\Theta) = \{\mu \in C(\overline{\mathbb{D}})\colon \Theta^*(H^p) \subset L^p(|\mu|)\}$. An inner function Θ is said to be one-component if the set $\{z \in \mathbb{D} : |\Theta(z)| < \varepsilon\}$ is connected for some $\varepsilon \in (0,1)$. A series of criteria for that are obtained. For example, Θ is one-component if and only if $\mathcal{C}_p(\Theta)$ does not depend on $p \in (0,+\infty)$. Moreover, there is a criterion in terms of the reproducing kernel of $\Theta^*(H^2)$. The set $\mathcal{C}_p(\Theta)$ is described in the case where Θ is a Blaschke product of special form. This description implies that the set of all p such that a given measure μ belongs to $\mathcal{C}_p(\Theta)$ may have any finite or infinite number of connected component. The following examples of interpolating Blaschke products Θ and positive measures μ are constructed: (1) $\Theta^*(H^1) \subset L^1(\mu)$ and $\Theta^*(H^2) \subset L^2(\mu)$ but $\Theta^*(H^p) \not\subset L^p(\mu)$ for any $p \in (1,2)$; (2) $\Theta^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ if and only if $p = \frac{1}{n}$, where n is a positive integer; (3) $\Theta^*(H^p) \subset L^p(\mu)$ if and only if $p \neq \frac{1}{n}$, where n is a positive integer.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 11 мая 1999 г.