Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

Т. С. Давыдова, Н. А. Широков

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА ГЕЛЬДЕРА НА ПОЛУОСИ

Классическая теорема Джексона–Бернштейна дает конструктивное описание класса Гельдера в терминах скорости равномерного приближения функций из этого класса тригонометрическими полиномами. Для подкласса ограниченных гельдеровских функций, определенных на всей оси, её аналогом является теорема С. Н. Бернштейна [1], гл. 4, в которой в качестве приближающихся агрегатов рассматривались целые функции экспоненциального типа, ограниченные на оси. Однако уже снятие условия априорной ограниченности функций побудило несколько изменить набор целых функций экспоненциального типа, с помощью которого удается конструктивно описать весь класс Гельдера на оси в терминах равномерных приближений [2]. В то же время, вопрос о конструктивном описании классов Гельдера аналитических функций в некоторых неограниченных областях заставил не только вводить новые шкалы целых функций, но, подобно ситуации приближения полиномами на компактах, прибегать к неравномерному приближению.

Целью настоящей статьи является утверждение о возможности приблизить любую функцию из класса Гельдера на полуоси некоторой целой функцией порядка $\frac{1}{2}$ из специально подобранного класса с такой скоростью, что удается, как в классической теореме Джексона–Бернштейна, доказать обратное утверждение; иными словами, мы излагаем "прямую" теорему "правильного" конструктивного описания класса Гельдера на полуоси.

1. Обозначения и формулировки

Λ_α, $0<\alpha<1$ – класс Гельдера порядка α на $[0,\infty)$;

$\|f\|_{\Lambda_\alpha}=|f(0)|+\sup\limits_{x\neq y}\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$;

преобразование $\omega=\sqrt{z}$ определено в $C\setminus[0,\infty)$ так, что $\sqrt{-1}\to i$;

L_h, $h>0$ – образ при отображении $z=\omega^2$ прямой $\operatorname{Im}\omega=h$;

Π_h – внутренность параболы L_h;

$\rho_h(x) = \operatorname{dist}(x; L_h)$, $h > 0$, $x \geqslant 0$;

$C_\sigma^{(\alpha)}$ – класс целых функций φ_σ порядка $1/2$ и типа σ, для которых выполнено соотношение

$$\|\varphi_\sigma\|_{C_\sigma^{(\alpha)}} = \sup_{z \in C\setminus[0,\infty)} \frac{|\varphi_\sigma(z)|}{\left(1 + |z|^\alpha + \dfrac{1}{\sigma^{2\alpha}}\right) \cdot e^{\sigma|\operatorname{Re} i\sqrt{z}|}} < \infty. \tag{1.1}$$

Теорема. *Пусть $f \in \Lambda_\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любого $\sigma > 0$ найдется функция $\varphi_\sigma \in C_\sigma^{(\alpha)}$ такая, что*

$$\|\varphi_\sigma\|_{C_\sigma^{(\alpha)}} \leqslant c_1 \|f\|_{\Lambda_\alpha} \tag{1.2}$$

и

$$|f(x) - \varphi_\sigma(x)| \leqslant c_2 \rho_{1/\sigma}^\alpha(x), \quad x \geqslant 0, \tag{1.3}$$

причем постоянные c_1 и c_2 не зависят от f или x.

2. Технические приготовления

При выводе окончательных формул мы можем, не умаляя общности, считать, что функция $f \in \Lambda_\alpha$ аналитична в узкой полуполосе, содержащей $[0,\infty)$ (наперед заданную произвольную функцию всегда можно сколь угодно хорошо приблизить такими аналитическими функциями, как сделано, например, в [2]), а также, что $\|f\|_{\Lambda_\alpha} \leqslant 1$. После ряда выкладок будет видно, что можно перейти к пределу по последовательности приближающих аналитических функций, получая ответ, в котором будут фигурировать только значения функции на $[0,\infty)$. Далее, $f \in \Lambda_\alpha$ влечет, что $|f(z)| \leqslant c(1 + |z|)^\alpha$. Возьмем некоторое число l, $l > 0$, точное значение которого определим ниже, и положим $f_1(z) = \dfrac{f(z)}{(z+l)^2}$.

Пусть, далее,

$$\xi_{h,t}(\zeta) = \left(\sqrt{\zeta} + ih + t\right)^2, \quad \xi_{h,0} = \xi_h(\zeta), \quad \zeta \in C \setminus [0,\infty);$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2n}; \quad q_\sigma(z) = \left(\frac{\sin \sigma_1 z}{z}\right)^{2n} \cdot b_\sigma,$$

где n (не зависящее от σ и z) выберем ниже, а b_σ – такое число, что $\int_{-\infty}^{\infty} q_\sigma(t)dt = 1$.

Пусть γ – контур вокруг полуоси $[0,\infty)$, достаточно близкий к ней. Определим для z, находящегося пока в полосе, функцию

$$g_{\sigma,0}(z)=g_\sigma(z)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma f_1(\zeta)d\zeta\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}q_\sigma(t)\frac{dt}{\xi_{h,t}(\zeta)-z},\quad \text{где}\quad h=\frac{1}{\sigma},$$

а также функцию

$$g_{\sigma,k}(z)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma f_1(\zeta)d\zeta\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}q_\sigma(t)\frac{(\xi_{h,t}-\zeta)^k}{(\xi_{h,t}-z)^{k+1}}\,dt,$$

и пусть $G_\sigma(z)=g_\sigma(z)+g_{\sigma,1}(z)+\cdots+g_{\sigma,p-1}(z)$.

Лемма 1. *Для $k=0,1,\ldots$, функции $g_{\sigma,k}(z)$ – целые.*

Доказательство. Прежде всего, обратим внимание на то, что функция $\xi_{h,t}(\zeta)$ – полином второй степени относительно t.

Рассмотрим теперь для примера функцию $g_\sigma=g_{\sigma,0}$, поскольку $g_{\sigma,k}$ рассматриваются аналогично. Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}k_\sigma(t)\frac{dt}{\xi_{h,t}(\zeta)-z}=\int\limits_{-\infty+iA}^{\infty+iA}k_\sigma(t)\cdot\frac{dt}{\xi_{h,t}(\zeta)-z}$$

и

$$g_\sigma(z)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\gamma f_1(\zeta)d\zeta\cdot\int\limits_{-\infty+iA}^{\infty+iA}k_\sigma(t)\cdot\frac{dt}{\xi_{h,t}(\zeta)-z}.$$

Если $t=iA+\tau$, то $\xi_{h,\tau+iA}(\zeta)=(\sqrt{\zeta}+i(h+A)+\tau)^2$, и при достаточно большом A всякое фиксированное z принадлежит параболе Π_{A+h}; поэтому $g_\sigma(z)$ аналитична внутри Π_{A+h} для любого A и $g_\sigma(z)$ – целая функция.

Лемма доказана.

3. Оценка функций $g_{\sigma,k}(-x)$ и $G_\sigma(-x)$

Учитывая утверждение о $\xi_{h,t}(\zeta)$, можно написать, выбирая $\lambda=\sqrt{x}+1/\sigma$:

$$g_{\sigma,k}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{-\infty+i\lambda}^{\infty+i\lambda} b_\sigma \frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}}{t^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\xi_{h,t-\zeta})^k}{(\xi_{h,t-z}-z)^{k+1}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{-\frac{1}{\sigma}+i\lambda}^{\frac{1}{\sigma}+i\lambda} b_\sigma \frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}}{t^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\xi_{h,t-\zeta})^k}{(\xi_{h,t-z}-z)^{k+1}}\,dt + \qquad (\mathrm{I}_{1,k})$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{-\infty+i\lambda}^{-\frac{1}{\sigma}+i\lambda} b_\sigma \frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}}{t^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\xi_{h,t-\zeta})^k}{(\xi_{h,t-z}-z)^{k+1}}\,dt + \qquad (\mathrm{I}_{2,k})$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{\frac{1}{\sigma}+i\lambda}^{\infty+i\lambda} b_\sigma \frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}}{t^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\xi_{h,t-\zeta})^k}{(\xi_{h,t-z}-z)^{k+1}}\,dt - \qquad (\mathrm{I}_{3,k})$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{-\infty+i\lambda}^{-\frac{1}{\sigma}+i\lambda} b_\sigma \frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}}{t^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\xi_{h,t-\zeta})^k}{(\xi_{h,t-z}-z)^{k+1}}\,dt - \qquad (\mathrm{I}_{4,k})$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma} f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{\frac{1}{\sigma}+i\lambda}^{\infty+i\lambda} b_\sigma \frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}}{t^{2n}}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\xi_{h,t-\zeta})^k}{(\xi_{h,t-z}-z)^{k+1}}\,dt. \qquad (\mathrm{I}_{5,k})$$

В интеграле $\mathrm{I}_{1,k}$ имеем:

$$(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n} = \int\limits_{i\lambda}^{t} \left((\sin\sigma_1 z)^{2n}\right)' dz =$$

$$= \int\limits_{i\lambda}^{t} 2n(\sin\sigma_1 z)^{2n-1}\sigma_1 \cdot \cos\sigma_1 z \cdot dz = \sigma \int\limits_{i\lambda}^{t} (\sin\sigma_1 z)^{2n-1} \cdot \cos\sigma_1 z \cdot dz.$$

Если $t = i\lambda + v$; $|v| \leqslant 1/\sigma$, то

$$(\sin\sigma_1 z)^{2n-1} \cdot \cos\sigma_1 z =$$

$$= \frac{1}{(2i)^{2n-1}} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{-i\sigma_1 z} - e^{i\sigma_1 z}\right)^{2n-1} \cdot \left(e^{-i\sigma_1 z} + e^{i\sigma_1 z}\right) =$$

$$= ce^{-2n\sigma_1 iz}\left(1 - e^{2i\sigma_1 z}\right)^{2n-1}\left(1 + e^{2i\sigma_1 z}\right) =$$

$$= ce^{\lambda\sigma} \cdot e^{\lambda iv}\left(1 - e^{2i\sigma_1 z}\right)^{2n-1}\left(1 + e^{2i\sigma_1 z}\right),$$

т.е. $\left|(\sin\sigma_1 z)^{2n-1} \cdot \cos\sigma_1 z\right| \leqslant ce^{\lambda\sigma}$, $z = i\lambda + v$; и поэтому

$$\left| \int\limits_{i\lambda}^{i\lambda+v} 2n(\sin\sigma_1 z)^{2n-1} \cdot \cos\sigma_1 z dz \right| \leqslant ce^{\lambda\sigma}|v|,$$

$$\left|(\sin\sigma_1 t)^{2n} - (\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}\right| \leqslant c\sigma|t - i\lambda|e^{\lambda\sigma}.$$

Теперь получим:

$$|\mathrm{I}_{1,k}| \leqslant c \int\limits_{\gamma} |f_1(\zeta)|\,|d\zeta| \cdot \int\limits_{-1/\sigma}^{1/\sigma} b_\sigma \cdot \frac{1}{|t + i\lambda|^{2n}} \cdot e^{i\lambda}\sigma|t| \cdot \frac{|\xi_{h,t} - \zeta|^k}{|\xi_{h,t} - z|^{k+1}}\,dt.$$

Осталось оценить выражение:

$$\left|\frac{(\xi_{h,t} - \zeta)^k}{(\xi_{h,t} - z)^{k+1}}\right| = \left|\frac{\xi_{h,t} - \zeta}{\xi_{h,t} - z}\right|^k \cdot \frac{1}{|\xi_{h,k} - z|}, \quad \zeta > 0, \quad z = -x. \qquad (2)$$

Прежде всего,

$$\frac{\xi_{h,t+i\lambda} - \zeta}{\xi_{h,t+i\lambda} + x} = \frac{\zeta + (t + i(h+\lambda))^2 + 2\sqrt{\zeta}(ih + i\lambda + t) - \zeta}{\zeta + (t + i(h+\lambda))^2 + 2\sqrt{\zeta}(ih + i\lambda + t) + x} =$$

$$= \frac{(t+i(h+\lambda))^2 + 2\sqrt{\zeta}(ih+i\lambda+t)}{\zeta+(t+i(h+\lambda))^2+x+2\sqrt{\zeta}(ih+i\lambda+t)}, \tag{3}$$

и, если: 1) $|t| \geqslant 2(h+\lambda)$, то $t^2-(h+\lambda)^2 \geqslant 0,75t^2$ и

$$|(3)| \leqslant c\frac{t^2+2|\sqrt{\zeta}|\,|t|+2|\sqrt{\zeta}|(h+\lambda)}{\zeta+0,75t^2+x-2|\sqrt{\zeta}|\,|t|} \leqslant$$

$$\leqslant c\frac{t^2+(\zeta+t^2)+2(\zeta+t^2)}{\zeta+0,75t^2+x-2|\sqrt{\zeta}|\,|t|}.$$

Так как

$$\zeta+\frac{3}{4}t^2+x-2|\sqrt{\zeta}|\,|t| = \left(\sqrt{\zeta}-|t|\right)^2-\frac{1}{4}t^2,$$

при $|\sqrt{\zeta}| \geqslant 2|t|$ получаем:

$$\zeta+\frac{3}{4}t^2+x-2|\sqrt{\zeta}|\,|t| \geqslant \left(|\sqrt{\zeta}|-\frac{1}{2}|\sqrt{\zeta}|\right)^2-\left(\frac{1}{4}|\sqrt{\zeta}|\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\zeta > \frac{1}{8}\zeta.$$

Имеем:

$$|(3)| \leqslant c\frac{\frac{3}{4}+\left(\zeta+\frac{3}{4}\right)+2\left(\zeta+\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{8}\zeta} = c_0. \tag{4}$$

И при $|\sqrt{\zeta}| \leqslant 2|t|$ имеем:

$$|(3)| \leqslant \frac{ct^2}{1/\sigma} = ct^2\sigma, \tag{5}$$

поскольку $|\zeta-z| \geqslant c_2\sigma^{-1}$ при $\zeta \geqslant -x$, $z \in L_{h+k}$.

Если же 2) $|t| < 2(h+\lambda)$, то

$$|(3)| \leqslant c\frac{5(h+\lambda)^2+2|\sqrt{\zeta}|\cdot 2(h+\lambda)}{\sqrt{(\zeta+t^2-(h+\lambda)^2+x+2\sqrt{\zeta}t)^2+(h+\lambda)^2(t+\sqrt{\zeta})^2}}. \tag{6}$$

При $|\sqrt{\zeta}| \geqslant 3(h+\lambda)$ имеем:

$$(6) \leqslant c_1\frac{\sqrt{\zeta}(h+\lambda)}{\sqrt{\zeta}(h+\lambda)} = c_1. \tag{7}$$

При $|\sqrt{\zeta}| < 3(h+\lambda)$ имеем:

$$(6) \leqslant c\frac{(h+\lambda)^2}{\frac{1}{\sigma}} = c_1\sigma(h+\lambda)^2. \tag{8}$$

Итак, соотношения (3)–(6) дают оценку:

$$\left|\frac{\xi_{h,t}-\zeta}{\xi_{h,t}+x}\right| \leqslant \begin{cases} c_0(1+t^2\sigma), & |t| \geqslant 2\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sigma}\right), \\ c_1\left(1+\sigma\left(x+\frac{1}{\sigma^2}\right)\right), & |t| < 2\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sigma}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Подставляя (9) в выражение $\mathrm{I}_{1,k}$ с учетом выбора $\lambda = \sqrt{x}+\frac{1}{\sigma}$, найдем (используя уже полученное неравенство (5)):

$$\left|\mathrm{I}_{1,k}\right| \leqslant \widetilde{c}_1 \int\limits_{\gamma} |f_1(\zeta)|\, |d\zeta| \left(1+\sigma\left(x+\frac{1}{\sigma^2}\right)\right)^k \times$$

$$\times \int\limits_{-1/\sigma+i\lambda}^{1/\sigma+i\lambda} b_\sigma \left|\frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n}-(\sin\sigma_1 i\lambda)^{2n}}{t^{2n}}\right| \cdot \frac{|dt|}{|\zeta_{h,t}-z|} \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{c}_2 e^{\sqrt{x}\sigma} \frac{1}{\frac{1}{\sigma}+\sqrt{x}} \cdot \left(1+\sigma x+\frac{1}{\sigma}\right)^k. \tag{10}$$

Для оценки интегралов $\mathrm{I}_{2,k}-\mathrm{I}_{5,k}$ используем оценки (6) и (7) и вторую оценку в (9). Тогда

$$\left|\mathrm{I}_{2,k}\right| \leqslant c e^{\sigma\lambda} \int\limits_0^\infty (1+\zeta)^{\alpha-2}\, d\zeta \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{-1/\sigma} b_\sigma \frac{\left(1+(\tau^2+\lambda^2)\sigma\right)^k}{(\lambda^2+\tau^2)^n} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\zeta}(h+\lambda)}, \tag{11}$$

поскольку при $1/\sigma \leqslant |t| \leqslant 2(\sqrt{x}+2/\sigma)$ неравенство (9) можно объединить так:

$$\left|\frac{\xi_{h,t}-\zeta}{\xi_{h,t}+x}\right| \leqslant c\left(1+\sigma(t^2+\lambda^2)\right).$$

Теперь воспользуемся тем, что $n > p$, положим $n = 2p-2$. Тогда при $k \leqslant p-1$ интеграл (11) даст оценку (10). Интегралы $\mathrm{I}_{3,k}-\mathrm{I}_{5,k}$ оценим аналогично, и тогда при $z=-x$, $k \leqslant p-1$ имеем:

$$|g_{\sigma,k}(z)| \leqslant c e^{\sqrt{x}\sigma} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sigma}+\sqrt{x}} \left(1+\sigma x+\frac{1}{\sigma}\right)^{p-1},$$

что влечет соотношение

$$|G_\sigma(z)| \leqslant ce^{\sqrt{x}\sigma} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sigma}+\sqrt{x}}\left(1+\sigma x+\frac{1}{\sigma}\right)^{p-1}. \tag{12}$$

4. Оценка функции $f_1(x) - G_\sigma(x)$ при $x > 0$

По формуле Коши

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - x}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \frac{(\sin\sigma_1 t)^{2n}}{t^{2n}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \left(\frac{\sin\sigma_1 t}{t}\right)^{2n}\frac{dt}{\zeta - x},$$

и затем

$$f_1(x) - G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \left(\frac{\sin\sigma_1 t}{t}\right)^{2n}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\zeta - x} - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{(\xi_{h,t}-\zeta)^k}{(\xi_{h,t}-x)^{k+1}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f_1(\zeta)d\zeta \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \left(\frac{\sin\sigma_1 t}{t}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{\xi_{h,t}-\zeta}{\xi_{h,t}-x}\right)^p\frac{dt}{\zeta - x}.$$

Далее:

$$f_1(x) - G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)-f(x)}{(\zeta+l)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \left(\frac{\sin\sigma_1 t}{t}\right)^{2n}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi_{h,t}-\zeta}{\xi_{h,t}-x}\right)^p\frac{dt}{\zeta - x} + f(x)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta+l)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \left(\frac{\sin\sigma_1 t}{t}\right)^{2n}\times$$

$$\times\left(\frac{\xi_{h,t}-\zeta}{\xi_{h,t}-x}\right)^p\frac{dt}{\zeta - x} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2.$$

Лемма 2. *Если* $n = 2p + 2$, *то*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \left(\frac{\sin \sigma_1 t}{t}\right)^{2n} \left|\frac{\xi_{h,t} - \zeta}{\xi_{h,t} - x}\right|^p dt \leqslant c \left|\frac{\xi_{h,0} - \zeta}{\xi_{h,0} - x}\right|^p. \qquad (13)$$

Доказательство соотношения (13) проводится подобно соответствующим частям рассуждений при действиях с приближениями полиномами (см. [3]), в силу чего мы его опустим.

Оценим $\mathfrak{I}_1$:

$$|\mathfrak{I}_1| \leqslant c \int\limits_{\gamma} \left|\frac{f(\zeta) - f(x)}{(\zeta - x)(\zeta + l)^2}\right| \left|\frac{\xi_{h,0} - \zeta}{\xi_{h,0} - x}\right| |d\zeta| =$$

$$= c \int\limits_{\{|\zeta - x| < \rho_h(x)\} \cap \gamma} \left|\frac{f(\zeta) - f(x)}{(\zeta - x)(\zeta + l)^2}\right| |d\zeta| +$$

$$+ c \int\limits_{\gamma \setminus \{|\zeta - x| < \rho_h(x)\}} \left|\frac{f(\zeta) - f(x)}{(\zeta - x)(\zeta + l)^2}\right| \left|\frac{\xi_h - \zeta}{\xi_h - x}\right| |d\zeta| = \mathfrak{I}_{11} + \mathfrak{I}_{12}.$$

Оценки $\mathfrak{I}_{11}$ и $\mathfrak{I}_{12}$ дают одинаковые по порядку результаты.

Рассмотрим $\mathfrak{I}_{11}$.

Случай 1. $x > 2\rho_h(x)$. Тогда при $|\zeta - x| \geqslant \rho_h(x)$ будет $\zeta \geqslant x/2$. В силу соотношения $\rho_h(x) \asymp h(h + \sqrt{x})$ имеем $h \leqslant c\sqrt{x}$, и

$$\mathfrak{I}_{11} \leqslant c \int\limits_{\{|\zeta - x| < \rho_h(x)\} \cap \gamma} |\zeta - x|^{\alpha - 1} \frac{1}{(x + l)^2}\, d\zeta \leqslant c \rho_h^\alpha(x) \cdot \frac{1}{(x + l)^2}. \qquad (14)$$

Отметим, что выбор l еще в нашем распоряжении, поскольку все предшествующие оценки проходят при любом $l > 0$.

Случай 2. $x \leqslant 2\rho_h(x)$, т.е. $h > c\sqrt{x}$; $x \leqslant c_1 h^2$. Выберем именно теперь l, пусть $l = h^2$. Тогда

$$\mathfrak{I}_{12} \leqslant c \frac{1}{l^2} \int\limits_{0 < \zeta < 2\rho_h(x)} |\zeta - x|^{\alpha - 1}\, d\zeta \leqslant c \frac{1}{h^4 \rho_h^\alpha(x)}. \qquad (15)$$

В итоге получена оценка

$$\mathfrak{I}_{11} \leqslant c \frac{1}{(x + h^2)^2} \rho_h^\alpha(x), \quad x \geqslant 0. \qquad (16)$$

Такая же оценка получается и для $\mathfrak{I}_{12}$.

Что касается интеграла $\mathfrak{I}_2$, то пусть путь γ_0 состоит из отрезка $\{x = -l_1; |y| \leqslant l_1\}$ и лучей $\{x \geqslant -l_1; y = l_1\}$; $\{x \geqslant -l_1; y = -l_1\}$, $l_1 \to +\infty$. Тогда

$$\mathfrak{I}_2 =$$
$$= f_1(x) \int\limits_{\gamma_0} \frac{d\zeta}{(\zeta + h^2)^2(\zeta - x)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_\sigma \left(\frac{\sin \sigma_1 t}{t}\right)^{2n} \left(\frac{\xi_{h,t} - \zeta}{\xi_{h,t} - x}\right)^p dt. \quad (17)$$

В силу аналитичности подинтегральной функции по ζ и с помощью леммы 2 можно проверить, что интеграл в формуле (17) стремится к нулю при $l_1 \to +\infty$, т.е. $\mathfrak{I}_2 = 0$, и оказывается, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{(x + h^2)^2} - G_\sigma(x)\right| \leqslant c \frac{\rho_h^\alpha(x)}{(x + h^2)^2}, \quad (18)$$

откуда

$$|G_\sigma(x)| \leqslant c \frac{\rho_h^\alpha(x)}{(x + h^2)^2} + \frac{f(x)}{(x + h^2)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{(x + h^2)^2} \left(|f(0)| + x^\alpha + \rho_h^\alpha(x)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{(x + h^2)^2} \left(|f(0)| + x^\alpha + \frac{1}{\sigma^{2\alpha}}\right). \quad (19)$$

Следующее утверждение является аналогом леммы П. М. Тамразова [4, гл. 2] для целых функций, применяемых в рассужениях, и доказывается по схеме доказательства упомянутой леммы.

Лемма 3. *Пусть $G_\sigma(z)$ – целая функция порядка $1/2$, удовлетворяющая условиям:*

$$|G_\sigma(-x)| \leqslant c_1 \, e^{\sigma \sqrt{x}} \left(A x^M + B\right), \quad x > 0, \quad A, B, M > 0;$$
$$|G_\sigma(x)| \leqslant \frac{c_2}{\left(x + \frac{1}{\sigma^2}\right)^2} \left(|f(0)| + x^\alpha + \frac{1}{\sigma^{2\alpha}}\right), \quad x \geqslant 0.$$

Тогда справедливо соотношение:

$$G_\sigma(x) \leqslant c_3 \frac{e^{\sigma |\operatorname{Im} \sqrt{z}|}}{\left(|z| + \frac{1}{\sigma^2}\right)^2} \left(|f(0)| + |z|^\alpha + \frac{1}{\sigma^{2\alpha}}\right).$$

Теперь применим лемму 3 к соотношениям (12) и (19). Получим, что требуемая функция G_σ заведомо принадлежит требуемому классу $C_\sigma^{(\alpha)}$. Для

$$\widetilde{G}_\sigma(z) = (z+h^2)^2 G_\sigma(z) = \left(z + \frac{1}{\sigma^2}\right)^2 G_\sigma(x)$$

имеем:

$$|\widetilde{G}_\sigma(z)| \leqslant c e^{\sigma|\operatorname{Im}\sqrt{z}|}\left(|f(0)| + |z|^\alpha + \frac{1}{\sigma^{2\alpha}}\right),$$

т.е. $\widetilde{G}_\sigma(z) \in C_\sigma^{(\alpha)}$.

Наконец, умножая (17) на $(x+h^2)^2$, $h = 1/\sigma$, имеем:

$$\left|f(x) - \widetilde{G}_\sigma(x)\right| \leqslant c\rho_{1/\sigma}^\alpha(x), \quad x \geqslant 0.$$

Поскольку функция $\widetilde{G}_\sigma$ обладает требуемыми свойствами (1.1) и (1.3), теорема доказана.

Литература

1. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* Наука, М. 1965.
2. Т. С. Давыдова, Н. А. Широков, *Аналог теоремы С. Н. Бернштейна для функций, неограниченных на оси.* — Пробл. мат. анализа **18** (1998), 70–77.
3. В. И. Белый, *Конформные отображения и аппроксимация функций в областях с квазиконформной границей.* — Мат. сб. **102,** No. 03 (1977), 331–361.
4. П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения.* Наукова думка, Киев 1975.

Davydova T. S., Shirokov N. A. Approximation of functions belonging to the Hölder class on a half-axis.

The Hölder class Λ_α $(0 < \alpha < 1)$ on the half-axis $[0, \infty)$ is described in terms of the rate of approximation by entire functions of order 1/2 that belong to a special class.

Российский
государственный
педагогический
университет
им. А. И. Герцена

С.-Петербургский
государственный
электротехнический
университет

Поступило 5 апреля 1999 г.