Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

О. Л. Виноградов

ПРЕДЕЛ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ–ЛЕЖАНДРА, ЗАДАВАЕМЫХ ФУНКЦИЕЙ МНОЖИТЕЛЕЙ

Далее $C[a,b]$ – пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ вещественно- или комплекснозначных функций f с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $L_p(E)$ – пространство измеримых на множестве E функций f, для которых величина $\|f\|_p^p = \int_E |f|^p$ конечна, $L(E) = L_1(E)$, P_k – многочлены Лежандра, нормированные условием $P_k(1) = 1$, $\widehat{P}_k = \sqrt{k+1/2}\, P_k$ – многочлены Лежандра, нормированные в $L_2[-1,1]$, J_0 – функция Бесселя нулевого индекса, буквой K обозначена абсолютная постоянная, возможно, разная в разных формулах, $\mathbf{1}$ – функция, тождественно равная 1.

Пусть функции $f \in C[-1,1]$ соответствует ее ряд Фурье–Лежандра

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \widehat{P}_k.$$

В работе рассматриваются последовательности линейных операторов (методы суммирования) $U_n : C[-1,1] \to C[-1,1]$,

$$U_n f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} a_k \widehat{P}_k,$$

где $\lambda_k^{(n)} \in \mathbb{R}$. Операторы U_n могут быть записаны в интегральном виде:

$$U_n f(y) = \int_{-1}^{1} f(x) Q_n(y,x)\, dx, \qquad Q_n(y,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \widehat{P}_k(y) \widehat{P}_k(x).$$

Если оператор U_n полиномиальный, то последняя сумма конечна. В общем случае необходимо уточнить, как понимать сумму ряда.

Работа поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований, проект 98-01-00838, и ФЦП "Интеграция", рег. №326.53.

Многие классические операторы задаются с помощью функции множителей φ: $\lambda_k^{(n)} = \varphi(k/n)$. Таковы, например, методы Гельдера: $\varphi(x) = (1-x)^\alpha$, в том числе Фейера: $\varphi(x) = 1-x$, Бомана–Коровкина: $\varphi(x) = (1-x)\cos\pi x + (\sin\pi x)/\pi$ (в вышеперечисленных методах $\varphi(x)$ задается указанной формулой при $x \in [0,1]$ и $\varphi(x) = 0$ при $x > 1$), Абеля–Пуассона: $\varphi(x) = e^{-ax}$, Вейерштрасса: $\varphi(x) = e^{-ax^2}$ и другие. В дальнейшем считаем, что

$$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k/n)(k+1/2) < \infty \qquad \text{для всех } n \in \mathbb{N}, \\ \int_0^{\infty} \varphi^2(x)x\,dx < \infty \quad \text{ и } \quad \varphi \text{ непрерывна на } [0,+\infty). \end{gathered} \tag{1}$$

Первое из условий (1) обеспечивает сходимость ряда для ядра Q_n в $L_2[-1,1]$ при всех $y \in [-1,1]$.

Хорошо известно (см., например, [1, c.28, 415]), что для того, чтобы $U_n f \rightrightarrows f$ (соответственно, $U_n f(y) \to f(y)$) для всех $f \in C[-1,1]$, необходимо и достаточно, чтобы

А) $U_n f \rightrightarrows f \quad (U_n f(y) \to f(y))$ для любого многочлена f и

Б) последовательность $\mathfrak{L}_n = \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} \|U_n f\|$ $(L_n(y) = \sup\limits_{\|f\|\leqslant 1} |U_n f(y)|)$ была ограничена.

Ясно, что

$$L_n(y) = \int_{-1}^{1} |Q_n(y,x)|\,dx, \qquad \mathfrak{L}_n = \sup_{y\in[-1,1]} L_n(y).$$

Величины L_n называются функциями Лебега, а $\mathfrak{L}_n$ – константами Лебега данного метода суммирования. Отметим, что в определении функций и констант Лебега верхнюю грань можно брать по множеству всех многочленов f таких, что $\|f\| \leqslant 1$. Выполнение условия А) для непрерывной φ обеспечивается равенством $\varphi(0) = 1$.

В связи с условием Б) возникает задача найти или хотя бы оценить величины $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n$ $(\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n(y))$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n$ $(\lim\limits_{n\to\infty} L_n(y))$ (впрочем, существует ли предел – неясно). В случае, когда ядро Q_n неотрицательно, $L_n(y) = \mathfrak{L}_n = \varphi(0)$. Таковы, например, методы

Гельдера при $\alpha \geqslant 2$ [2] и Абеля–Пуассона. Г. И. Натансон [3] установил, что для метода Фейера

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{L}_n < 1,495543, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n = \int_0^\infty \left| \int_0^x J_0 - xJ_0(x) \right| \frac{dx}{x^2} = 1,29634\ldots$$

Известно [4, 5], что функция Лебега достигает максимума на конце отрезка:

$$\mathfrak{L}_n = L_n(1) = \int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k/n)(k+1/2)P_k(x) \right| dx. \tag{2}$$

В данной работе найден предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n$ для достаточно широкого класса функций φ. Оказывается,

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n = \int_0^\infty |B\varphi|, \quad \text{где} \quad B\varphi(z) = z\int_0^\infty \varphi(x)xJ_0(zx)\,dx$$

– преобразование Фурье–Бесселя функции φ. В теореме 1 устанавливается оценка снизу, а в теореме 2 (основной) – оценка сверху для этого предела.

Теорема 1. *Если φ удовлетворяет условиям* (1), *то*

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n \geqslant \int_0^\infty |B\varphi|.$$

Доказательство. Делая в (2) замену $x = \cos(z/n)$, получим

$$\mathfrak{L}_n = \int_0^{n\pi} n\sin\frac{z}{n} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k+1/2}{n} P_k\left(\cos\frac{z}{n}\right) \right| dz.$$

Пусть сначала функция φ финитна: $\varphi(x) = 0$ при $x \geqslant N$. Тогда сумма конечна:

$$\mathfrak{L}_n = \int_0^{n\pi} n\sin\frac{z}{n} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{Nn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k+1/2}{n} P_k\left(\cos\frac{z}{n}\right) \right| dz. \tag{3}$$

Покажем, что последовательность подынтегральных функций в (3) поточечно сходится к $B\varphi$. Тогда останется применить теорему Фату о предельном переходе под знаком интеграла (см., например, [6, с. 102]). Зафиксируем $z > 0$. Воспользуемся формулой Хильба [1, с. 203]:

$$P_k(\cos t) = \sqrt{t/\sin t}\, J_0((k+1/2)t) + O\big(\sqrt{t}\,(k+1/2)^{-3/2}\big)$$

равномерно при $0 \leqslant t \leqslant \pi - \varepsilon$. Тогда при достаточно больших n

$$\sqrt{\frac{\sin(z/n)}{z/n}}\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{Nn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k+1/2}{n}\, P_k\left(\cos\frac{z}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{Nn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k+1/2}{n}\, J_0\left(\frac{k+1/2}{n} z\right) + R_n(z),$$

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{K}{n}\sqrt{\frac{z}{n}} \sum_{k=0}^{Nn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k+1/2}{n\,(k+1/2)^{3/2}} \leqslant$$

$$\leqslant K\sqrt{\frac{2z}{n}}\,\frac{nN}{n^2}\max|\varphi| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Кроме того, $n\sin(z/n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, а интегральная сумма

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{Nn} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \frac{k+1/2}{n}\, J_0\left(\frac{k+1/2}{n} z\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^N \varphi(x) x J_0(zx)\, dx.$$

Итак, для финитной функции φ теорема доказана.

Если же φ не финитна, то возьмем $N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим средние Гельдера с показателем 2 порядка Nn ядра Q_n: $H^{(2)}_{Nn}(Q_n)$. Так как метод Гельдера с показателем 2 положителен, то

$$\int_{-1}^{1} |Q_n| \geqslant \int_{-1}^{1} |H^{(2)}_{Nn}(Q_n)|.$$

По доказанному

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} |H^{(2)}_{Nn}(Q_n)| \geqslant \int_0^\infty z \left| \int_0^N \Big(1 - \frac{x}{N}\Big)^2 \varphi(x) x J_0(zx)\, dx \right| dz.$$

В силу второго условия в (1) интеграл $\int_0^\infty \sqrt{zx}\,\varphi(x)\sqrt{x}J_0(zx)\,dx$ сходится в $L_2[0,+\infty)$ [7, с. 135]. При $N \to \infty$

$$\int\limits_0^N \left(1 - \frac{x}{N}\right)^2 \sqrt{zx}\,\varphi(x)\sqrt{x}J_0(zx)\,dx \longrightarrow \int\limits_0^\infty \sqrt{zx}\,\varphi(x)\sqrt{x}J_0(zx)\,dx$$

в $L_2[0,+\infty)$. Осталось применить теорему Фату.

Лемма 1. *Пусть f – многочлен, функция φ удовлетворяет условиям* (1) *и $B\varphi$ суммируема на $[0,+\infty)$. Тогда*

$$U_n(f,1) = \int\limits_0^\infty Wf\left(\frac{z}{n}\right) B\varphi(z)\,dz,$$

где W – линейный оператор, заданный на многочленах так:

$$P_k(\cos t) \overset{W}{\longmapsto} J_0(kz).$$

Доказательство. В силу линейности обеих частей равенства по f достаточно доказать его при $f = P_k$. Слева имеем $U_n(P_k,1) = \varphi(k/n)$. Осталось установить равенство

$$\varphi(s) = \int\limits_0^\infty J_0(sz)B\varphi(z)\,dz \tag{4}$$

при $s = k/n$. Оно справедливо почти всюду (так как если умножить обе его части на $\sqrt{s}$, то оно будет верно в $L_2[0,+\infty)$). В силу суммируемости функции $B\varphi$ интеграл справа непрерывен по s (напомним, что $|J_0| \leqslant 1$), а φ непрерывна по условию. Следовательно, равенство (4) верно при всех s и, в частности, при $s = k/n$.

Замечание 1. В теореме 1 вместо непрерывности функции φ достаточно ее интегрируемости по Риману на любом отрезке. В лемме 1 вместо непрерывности функции φ и суммируемости функции $B\varphi$ достаточно интегрируемости функции φ по Риману на любом отрезке и выполнения формулы обращения (4) при $s = k/n$.

Аналог леммы 1 для тригонометрической системы см. в [7, с. 149].

Теорема 2. *Пусть φ удовлетворяет условиям* (1) *и функция* $z^{q-1}|B\varphi(z)|^q$ *суммируема на* $[0,+\infty)$ *при некотором* $q>1$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{L}_n=\int\limits_0^\infty|B\varphi|.$$

Доказательство. Принимая во внимание теорему 1, осталось доказать неравенство $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\mathfrak{L}_n\leqslant\int_0^\infty|B\varphi|$. Если $B\varphi\notin L[0,+\infty)$, то это очевидно. Пусть $B\varphi\in L[0,+\infty)$, f – многочлен, $\|f\|\leqslant 1$. Исследуем опреатор W из леммы 1. Для этого представим его в виде

$$P_k(\cos t)\stackrel{V}{\longmapsto}\cos ku\longmapsto J_0(kz).$$

Wf выражается через Vf так же, как функция Бесселя через косинус:

$$J_0(kz)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^z\frac{\cos ku\,du}{\sqrt{z^2-u^2}},\qquad Wf(z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^z\frac{Vf(u)\,du}{\sqrt{z^2-u^2}}.$$

Воспользуемся формулами Дирихле–Мелера [1, с. 98]:

$$P_k(\cos t)=\frac{\sqrt2}{\pi}\int\limits_0^t\frac{\cos{(k+1/2)u}}{\sqrt{\cos u-\cos t}}\,du=\frac{\sqrt2}{\pi}\int\limits_t^\pi\frac{\sin{(k+1/2)u}}{\sqrt{\cos t-\cos u}}\,du$$

при $t\in(0,\pi)$. Обратив их по формулам для интегрального уравнения Абеля [8, с. 32], получим

$$\left.\begin{aligned}\cos{(k+1/2)u}&=\frac{1}{\sqrt2}\frac{d}{du}\int\limits_0^u\frac{P_k(\cos t)\sin t}{\sqrt{\cos t-\cos u}}\,dt,\\ \sin{(k+1/2)u}&=-\frac{1}{\sqrt2}\frac{d}{du}\int\limits_u^\pi\frac{P_k(\cos t)\sin t}{\sqrt{\cos u-\cos t}}\,dt,\end{aligned}\right\}\quad u\in(0,\pi).$$

Учитывая, что

$$\cos ku=\cos{(u/2)}\cos{(k+1/2)u}+\sin{(u/2)}\sin{(k+1/2)u},$$

получим выражение для оператора V:

$$Vf(u)=\frac{1}{\sqrt2}\cos\frac{u}{2}\frac{d}{du}\int\limits_0^u\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos u}}-\frac{1}{\sqrt2}\sin\frac{u}{2}\frac{d}{du}\int\limits_u^\pi\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos u-\cos t}}$$

при $u \in (0,\pi)$. Для краткости вместо $f(\cos t)$ пишем просто f. На всю ось функция Vf продолжается четно, 2π-периодически: $Vf(2\nu\pi \pm u) = Vf(u)$ при $\nu \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $z = M\pi + \alpha$, $M \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in (0,\pi)$. Пусть сначала $M = 2m$ четно. Тогда при $M \in \mathbb{N}$, разбивая отрезок $[0,z]$ на части и принимая $2\nu\pi + u$ или $2(\nu+1)\pi - u$ за новую переменную, имеем

$$
\begin{aligned}
Wf(z) &= \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(\int\limits_{2\nu\pi}^{(2\nu+1)\pi} + \int\limits_{(2\nu+1)\pi}^{2(\nu+1)\pi}\right)\frac{Vf(u)\,du}{\sqrt{z^2-u^2}} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{M\pi}^{z}\frac{Vf(u)\,du}{\sqrt{z^2-u^2}} = \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{m-1}\int\limits_0^{\pi} h_\nu(u)Vf(u)\,du + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\alpha}\frac{Vf(u)\,du}{\sqrt{z^2-(M\pi+u)^2}} = \\
&= \Sigma f(z) + W_c f(z) + W_s f(z),
\end{aligned}
$$

где
$$
\begin{aligned}
h_\nu(u) = h(u) &= \frac{1}{\sqrt{z^2-(2\nu\pi+u)^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2-(2(\nu+1)\pi-u)^2}},\\
W_c f(z) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\alpha}\frac{\cos(u/2)}{\sqrt{z^2-(M\pi+u)^2}}\,d\int\limits_0^{u}\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos u}},\\
W_s f(z) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\alpha}\frac{-\sin(u/2)}{\sqrt{z^2-(M\pi+u)^2}}\,d\int\limits_u^{\pi}\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos u-\cos t}}.
\end{aligned}
$$

Далее, интегрируя по частям (при этом двойная подстановка обращается в нуль) и меняя порядок интегрирования, находим, что ν-е слагаемое в Σ равно

$$
\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi} h(u)\left(\cos\frac{u}{2}\,d\int\limits_0^{u}\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos u}} - \sin\frac{u}{2}\,d\int\limits_u^{\pi}\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos u-\cos t}}\right) =
$$
$$
= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{\left(\int\limits_0^{u}\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos t-\cos u}}\right)d\left[-\cos\frac{u}{2}\,h(u)\right] + \right.
$$

$$+\left(\int\limits_u^\pi \frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{\cos u-\cos t}}\right) d\left[\sin\frac{u}{2}\,h(u)\right]\Biggr\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^\pi f\sin t\left\{\int\limits_t^\pi \frac{d\,[-\cos(u/2)h(u)]}{\sqrt{\cos t-\cos u}} + \int\limits_0^t \frac{d\,[\sin(u/2)h(u)]}{\sqrt{\cos u-\cos t}}\right\} dt.$$

Докажем, что ядро в фигурных скобках неотрицательно. Для слагаемого с косинусом это ясно: $\cos(u/2)$ убывает, и h тоже убывает в силу того, что

$$h'(u) = \frac{2\nu\pi+u}{(z^2-(2\nu\pi+u)^2)^{3/2}} - \frac{2(\nu+1)\pi-u}{(z^2-(2(\nu+1)\pi-u)^2)^{3/2}} \leqslant 0.$$

С синусом сложнее:

$$\left(\sin\frac{u}{2}h(u)\right)' = \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}h(u) + \sin\frac{u}{2}h'(u) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\cos(u/2)}{2\sqrt{z^2-(2(\nu+1)\pi-u)^2}} + \sin\frac{u}{2}h'(u).$$

Приведем дроби к общему знаменателю $(z^2-(2(\nu+1)\pi-u)^2)^{3/2}$. Числитель будет равен

$$F = \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\,(z^2-(2(\nu+1)\pi-u)^2) - \sin\frac{u}{2}\,(2(\nu+1)\pi-u) +$$

$$+\sin\frac{u}{2}\,(2\nu\pi+u)\left(\frac{z^2-(2(\nu+1)\pi-u)^2}{z^2-(2\nu\pi+u)^2}\right)^{3/2}.$$

F возрастает по z и поэтому не меньше значения при $z=2(\nu+1)\pi$:

$$F \geqslant \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\,(4(\nu+1)\pi-u)u - \sin\frac{u}{2}\,(2(\nu+1)\pi-u) +$$

$$+\sin\frac{u}{2}\,(2\nu\pi+u)\left(\frac{u}{2\pi-u}\frac{4(\nu+1)\pi-u}{(4\nu+2)\pi+u}\right)^{3/2} \geqslant$$

$$\geqslant (2(\nu+1)\pi-u)\left(u\cos\frac{u}{2} - \sin\frac{u}{2}\left(1-\left(\frac{u}{2\pi-u}\right)^{3/2}\right)\right) +$$

$$+\left(\frac{u^2}{2}\cos\frac{u}{2} - \sin\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2\pi-u}\right)^{3/2} 2(\pi-u)\right) =$$

$$= (2(\nu+1)\pi-u)F_1(u) + F_2(u).$$

Докажем, что оба слагаемых неотрицательны. Запишем, что

$$\frac{u}{2\pi - u} = 1 - \frac{2(\pi - u)}{2\pi - u},$$

и воспользуемся неравенством $(1-\xi)^p \geqslant 1 - p\xi$, верным при $\xi \in [\,0,1]$, $p \geqslant 1$. Получим

$$u\cos\frac{u}{2} - \sin\frac{u}{2}\left(1 - \left(\frac{u}{2\pi - u}\right)^{3/2}\right) \geqslant u\cos\frac{u}{2} - 3\sin\frac{u}{2}\,\frac{\pi - u}{2\pi - u}.$$

Теперь при $u \in [\pi/2, \pi]$ неотрицательность последнего выражения равносильна выполнению неравенства

$$\frac{\sin\left((\pi - u)/2\right)}{(\pi - u)/2} \geqslant \frac{\sin\left(u/2\right)}{u/2}\,\frac{3}{2\pi - u},$$

верного в силу убывания функции $(\sin x)/x$, а при $u \in [\,0, \pi/2]$ следует из неравенств

$$\frac{3}{u}\mathrm{tg}\frac{u}{2}\,\frac{\pi - u}{2\pi - u} \leqslant \frac{3}{u}\frac{4}{\pi}\frac{u}{2}\frac{\pi}{2\pi} = \frac{3}{\pi} < 1.$$

Неотрицательность F_1 доказана.

Рассмотрим функцию $\psi(u) = (\pi - u)\mathrm{tg}(u/2)/\sqrt{u(2\pi - u)}$ и докажем, что

$$\psi'(u) = \frac{u(\pi - u)(2\pi - u) - \pi^2\sin u}{2(u(2\pi - u))^{3/2}\cos^2(u/2)} \geqslant 0.$$

Достаточно рассмотреть лишь $u \in [\pi/2, \pi]$. Заменой $\pi - u = v \in [\,0, \pi/2]$ сведем доказываемое неравенство к неравенству

$$\sin v \leqslant v(1 - v^2/\pi^2) = v - v^3/\pi^2.$$

Оно вытекает из известного неравенства $\sin v \leqslant v - v^3/6 + v^5/120$ и легко проверяемого неравенства $1/\pi^2 < 1/6 - v^2/120$. Таким образом, ψ возрастает и $\psi(u) \leqslant \psi(\pi) = 2/\pi$. Теперь неотрицательность F_2 следует из неравенств

$$\sin\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2\pi - u}\right)^{3/2} 2(\pi - u) =$$

$$= \psi(u)\frac{2u^2\cos\left(u/2\right)}{2\pi - u} \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{2}{\pi}u^2\cos\frac{u}{2} \leqslant \frac{u^2}{2}\cos\frac{u}{2}.$$

Пусть теперь $M = 2m+1$ нечетно. Опять запишем

$$Wf(z) = \Sigma^* f(z) + W_c^* f(z) + W_s^* f(z),$$
$$\Sigma^* f(z) = \Sigma f(z) + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{Vf(u)\,du}{\sqrt{z^2-(2m\pi+u)^2}}.$$

В ядрах слагаемых, входящих в Σ^*, все слагаемые с синусами неотрицательны, как и раньше. С косинусами перегруппируем:

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} h_\nu(u) + \frac{1}{\sqrt{z^2-(2m\pi+u)^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-u^2}} +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-(2\nu\pi-u)^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2-(2\nu\pi+u)^2}}\right).$$

Докажем, что каждое слагаемое, умноженное на $-\cos(u/2)$, возрастает на $[0,\pi]$. Для первого слагаемого это верно, так как

$$(z^2-u^2)^{3/2}\left(\frac{-\cos(u/2)}{\sqrt{z^2-u^2}}\right)' = \frac{z^2-u^2}{2}\sin\frac{u}{2} - u\cos\frac{u}{2} \geqslant \frac{\pi^2}{2}\frac{2}{\pi}\frac{u}{2} - u \geqslant 0.$$

В каждом слагаемом под знаком суммы после умножения на $-\cos(u/2)$ сделаем замену $u = \pi - v$. Тогда возрастание ν-го слагаемого по u равносильно возрастанию функции

$$\sin\frac{v}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-((2\nu-1)\pi+v)^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2-((2\nu+1)\pi-v)^2}}\right)$$

по v, а это уже доказывалось.

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Sigma f(z)| &\leqslant \Sigma\mathbf{1}(z) = W\mathbf{1}(z) - W_c\mathbf{1}(z) - W_s\mathbf{1}(z) \leqslant 1, \\ |\Sigma^* f(z)| &\leqslant \Sigma^*\mathbf{1}(z) = W\mathbf{1}(z) - W_c^*\mathbf{1}(z) - W_s^*\mathbf{1}(z) \leqslant 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Далее, принимая $\pi - u$ и $\pi - t$ за новые переменные интегрирования и полагая $f^*(\cos t) = f(-\cos t)$, находим

$$W_c^* f(z) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi} \frac{\cos(u/2)}{\sqrt{z^2 - ((M+1)\pi - u)^2}}\, d \int\limits_0^u \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos t - \cos u}} = W_s f^*(z),$$

$$W_s^* f(z) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi} \frac{-\sin(u/2)}{\sqrt{z^2 - ((M+1)\pi - u)^2}}\, d \int\limits_u^{\pi} \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos u - \cos t}} = W_c f^*(z).$$

Так как f^*, как и f, – многочлен с $\|f^*\| \leqslant 1$, то достаточно исследовать $W_c f(z)$ и $W_s f(z)$.

Теперь займемся слагаемым $W_c f(z)$ при $M = 0$, т.е. $z = \alpha$. При интегрировании по частям под знаком дифференциала по u отнимем постоянную, чтобы подстановка на верхнем пределе $u = \alpha$ обратилась в нуль. После этого поменяем порядок интегрирования. Получим

$$W_c f(z) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^{\alpha} \frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}}\, d \left[\int\limits_0^u \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos t - \cos u}} - \int\limits_0^{\alpha} \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi\alpha} \int\limits_0^{\alpha} \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^{\alpha} \left[\int\limits_0^u \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos t - \cos u}} - \left(\int\limits_0^u + \int\limits_u^{\alpha} \right) \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \right] d \frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi\alpha} \int\limits_0^{\alpha} \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^{\alpha} f \sin t \left\{ - \int\limits_t^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos u}} - \frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \right) d \frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \int\limits_0^t d \frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \right\} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int\limits_0^{\alpha} f \sin t \left\{ - \int\limits_t^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos u}} - \frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \right) d \frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\cos t - \cos \alpha}} \frac{\cos(t/2)}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}} \right\} dt.$$

Обозначим выражение в фигурных скобках через H. Внеинтегральный член в H преобразуем так:

$$\frac{\cos(t/2)}{\sqrt{\alpha^2-t^2}} = -\int_t^\alpha d\left[\left(1-\frac{\sqrt{\cos t-\cos u}}{\sqrt{\cos t-\cos\alpha}}\right)\frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2-u^2}}\right] =$$

$$= -\int_t^\alpha \left(1-\frac{\sqrt{\cos t-\cos u}}{\sqrt{\cos t-\cos\alpha}}\right) d\frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2-u^2}} +$$

$$+\int_t^\alpha \frac{\sin u}{2\sqrt{\cos t-\cos\alpha}\sqrt{\cos t-\cos u}}\frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2-u^2}}\,du.$$

Подставляя в H, находим

$$H = \frac{1}{\sqrt{\cos t-\cos\alpha}}\int_t^\alpha \left(\frac{\sqrt{\cos t-\cos u}}{\sqrt{\cos t-\cos\alpha}} - \frac{\sqrt{\cos t-\cos\alpha}}{\sqrt{\cos t-\cos u}}\right) d\frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2-u^2}} +$$

$$+\frac{1}{\cos t-\cos\alpha}\int_t^\alpha \frac{\sin u}{2\sqrt{\cos t-\cos u}}\frac{\cos(u/2)}{\sqrt{\alpha^2-u^2}}\,du =$$

$$= \frac{1}{\cos t-\cos\alpha}\int_t^\alpha \frac{\cos(u/2)\left((\alpha^2-u^2)\frac{\sin u}{2}-(\cos u-\cos\alpha)u\right)}{\sqrt{\cos t-\cos u}\,(\alpha^2-u^2)^{3/2}}\,du +$$

$$+\frac{1}{\cos t-\cos\alpha}\int_t^\alpha \frac{\cos u-\cos\alpha}{\sqrt{\cos t-\cos u}}\frac{\sin(u/2)}{2\sqrt{\alpha^2-u^2}}\,du.$$

Установим, что $H \geqslant 0$. Для этого достаточно показать, что

$$\Phi(\alpha,u) = \frac{\alpha^2-u^2}{2}\sin u - u(\cos u-\cos\alpha) \geqslant 0$$

при $0 \leqslant u \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Дифференцируя по α, находим

$$\Phi'_\alpha(\alpha,u) = \alpha\sin u - u\sin\alpha \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \Phi(\alpha,u) \geqslant \Phi(u,u) = 0.$$

Следовательно, при $M = 0$

$$|W_c f(z)| \leqslant W_c\mathbf{1}(z) = \frac{1+J_0(z)}{2} \leqslant 1. \tag{6}$$

Если же $M \in \mathbb{N}$, то, как нетрудно видеть,

$$|W_c f(z)| \leqslant K\sqrt{\alpha/z} \leqslant K. \tag{7}$$

Наконец, преобразуем третье слагаемое

$$W_s f(z) = T_1 f(z) + T_2 f(z), \qquad \text{где}$$

$$T_1 f(z) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\pi\sqrt{z}} \int_0^{\alpha} G(u)\, d\left[-\int_u^{\pi} \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos u - \cos t}}\right],$$

$$G(u) = \frac{\sin(u/2)}{\sin(\alpha/2)}\sqrt{\frac{2z}{z^2 - (M\pi + u)^2}} - \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}},$$

$$T_2 f(z) = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{z}} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}}\, d\left[-\int_u^{\pi} \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos u - \cos t}}\right].$$

Интегрируя по частям и меняя порядок интегрирования, находим, что интеграл в T_1 равен

$$\int_0^{\pi} f \sin t \left\{ \int_0^{\min\{t,\alpha\}} \frac{dG(u)}{\sqrt{\cos u - \cos t}} - \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}\,\sqrt{1-\cos t}} \right\} dt.$$

Обозначим интеграл по $[0, \alpha]$ через J_1, а по $[\alpha, \pi]$ – через J_2, и для их оценки воспользуемся легко проверяемыми неравенствами

$$|G(u)| \leqslant \frac{K}{\sqrt{\sin\alpha}} \quad \text{и} \quad |G'(u)| \leqslant \frac{K}{\sqrt{\alpha - u}\,\sqrt{\cos u - \cos\alpha}},$$

в которых $0 < u < \alpha < \pi$. Имеем

$$|J_1| \leqslant \int_0^{\alpha} \sin t \int_0^{t} \frac{|G'(u)|\, du}{\sqrt{\cos u - \cos t}}\, dt + \frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}} \int_0^{\alpha} \frac{\sin t\, dt}{\sqrt{1-\cos t}} =$$

$$= 2\int_0^{\alpha} |G'(u)|\sqrt{\cos u - \cos\alpha}\, du + 2\sqrt{\sin\alpha} \leqslant K\sqrt{\alpha},$$

$$J_2 = \int_{\alpha}^{\pi} f \sin t \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos u - \cos t}} - \frac{1}{\sqrt{1-\cos t}}\right) dG(u)\, dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\pi} f \sin t \int_0^{\alpha} G(u)\, d\frac{1}{\sqrt{\cos u - \cos t}}\, dt,$$

$$|J_2| \leqslant \frac{K}{\sqrt{\sin\alpha}} \int_\alpha^\pi \sin t \left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha - \cos t}} - \frac{1}{\sqrt{1-\cos t}} \right) dt =$$

$$= 2K \frac{\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} - \sqrt{2}}{\sqrt{\sin\alpha}} \leqslant 2K\sqrt{\alpha}.$$

Таким образом,

$$|T_1 f(z)| \leqslant K \sin(\alpha/2)\sqrt{\alpha/z} \leqslant K\alpha. \tag{8}$$

Преобразуем интеграл в T_2. Как и раньше, прибавим под знаком дифференциала постоянную и проинтегрируем по частям:

$$I = \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}}\, d\left[-\int_u^\pi \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos u - \cos t}} + \int_\alpha^\pi \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos\alpha - \cos t}} \right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\cos\alpha}} \left[\int_0^\pi \frac{f\sin t\, dt}{\sqrt{1-\cos t}} - \int_\alpha^\pi \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos\alpha - \cos t}} \right] +$$
$$+ \int_0^\alpha \left[\left(\int_u^\alpha + \int_\alpha^\pi \right) \frac{f \sin t\, dt}{\sqrt{\cos u - \cos t}} - \int_\alpha^\pi \frac{f\sin t\, dt}{\sqrt{\cos\alpha - \cos t}} \right] d \frac{1}{\sqrt{\cos u - \cos\alpha}}.$$

Теперь в повторном интеграле поменяем порядок интегрирования. При этом получившийся интеграл существует в смысле главного значения. Законность перемены порядка интегрирования можно обосновать так. Для функции $f(\cos t) - f(\cos\alpha)$ подынтегральная функция двух переменных t и u суммируема, и поэтому перемена порядка интегрирования законна, а для постоянной $f(\cos\alpha)$ равенство двух повторных интегралов легко проверить непосредственно. Итак, повторный интеграл в I равен

$$\text{v.p.} \left\{ \int_0^\alpha f \sin t\, I_1(\alpha, t)\, dt + \int_\alpha^\pi f\sin t\, I_2(\alpha, t)\, dt \right\},$$

$$I_1(\alpha,t)=\int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\cos u-\cos t}}\,d\frac{1}{\sqrt{\cos u-\cos\alpha}}=\frac{1}{\cos t-\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos t}{1-\cos\alpha}},$$

$$I_2(\alpha,t)=\int\limits_0^\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{\cos u-\cos t}}-\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha-\cos t}}\right)d\frac{1}{\sqrt{\cos u-\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-\cos t}-\sqrt{\cos\alpha-\cos t}}{(\cos t-\cos\alpha)\sqrt{1-\cos\alpha}}.$$

Складывая, находим

$$I=\frac{1}{\sqrt{1-\cos\alpha}}\int\limits_0^\pi\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{1-\cos t}}+\text{v.p.}\int\limits_0^\pi\frac{f\sin t}{\cos t-\cos\alpha}\sqrt{\frac{1-\cos t}{1-\cos\alpha}}\,dt=$$

$$=\text{v.p.}\int\limits_0^\pi\frac{f\sin t\,dt}{\cos t-\cos\alpha}+\int\limits_0^\pi\frac{f\sin t\,dt}{\sqrt{1-\cos t}\,(\sqrt{1-\cos t}+\sqrt{1-\cos\alpha})}.$$

Если теперь обозначить

$$\widetilde{f}(\alpha)=\text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi f\operatorname{ctg}\frac{\alpha-t}{2}\,dt$$

(в общепринятом обозначении $\widetilde{f}$ для тригонометрически сопряженной функции интеграл берется от $-\pi$ до π) и учесть равенство

$$\frac{\sin t}{\cos t-\cos\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-t}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+t}{2},$$

то получим

$$T_2f(z)=\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{z}}\widetilde{f}(\alpha)+T_3f(z),$$

$$T_3f(z)=\frac{1}{2\pi}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{z}}\int\limits_0^\pi f\left(\frac{2\cos(t/2)}{\sin(t/2)+\sin(\alpha/2)}-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+t}{2}\right)dt.$$

Докажем, что ядро оператора T_3 неотрицательно. Действительно, при $\alpha+t>\pi$ это очевидно. Если же $\alpha+t<\pi$, то $\cos((\alpha+t)/2)\leqslant$ $\leqslant\cos(t/2)$, а

$$\sin\frac{t}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha+t}{4}\cos\frac{\alpha-t}{4}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sin\frac{\alpha+t}{4}\,2\cos\frac{\alpha+t}{4} = 2\sin\frac{\alpha+t}{2}.$$

Значит,

$$\begin{aligned}
|T_3 f(z)| &\leqslant T_3\mathbf{1}(z) = \\
&= \frac{1}{\pi}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{\sin\alpha}{z}}\left(2\ln\left(1+\frac{1}{\sin(\alpha/2)}\right) - \ln\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \\
&\leqslant K\alpha\ln(1+1/\alpha)\sqrt{\alpha/z}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Что касается оператора тригонометрического сопряжения, то, как известно [8, с. 169], он ограничен как оператор из $L_p[0,\pi]$ в $L_p[0,\pi]$ при $1 < p < \infty$ (и тем более из $C[0,\pi]$ в $L_p[0,\pi]$ при $1 \leqslant p < \infty$), но не является ограниченным оператором из $C[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$. Обозначим через A_p норму этого оператора из $C[0,\pi]$ в $L_p[0,\pi]$:

$$\|\widetilde{f}\|_p \leqslant A_p\|f\|.$$

Перейдем к окончательному сопоставлению полученных оценок. На "основном" промежутке имеем

$$\int\limits_0^{\pi n} Wf\left(\frac{z}{n}\right) B\varphi(z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{\pi n}\left((W_c+T_1+T_3)f\left(\frac{z}{n}\right) + \sin\frac{z}{2n}\sqrt{\frac{\sin(z/n)}{z/n}}\,\widetilde{f}\left(\frac{z}{n}\right)\right)B\varphi(z)\,dz.$$

В силу соотношений (6), (8) и (9)

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_0^{\pi n} W_c f\left(\frac{z}{n}\right) B\varphi(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_0^{\pi n}|B\varphi| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^{\infty}|B\varphi|,\\
&\left|\int\limits_0^{\pi n} T_1 f\left(\frac{z}{n}\right) B\varphi(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_0^{\pi n}\frac{Kz}{n}|B\varphi(z)|\,dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
&\left|\int\limits_0^{\pi n} T_3 f\left(\frac{z}{n}\right) B\varphi(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_0^{\pi n}\frac{Kz}{n}\ln\left(1+\frac{1}{z/n}\right)|B\varphi(z)|\,dz \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Последние два интеграла стремятся к нулю по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Для оценки слагаемого с $\widetilde{f}$ применим неравенство Гельдера $(1/p+1/q=1)$:

$$\left|\int\limits_0^{\pi n} \sin\frac{z}{2n}\sqrt{\frac{\sin(z/n)}{z/n}}\widetilde{f}\left(\frac{z}{n}\right)B\varphi(z)\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n}\left(\int\limits_0^{\pi n}\left|f\left(\frac{z}{n}\right)\right|^p dz\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^{\pi n}|zB\varphi(z)|^q dz\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_p}{2}\left(\frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi n}|zB\varphi(z)|^q dz\right)^{1/q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{11}$$

снова по теореме Лебега.

На остальных промежутках $(M\pi n,(M+1)\pi n)$ в силу (5), (7)–(9) будет

$$\left|Wf\left(\frac{z}{n}\right)\right| \leqslant K\left(1+\frac{|\widetilde{g}(\alpha(z/n))|}{\sqrt{z/n}}\alpha\left(\frac{z}{n}\right)\right), \tag{12}$$

где $M\in\mathbb{N}$, $g=f$ при четном M и $g=f^*$ при нечетном M, а $\alpha(\zeta)$ – дробная часть ζ/π, умноженная на π. Имеем при $2<p<\infty$

$$\int\limits_{n\pi}^{\infty}\frac{|\widetilde{g}(\alpha(z/n))|}{\sqrt{z/n}}\alpha\left(\frac{z}{n}\right)|B\varphi(z)|\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{n\pi}^{\infty}\left|\widetilde{g}\left(\alpha\left(\frac{z}{n}\right)\right)\right|^p\frac{dz}{(z/n)^{p/2}}\right)^{1/p}\left(\int\limits_{n\pi}^{\infty}\left|\alpha\left(\frac{z}{n}\right)B\varphi(z)\right|^q dz\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int\limits_{\pi}^{\infty}|\widetilde{g}(\alpha(z))|^p\frac{dz}{z^{p/2}}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{n}\int\limits_{n\pi}^{\infty}\left|n\alpha\left(\frac{z}{n}\right)B\varphi(z)\right|^q dz\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant B_p\left(\pi\int\limits_{n\pi}^{\infty}z^{q-1}|B\varphi(z)|^q\,dz\right)^{1/q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{13}$$

так как

$$\left(\int_{\pi}^{\infty} |\widetilde{g}(\alpha(z))|^p \frac{dz}{z^{p/2}}\right)^{1/p} \leqslant A_p \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu\pi)^{p/2}}\right)^{1/p} = B_p.$$

Требование $2 < p < \infty$ (т.е. $1 < q < 2$) не ограничивает общности, так как если функция $z^{r-1}|B\varphi(z)|^r$ суммируема при $r = 1$ и при некотором $r = q > 1$, то она суммируема при всяком $r \in (1, q)$ в силу неравенства Гельдера

$$\int_0^{\infty} z^{r-1}|B\varphi(z)|^r\,dz = \int_0^{\infty} |B\varphi(z)|^{\frac{q-r}{q-1}} z^{r-1} |B\varphi(z)|^{\frac{qr-q}{q-1}}\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^{\infty} |B\varphi(z)|\,dz\right)^{\frac{q-r}{q-1}} \left(\int_0^{\infty} z^{q-1}|B\varphi(z)|^q\,dz\right)^{\frac{r-1}{q-1}}.$$

Сопоставляя соотношения (10)–(13), приходим к заключению теоремы.

Литература

1. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены.* М., 1962.
2. L. Fejér, *Über die Laplacesche Reihe.* — Math. Ann. **67** (1909), 76–109.
3. Г. И. Натансон, *О нормах сумм Фейера–Лежандра.* — Вестник Ленингр. ун-та, сер.1, вып.4 (22) (1996), 25–34.
4. G. Gasper, *Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel.* — Ann. Math. **95 (2)** (1972), 261–280.
5. R. Askey, S. Weinger, *A convolution structure for Jacobi series.* — Amer. J. Math. **91 (2)** (1969), 463–485.
6. Л. В. Флоринская, В. П. Хавин, *Теория меры и интеграла. Вып. 2. Интеграл.* Л., 1975.
7. Ахиезер Н.И., *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
8. П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко, *Интегральные уравнения.* М., 1968.

Vinogradov O. L. The limit of the Lebesgue constants of summation methods of Fourier–Legendre series determined by a multiplier function.

In what follows, $C[-1,1]$ is the space of continuous functions $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ with uniform norm, P_k are the Legendre polynomials

such that $P_k(1) = 1$, J_0 is the Bessel function of zero index. We consider sequences of linear operators (summation methods) $U_n : C[-1,1] \to C[-1,1]$ determined by a multiplier function φ:

$$U_n f(y) = \int_{-1}^{1} f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k/n)(k+1/2)P_k(y)P_k(x)\,dx.$$

The norms $\mathfrak{L}_n$ of the operators U_n are called the Lebesgue constants of the summation method. The main result is the following.

If φ is continuous on $[0,+\infty)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^2(k/n)(k+1/2) < \infty \quad \text{for each } n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{\infty} \varphi^2(x)x\,dx < \infty;$$

$$B\varphi(z) = z \int_0^{\infty} \varphi(x)xJ_0(zx)\,dx$$

is the Fourier–Bessel transformation of φ, and the function $z^{q-1}|B\varphi(z)|^q$ is summable on $[0,+\infty)$ with some $q > 1$, then

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n = \int_0^{\infty} |B\varphi|.$$

Санкт-Петербургский
государственный университет
olvin@math.spbu.ru

Поступило 6 января 1999 г.