Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

В. В. Капустин

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

Введение

Пусть $w \in L^1$ – вес на единичной окружности, $w \geqslant 0$ п.в., $\log w \in L^1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Рассмотрим пространство $L^p(wdm)$, где m — нормированная мера Лебега на окружности. Определим внешнюю функцию $\varphi \in H^p$ соотношением $|\varphi|^p = w$. Тогда замкнутая линейная оболочка множества $\{z^n\}_{n\geqslant 0}$ совпадает с H^p/φ (т.е. с $\{f/\varphi : f \in H^p\}$), а замкнутая линейная оболочка множества $\{\bar{z}^n\}_{n\leqslant 0}$ совпадает с $\overline{H^p}/\bar{\varphi}$. Положим $I_w = \frac{H^p}{\varphi} \cap \frac{\overline{H^p}}{\bar{\varphi}}$. Ясно, что все постоянные функции принадлежат I_w. В этой статье будет обсуждаться вопрос, *когда I_w не содержит никаких функций, кроме постоянных.*

Хорошо известно, что существование ограниченного проектора на H^p/φ вдоль $\overline{zH^p}/\bar{\varphi}$ равносильно условию Макенхаупта A_p. Очевидно, это условие достаточно, но не необходимо для того, чтобы эти два пространства имели нулевое пересечение. Это последнее свойство равносильно нашему вопросу о том, когда пространство I_w состоит только из постоянных функций.

Заметим, что при $p = 2$ наша задача равносильна известной проблеме описания выступающих точек единичного шара H^1. На самом деле, в случае $||w||_{L^1} = 1$, I_w не содержит непостоянных функций тогда и только тогда, когда φ^2 — выступающая точка единичного шара в H^1.

В этой статье мы намерены показать, что обсуждаемое свойство имеет локальный характер, т.е. его выполнение зависит от локального поведения веса w в каждой точке окружности. Также будет получено некоторое необходимое и достаточное условие в терминах интегралов Коши.

Если $f \in I_w$, то ясно, что $\bar{f} \in I_w$, и значит $\mathrm{Re}\, f \in I_\omega$, $\mathrm{Im}\, f \in I_w$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 98-01-00312 и ФЦП "Интеграция", рег. No. 326.53.

Это означает, что если пространство I_w содержит непостоянные функции, то оно содержит некоторую непостоянную вещественную функцию.

Лемма 1. *I_w содержит некоторую непостоянную функцию тогда и только тогда, когда существует функция $\psi \in H^\infty$ такая, что $\varphi/\psi \in H^p$, $\theta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi/\bar\psi \in H^\infty$. В этом случае $\frac{1-\theta}{\psi} \in I_w$.*

В связи с задачей об описании выступающих точек в H^1 Хельсон и Сарасон получили критерий, требующий существования двух внутренних функций u и v таких, что $u-v$ является "делителем" некоторой функции. Наша лемма представляет собой модификацию этого результата, и мы приведем доказательство для нашей ситуации. Отметим, что для $\psi = u - v$ имеем $\psi/\bar\psi = -uv \in H^\infty$.

Доказательство. Допустим, что φ – внешняя функция, и I_w содержит некоторую непостоянную функцию. Нам нужно показать, что существуют две внутренние функции u и v такие, что $\frac{\varphi}{u-v} \in H^p$. Возьмем любую непостоянную вещественную функцию $f \in I_w$. Тогда $\frac{f+i}{f-i}$ – унимодулярная функция ограниченной характеристики, что означает, что она может быть представлена как отношение двух ограниченных аналитических функций. Следовательно, существуют взаимно простые внутренние функции u и v такие, что $\frac{f+i}{f-i} = \frac{u}{v}$. Отсюда следует, что $f = i\frac{u+v}{u-v}$. Поскольку $f \in H^p/\varphi$, φ – внешняя функция, и функции u и v взаимно простые, легко получаем, что $u - v$ – внешняя функция; тем самым, нам достаточно показать, что $\frac{\varphi}{u-v} \in L^p$. Пусть $f = ig/\varphi$, где $g \in H^p$. Функции $u+v$ и $u-v$ не могут быть малыми одновременно (их сумма $2u$ имеет модуль 2 почти всюду на окружности). Значит, так как $\varphi, g \in L^p$, в соотношении $\frac{\varphi}{u-v} = \frac{g}{u+v}$ знаменатели не могут быть одновременно малы и в левой, и в правой части, откуда немедленно следует, что $\frac{\varphi}{u-v} \in L^p$.

Если существует функция ψ с требуемыми свойствами, то очевидно, что $\frac{1-\theta}{\psi} \in I_w$. Лемма доказана.

Замечание 2. Функция ψ в лемме 1 может быть выбрана так, что $\theta(0) = 0$. Действительно, если построена функция ψ_*, для которой $\varphi/\psi_* \in H^p$, $\theta_* = \psi_*/\bar\psi_* \in H^\infty$, то можно взять $\psi = \psi_*/(1 - \overline{\theta_*(0)}\theta_*)$. Поскольку $1 - \overline{\theta_*(0)}\theta_*$ – обратимая функция в H^∞, имеем $\psi \in H^p$;

кроме того, $\varphi/\psi \in H^p$, и для $\theta = \frac{\psi}{\bar\psi} = \frac{\theta_* - \theta_*(0)}{1-\overline{\theta_*(0)}\theta_*}$ имеем $\theta(0) = 0$. В дальнейшем мы будем пользоваться возможностью строить функции так, чтобы дополнительно было выполнено условие $\theta(0) = 0$.

Локализация

Как мы увидим в этом параграфе, наличие или отсутствие в пространстве I_w непостоянных функций определяется локальным поведением веса w в каждой точке единичной окружности. Этот результат установлен в теореме 4.

Для любой функции f из I_w естественным образом определены значения $f(z)$ соответственно представлению f как функции из класса $\frac{H^p}{\varphi}$ при $|z| < 1$, и как функции из класса $\frac{\overline{H^p}}{\bar\varphi}$ при $|z| > 1$. Следовательно, можно рассматривать f как функцию, аналитическую вне единичной окружности, граничные значения которой изнутри и извне совпадают почти всюду (т.е. имеет место эффект псевдопродолжения).

Приведем равносильную переформулировку нашей задачи. Как было упомянуто вначале, I_w содержит непостоянные функции тогда и только тогда, когда пересечение

$$J_w = \frac{H^p}{\varphi} \cap \frac{\overline{zH^p}}{\bar\varphi}$$

ненулевое. Действительно, J_w – подпространство в I_w коразмерности 1, и множество постоянных функций есть дополнительное подпространство подпространства I_w (константа в соответствующем разложении для функций из I_w равна пределу на бесконечности). Удобнее работать с пространством J_w вместо I_w, что сразу же даст соответствующие переформулировки и для пространства I_w.

Результат этого параграфа основан на конструкции некоторого оператора, связанного с весом w. Для $f \in J_w$ имеем $f(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Определим оператор T_w на J_w соотношением

$$(T_w f)(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Имеем следующие формулы для резольвент оператора T_w:

$$(I - \lambda T_w)^{-1} f(z) = \frac{zf(z) - \lambda f(\lambda)}{z - \lambda}. \tag{1}$$

В предельном случае $\lambda \to \infty$ получаем, что T_w – обратимый оператор: обратный оператор задается формулой

$$T_w^{-1} f(z) = zf(z) - (zf)_\infty, \quad \text{где} \quad (zf)_\infty = \lim_{z\to\infty} zf(z).$$

Пусть h – вектор такой, что $(f,h) = (zf)_\infty$ для всех f. Если $I - \lambda T_w$ – обратимый оператор, то для всех f имеем

$$f(\lambda) = -(T_w(I - \lambda T_w)^{-1} f, h) = ((\lambda I - T_w^{-1})^{-1} f, h). \tag{2}$$

Поскольку граничные значения функций из J_w извне и изнутри единичного круга совпадают, может случиться так, что f окажется аналитической функцией в некоторых точках единичной окружности. Рассмотрим пересечение множеств таких точек для всех функций из J_w. *Его дополнение совпадает со спектром оператора T_w^{-1} и будет обозначаться через σ_w.* Действительно, если $T_w^{-1} - \lambda I$ – обратимый оператор, то каждая функция $f \in J_w$ аналитична в λ по формуле (2). Если все функции из J_w аналитичны в λ, то резольвента задается формулой (1).

Теорема 3. *Для любой открытой дуги A, содержащей некоторую точку ξ множества σ_w, существует функция из J_w, множество особенностей которой содержит точку ξ и содержится в A.*

Набросок доказательства. Доказательство этого утверждения основано на существовании спектральных проекторов оператора T_w. Этот оператор действует изометрически на подпространстве коразмерности 1, а именно, на подпространстве, состоящем из функций f, для которых $f(0) = 0$. Спектр оператора T_w не покрывает единичного круга; значит, T_w является одномерным возмущением унитарного оператора (при $p = 2$). Теперь существование спектральных проекторов может быть получено из результатов книги [1]. Конструкция спектральных проекторов, основанная на функциональном исчислении для некоторых классов несжимающих операторов, близких к унитарным, имеется в [2], §3.2, где доказано, что ограниченные спектральные проекторы существуют для дуг единичной окружности, концы которых не принадлежат некоторому множеству нулевой меры Лебега. Аналогичный факт верен для всех p; мы опускаем подробности.

Возьмем дугу A_0 так, чтобы ее замыкание лежало в A, $\xi \in A_0$, и спектральный проектор $\mathcal{P}_{A_0}$, соответствующий дуге A_0 для оператора T_w^{-1}, был бы ограничен. Поскольку проектор – спектральный, из формулы (2) следует, что функции из его образа аналитичны вне A_0. Так как все функции из образа дополнительного проектора $I-\mathcal{P}_{A_0}$ аналитичны на A_0, заключаем, что образ проектора ненулевой и содержит функции, имеющие особенность в точке ξ.

Теорема 3 показывает, что особенности функций из J_w могут быть локализованы. Это означает, что ответ на вопрос о том, верно ли, что $J_w = \{0\}$, зависит от локальных свойств веса w.

При $p=2$ имеем следующую теорему.

Теорема 4. 1) *Множество σ_w пустое тогда и только тогда, когда $J_w = \{0\}$. (Напомним, что последнее свойство равносильно тому, что внешняя функция с модулем w является выступающей точкой единичного шара H^1, если $||w||_{L^1} = 1$).*

2) *Утверждение о том, что точка ξ единичной окружности принадлежит множеству σ_w, зависит только от локального поведения веса w в этой точке. Точнее, если два веса w_1 и w_2 совпадают в окрестности точки ξ, то либо ξ принадлежит обоим множествам σ_{w_1} и σ_{w_2}, либо не принадлежит ни одному из них.*

Вопрос о том, как выразить в явной форме локальные свойства веса w, чтобы обеспечить принадлежность точки ξ множеству σ_w, остается открытым, и его решение дало бы описание выступающих точек единичного шара H^1 в терминах локального поведения их модулей.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно: спектр оператора является пустым множеством тогда и только тогда, когда пространство, где оператор действует, – нулевое; как мы отмечали выше, σ_w является спектром оператора T_w^{-1}, действующем в пространстве J_w.

Второе утверждение следует из теоремы 3. Допустим, что ξ принадлежит множеству σ_{w_1}. По теореме 3 можно выбрать функцию $f \in J_{w_1}$, аналитическую вне произвольно малой дуги, содержащей ξ, и имеющею особенность в ξ. Возьмем такую дугу, чтобы ее замыкание лежало внутри открытой дуги, на которой веса w_1 и w_2 совпадают. Легко проверить, что тогда $f \in J_{w_2}$.

Гипотеза Сарасона

В [3] Сарасон выдвинул *предположение*, что внешняя функция $\gamma \in H^1$ является выступающей точкой единичного шара H^1

тогда и только тогда, когда ее норма равна 1, и существует внутренняя функция θ такая, что $\frac{\gamma}{(1-\theta)^2} \in H^1$, или, что равносильно, $\frac{\varphi}{1-\theta} \in H^2$, где φ – внешняя функция, для которой $\varphi^2 = \gamma$. В терминах веса $w = |\varphi|^2 = |\gamma|$ это означает, что (вещественная) функция $i\frac{1+\theta}{1-\theta}$ принадлежит I_w. Без потери общности можно полагать, что $\theta(0) = 0$, и в этом случае существует положительная вероятностная мера μ на единичной окружности, сингулярная относительно меры Лебега и такая, что

$$\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta). \tag{3}$$

Таким образом, предположение Сарасона можно переформулировать в терминах нашего подхода при $p = 2$: если I_w содержит некоторую непостоянную функцию, то [Сарасон предполагал, что] такая функция может быть выбрана в виде $\int \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta)$.

В [4] Иноуе *опроверг* это предположение. Мы приведем конструкцию, обобщающую его пример.

Отметим, что если вес w отделен от нуля (и даже если обратная функция w^{-1} суммируема) на некоторой дуге A, то функции из I_w аналитичны на A (и имеют аналитическое продолжение внутрь и вне круга, определяемые представлениями функций из I_w как функций из классов $\frac{H^p}{\varphi}$ и $\frac{\overline{H^p}}{\bar{\varphi}}$, соответственно). Действительно, согласно теореме 3, если существует функция из I_w, имеющая особенность внутри A, то можно найти функцию $f \in I_w$, особенности которой сосредоточены на A. Так как функция w^{-1} суммируема на A и $f \in I_w$, получаем, что функции $fw^{1/2}$ и $w^{-1/2}$ квадратично суммируемы на A; значит их произведение f – суммируемая функция, что означает, что f – постоянная.

Мы построим вес w отделенный от нуля на любой открытой дуге, не содержащей точки 1, но такой, что I_w будет содержать некоторую непостоянную функцию. Тогда, если бы предположение Сарасона было верно, можно бы было выбрать сингулярную положительную меру, для которой функция (3) принадлежала бы I_w. Эта функция должна быть аналитична в комплексной плоскости за исключением точки 1; значит, мера μ должна быть сосредоточена в точке 1, и таким образом функция $\frac{1+z}{1-z}$ должна принадлежать I_w.

Удобно сделать конформное преобразование единичного круга на верхнюю полуплоскость, $z = \frac{x-i}{x+i}$, чтобы работать с целыми функциями. Если z – точка единичной окружности, то x – вещественное число, и $x = \infty$ соответствует $z = 1$.

Возьмем целую функцию f на комплексной плоскости, вещественную на вещественной оси: $f(\xi) = \prod(1 - \frac{\xi}{a_k})$, где произведение бесконечно, и числа a_k вещественные и достаточно редкие; например, $a_k = k^2$. Существует вес v на вещественной оси такой, что

(1) функция $\frac{\log v(x)}{1+x^2}$ суммируема на вещественной оси;
(2) вес v отделен от нуля на любом конечном интервале;
(3) $f \in L^2(v)$;
(4) $\frac{1}{x+i} \in L^2(v)$;
(5) постоянные функции не принадлежит $L^2(v)$.

Если вес v построен, возьмем вес w на единичной окружности такой, что мера $\frac{v(x)}{1+x^2}dx$ является конформной пересадкой меры на окружности, определяемой весом w. Перепишем свойства (1)–(5) выше в терминах веса w. Свойства (1) и (4) необходимы для выполнения предположений $\log w \in L^1$ и $w \in L^1$. Свойство (3) обеспечивает то, что I_w содержит некоторую непостоянную функцию. Свойство (5) означает, что $\frac{1+z}{1-z}$ не принадлежит I_w, однако это было бы не так по свойству (2), если бы предположение Сарасона было верно; полученное противоречие показывает, что оно неверно.

Наконец, покажем, как построить такой вес v. Принимая во внимание то, что функция $\frac{\log f(x)}{1+x^2}$ суммируема на вещественной оси, легко построить вес, удовлетворяющий свойствам (1)–(3). Для того, чтобы получить вес, обладающий всеми свойствами (1)–(5), исправим построенный вес на множестве $\mathcal{E} = \{x : |f(x)| < 1\}$. Функция j, $j(x) = \max(|f(x)|, \frac{1}{|x+i|})$, не отделена от нуля на $\mathcal{E}$; следовательно вес v может быть исправлен на множестве $\mathcal{E}$ так, чтобы $j \in L^2(v)$ но постоянные функции не принадлежали бы $L^2(v)$. Это и означает, что свойства (4) и (5) выполнены; ясно, что это исправление может быть осуществлено без потери свойств (1)–(3).

Интегралы Герглотца

Основной результат этого параграфа следующий:

Теорема 5. *Если I_w содержит непостоянные функции, то существует ненулевой конечный вещественный заряд ν (т.е. ν мож-*

но представить как разность двух конечных положительных мер), сингулярный относительно меры Лебега и такой, что

$$\left(\int \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\nu(\zeta)\right)^{-1} \in I_w.$$

Функция в этой формуле является функцией ограниченной характеристики в единичном круге, и таким образом граничная функция корректно определена. Так как заряд ν – сингулярный, граничные значения извне и изнутри единичного круга совпадают. В теореме утверждается, что граничная функция – элемент пространства I_w.

Отметим еще раз, что в предыдущем параграфе было показано, что вообще говоря, заряд ν не может быть выбран положительным.

Доказательство. В силу леммы 1 и замечания 2 достаточно показать, что если $\psi \in H^\infty$, $\psi(0)$ – вещественное число, $\theta = \psi/\bar{\psi} \in H^\infty$, $\theta(0) = 0$, то функцию $\frac{\psi}{1-\theta}$ можно представить в виде $\int \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\nu(\zeta)$.

Пусть μ – сингулярная вероятностная мера на окружности, определенная соотношением (3). Введем пространство $K_\theta^\infty = \{h \in H^\infty : \theta\bar{h} \in zH^\infty\}$.

В [5] доказано, что функции из некоторых классов, в том числе и из K_θ^∞, имеют некасательные граничные значения μ-почти всюду (п.в.), и каждая функция $h \in K_\theta^\infty$ может быть восстановлена по ее граничным значениям $h(\zeta)$ с помощью следующей формулы:

$$h(z) = (1-\theta(z))\left(\int \frac{h(\zeta)\zeta\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z}\right), \quad |z| < 1. \tag{4}$$

Функция $h = \psi + \psi(0)(1-\theta)$ принадлежит K_θ^∞. Так как $\theta = 1$ μ-п.в. и $\psi/\bar{\psi} = \theta$, получаем, что функция ψ вещественна μ-п.в. Определим ν, $d\nu = \frac{\psi\, d\mu}{2}$. Тогда формулу (4) можно переписать в виде

$$\psi(z) + \psi(0)(1-\theta(z)) = (1-\theta(z)) \int \frac{2\zeta\, d\nu(\zeta)}{\zeta - z},$$

откуда

$$\frac{\psi(z)}{1-\theta(z)} = \int \frac{2\zeta\, d\nu(\zeta)}{\zeta - z} - \psi(0).$$

Подставляя $z = 0$, получаем $\psi(0) = \int d\nu$, и следовательно

$$\frac{\psi(z)}{1-\theta(z)} = \int \left(\frac{2\zeta}{\zeta - z} - 1\right) d\nu(\zeta) = \int \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\nu(\zeta).$$

Теорема доказана.

Интересно сравнить эту теорему с теоремой Полторацкого [6]. В [6] доказано, что для каждого натурального числа n существует внешняя функция $\varphi = \varphi_n \in H^2$ такая, что соответствующее пространство I_w содержит некоторое произведение n функций вида (3) (с положительными мерами μ_k), но никакое произведение $n-1$ функций такого вида не принадлежит I_w.

Литература

1. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы.* М., Мир, 1974.
2. В. В. Капустин, *Функциональное исчисление для почти изометрических операторв.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **217** (1994), 59–73.
3. D. Sarason, *Exposed points in H^1, 1.* Operator Theory. Adv. and Appl., **41** (1989), 485–496.
4. J. Inoue, *An example of a non-exposed extremal function in the unit ball of H^1.* Proc. Edinburg Math. Soc., **37** (1993), 47–51.
5. А. Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций.* — Алгебра и Анализ **5**, № 2 (1993), 189–210.
6. A. G. Poltoratskii, *Properties of exposed points in the unit ball of H^1.* Preprint.

Kapustin V. V. Real functions in weighted Hardy spaces.

The problem is discussed of describing the weights w on the unit circle for which the analytic and antianalytic subspaces of the corresponding weighted space $L^p(w)$ have nonzero intersection. In the special case of $p = 2$ the problem is equivalent to a well-know problem about the exposed points in H^1. We show that the property in question is local, i.e., it depends on the local behavior of the weight w at each point of the unit circle, and we obtain some necessary and sufficient condition in terms of Herglotz integrals.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 16 сентября 1998 г.