Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

И. С. Кац

ВКЛЮЧЕНИЕ СТЕПЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ ГАМБУРГЕРА В СПЕКТРАЛЬНУЮ ТЕОРИЮ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В 1952 г. М. Г. Крейн [1] заметил, что степенная проблема моментов Стилтьеса является задачей отыскания всех имеющих неотрицательный спектр спектральных функций струны особого класса. Такие струны он назвал стилтьесовскими. Более того, тем самым он первым получил описание всех решений этой проблемы моментов (см. также [2], §13). Цель настоящей работы – показать, что степенная проблема моментов Гамбургера – это задача отыскания всех спектральных функций граничной задачи для канонической системы дифференциальных уравнений с гамильтонианом особого класса. Подражая М. Г. Крейну, гамильтонианы этого класса будем называть гамбургеровскими.

Автор вынужден в настоящей работе изложить некоторые хорошо известные факты классической теории степенной проблемы моментов Гамбургера и менее известные факты спектральной теории канонических систем. Это облегчит понимание статьи. Все ранее известные результаты этих теорий будем называть Предложениями.

§1. Необходимые сведения классической теории степенной проблемы моментов Гамбургера (СПМГ)*

1. Пусть $\{s_n\}_0^\infty$ – заданная последовательность вещественных чисел. СПМГ состоит в отыскании такой неубывающей функции σ, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n d\sigma(\lambda) = s_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.1}$$

*Все изложенные здесь сведения взяты, в основном, из монографии [3] и несколько модифицированы.

Во избежание естественной неоднозначности мы будем рассматривать только нормированные неубывающие функции, т.е. такие, что

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}(\sigma(\lambda - 0) + \sigma(\lambda + 0)) \ \forall\lambda \in \mathbb{R},\ \sigma(0) = 0,$$

иногда напоминая об этом.

2. Пусть дана последовательность $\{s_n\}_0^\infty$ вещественных чисел. На множестве всех полиномов определим линейный функционал S равенством

$$S\{R(z)\} = p_0 s_0 + p_1 s_1 + \ldots + p_n s_n, \tag{1.2}$$

если

$$R(z) = p_0 + p_1 z + \ldots + p_n z^n.$$

Кстати, теперь СПМГ равносильна задаче отыскания неубывающей функции σ такой, что для любого полинома $R(z)$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(\lambda) d\sigma(\lambda) = S\{R(z)\}.$$

Определение 1.1. *Функционал S называется позитивным, если*

$$(R(\lambda) \geqslant 0 \ \ \forall\lambda \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (S\{R(z)\} \geqslant 0),$$

а в том частном случае, когда существует такой полином R, что $R(z) \not\equiv 0$, $R(\lambda) \geqslant 0$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, но $S\{R(z)\} = 0$, он называется вырожденно позитивным. В противном случае он называется строго позитивным. Эту терминологию мы распространяем на $\{s_n\}_0^\infty$ и на СПМГ (1.1).*

Предложение 1.1. *СПМГ* (1.1) *разрешима в том и только в том случае, когда последовательность $\{s_n\}_0^\infty$ позитивна. Все решения этой СПМГ имеют бесконечное множество точек роста в том и только в том случае, когда эта последовательность строго позитивна. Если последовательность $\{s_n\}_0^\infty$ вырожденно позитивна,*

*В [3] строго позитивная последовательность называется позитивной.

то СПМГ (1.1) *имеет единственное решение (и множество точек роста этого решения конечно).*

Положим

$$D_{-1} = 1, \quad D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.3}$$

Предложение 1.2. *Последовательность* $\{s_n\}_0^\infty$ *позитивна в том и только в том случае, когда* $D_n \geqslant 0$ *при* $n = 0, 1, 2, \dots$. *Она строго позитивна в том и только в том случае, если* $D_n > 0$ *при* $n = 0, 1, 2, \dots$.

Ниже *мы будем рассматривать только строго позитивный случай* ($D_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$). Так как в этом случае $s_0 > 0$ и строго позитивной является последовательность $\{\theta s_n\}_0^\infty$ с $\theta > 0$, то мы *будем считать в дальнейшем*, не нарушая общности, *что* $s_0 = 1$.

3. В классической теории СПМГ важную роль играют последовательности полиномов $\{P_n(z)\}_0^\infty$ и $\{Q_n(z)\}_0^\infty$. Первая из них определяется следующими двумя свойствами:

1^0. $P_n(z)$ – это полином n-ой степени с положительным старшим коэффициентом.

2^0. Полиномы $P_n(z)$ ортонормированы в том смысле, что $S\{P_m(z)P_n(z)\} = \delta_{mn}$ для любых $m, n = 0, 1, 2, \dots$.

Полиномы $Q_n(z)$ определяются равенствами

$$Q_n(z) = S_\lambda \left\{ \frac{P_n(z) - P_n(\lambda)}{z - \lambda} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.4}$$

Полиномы $P_n(z)$ можно выразить непосредственно, опираясь на элементы последовательности $\{s_n\}_0^\infty$:

$$P_0(z) \equiv 1,$$

$$P_n(z) = (D_{n-1}D_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & \dots & s_{2n-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.5}$$

Последовательность $\{P_n(z)\}_0^\infty$, дополненная элементом $P_{-1}(z) \equiv 0$, является единственным решением разностного уравнения

$$b_{k-1}y_{k-1} + a_k y_k + b_k y_{k+1} = z y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.6}$$

удовлетворяющим начальным условиям

$$y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1. \tag{1.7}$$

В (1.6) числа b_n, $n = -1, 0, 1, \dots$, положительны и определяются равенствами

$$b_{-1} = 1, \;\; b_n = \sqrt{D_{n-1}D_{n+1}}\,D_n^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.8}$$

(см. [3], гл. I, п. 1.3), а a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, – вещественные числа, определяемые равенствами

$$a_n = D_n'/D_n - D_{n-1}'/D_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.9}$$

где (см. [4], §1, п. 1) $D_{-1}' = 0$, $D_0' = s_1$,

$$D_n' = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & s_{n+1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & s_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \dots & s_{2n-1} & s_{2n+1} \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{1.10}$$

Последовательность $\{Q_n(z)\}_0^\infty$, дополненная элементом $Q_{-1}(z) \equiv -1$, является единственным решением разностного уравнения (1.6), удовлетворяющим начальным условиям $y_{-1} = -1$, $y_0 = 0$ ([3], §1.2).

Предложение 1.3 ([3], гл. I, §1, п. 1.4). *Равенствами* (1.3), (1.8), (1.9), (1.10) *устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех строго позитивных последовательностей $\{s_n\}_0^\infty$ с $s_0 = 1$ с одной стороны и множеством пар $\{a_n\}_0^\infty$, $\{b_n\}_0^\infty$ числовых последовательностей, у которых $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ с другой стороны.*

4. Рассмотрим при $n \in \mathbb{N}$ функцию

$$w_n(z, \xi) = \frac{-Q_n(z)\xi + Q_{n-1}(z)}{P_n(z)\xi - P_{n-1}(z)}. \tag{1.11}$$

Когда ξ пробегает замкнутую вещественную ось $\overline{\mathbb{R}}$, точка $w_n(z, \xi)$ при фиксированном $z \in \mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ описывает окружность $\Gamma_n(z)$, которая при $n > 1$ лежит в $\mathbb{C}_+$, а при $n = 1$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\mathbb{C}}_+$ (имеет одну общую точку 0 с $\mathbb{R}$), а когда ξ пробегает замкнутую верхнюю полуплоскость, точка $w_n(z,\xi)$ пробегает круг $K_n(z)$ с границей $\Gamma_n(z)$.* Оказывается, при фиксированном $z \in \mathbb{C}_+$ справедливо включение $K_n(z) \subset K_{n-1}(z)$, а окружности $\Gamma_{n-1}(z)$ и $\Gamma_n(z)$ имеют общую точку $w_{n-1}(z,\infty) = w_n(z,0)$ ([3], гл. II, п. 2.3). Положим $K(z) = \bigcap\limits_1^\infty K_n(z)$. Ясно, что $K(z)$ при фиксированном $z \in \mathbb{C}_+$ – это круг или точка. Установлено, что, если $K(z)$ – круг при одном значении $z \in \mathbb{C}_+$, то $K(z)$ – круг при любом $z \in \mathbb{C}_+$. В соответствии с этим говорят, что для проблемы моментов (1.1) имеет место случай предельной точки или предельного круга.

Предложение 1.4. *Проблема моментов* (1.1) *со строго позитивной последовательностью* $\{s_n\}_0^\infty$ *является определенной, т.е. имеет единственное решение, тогда и только тогда, когда имеет место случай предельной точки (см.* [3]*, определение* 1.3.2*, теорема* 2.1.2 *и следствие* 2.2.4*).*

Предложение 1.5. *Неубывающая функция* $\sigma(\lambda)$ *является решением СПМГ* (1.1) *в том и только в том случае, когда определенная равенством*

$$w(z) = w_\sigma(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{1.12}$$

функция w *такова, что* $w(z) \in K_n(z)$ *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $z \in \mathbb{C}_+$ *(*[3]*, теорема* 2.2.4 *и* 3.2.2*, гл.* II*, п.* 4.2*).*

5. Для формулировки ряда важных предложений приведем сведения о R-функциях и R_0-функциях (см. [5]).

Голоморфную в каждой из полуплоскостей $\mathbb{C}_+$ и $\mathbb{C}_-$ функцию f называем R-функцией и относим к классу (R), если

1) $f(\bar z) = \overline{f(z)}$ $\forall z \in (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$ и 2) $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$ $\forall z \in (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$.

*В [3] $w_n(z,\xi) = (-Q_n(z) + \xi Q_{n-1}(z))(P_n(z) - \xi P_{n-1}(z))^{-1}$. Там (хотя это и не отмечалось) отображение $\xi \mapsto w_n(z,\xi)$ при $\operatorname{Im} z > 0$ отображает $\mathbb{C}_+$ в область, внешнюю по отношению к $\Gamma_n(z)$, что вызывает некоторые неудобства. В [3] не было замечено, что $\Gamma_1(z)$ не целиком лежит в $\mathbb{C}_+$.

Любая R-функция f допускает представление (единственное)

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\tau(\lambda), \ \operatorname{Im} z \neq 0, \qquad (1.13)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$, τ – нормированная неубывающая функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \lambda^2)^{-1} d\tau(\lambda) < \infty.$$

Функцию τ в представлении (1.13) называют спектральной функцией R-функции $f(z)$.

Через $(\tilde{R})$ будем обозначать класс функций, получающийся из (R) присоединением к нему функции, тождественно равной бесконечности.

Функцию $f(z)$, определенную при $z \in (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-)$, относим к классу (R_0) и называем R_0-функцией, если она допускает представление

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda - z}, \qquad (1.14)$$

где μ – нормированная неубывающая функция ограниченного изменения. Кстати, функция $w_\sigma(z)$ (см. (1.12)) – это R_0-функция. Ясно, что R_0-функция является R-функцией, и фигурирующая в (1.14) функция μ является ее спектральной функцией.

Напомним, что для спектральной функции τ R-функции $f(z)$ справедлива формула обращения Стилтьеса:

$$\tau(\lambda) = \pi^{-1} \lim_{\eta \downarrow 0} \int_0^\lambda \operatorname{Im} f(\xi + i\eta) d\xi, \ -\infty < \lambda < +\infty. \qquad (1.15)$$

6. Рассмотрим круг $K_1(i\eta)$ с $\eta > 0$. Ему принадлежит точка $-Q_0(i\eta)/P_0(i\eta) = 0$, а его радиус $r(i\eta)$ вычисляется по формуле $r(i\eta) = 1/(2\eta|P_0(i\eta)|^2) = (2\eta)^{-1}$ ([3], гл. I, п. 2.3). Поэтому для любого $\eta > 0$ и любой точки $u \in K_1(i\eta)$ справедливо неравенство $\eta|u| \leqslant 1$. Отсюда вытекает (см. [5], теорема Д1.4.1)

Лемма 1.1. *Если R-функция f такова, что $f(i\eta) \in K_1(i\eta)$ при любом $\eta > 0$, то $f \in (R_0)$ и, следовательно, f допускает представление*

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - z)^{-1} d\rho(\lambda), \quad \operatorname{Im} z \neq 0,$$

где ρ – неубывающая функция ограниченного изменения.

7. В дополнение к предложению 1.4 приведем критерий Гамбургера определенности СПМГ (1.1) ([6], см. также [3], гл. II, Дополнения и задачи, п. 10).

Предложение 1.6. *Для определенности СПМГ* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}((P_k(0))^2 + (Q_k(0))^2). \tag{1.16}$$

В случае неопределенности СПМГ (1.1) описание всех решений дает теорема Неванлинны, формулируемая в терминах $\{P_n(z)\}_0^\infty$ и $\{Q_n(z)\}_0^\infty$ ([7], [3, теорема 3.2.2, упомянутая выше]).

§2. Необходимая информация о канонических системах*

1. Пусть $I = [0, L)$ с $L \leqslant +\infty$ – заданный промежуток. Пусть $\mathcal{H}(t) = (h_{ij}(t))_{i,j=1}^2$ – симметричная матрица-функция, которая определена на I, локально суммируема и эрмитово неотрицательна: $\mathcal{H}(t) \geqslant 0$ $\forall t \in I$; такую матрицу-функцию будем называть *гамильтонианом*. Рассматривается каноническое дифференциальное уравнение фазовой размерности 2 (каноническая система)

$$\frac{dx}{dt} J = zx\mathcal{H}(t), \quad t \in I, \tag{2.1}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а z – комплексный параметр. Вектор-функцию $u(t) = (u^{(1)}(t); u^{(2)}(t))$ считаем решением уравнения (2.1), если

*Изложенные в этом параграфе факты взяты из работ де Бранжа [8–10], неопубликованной работы М. Г. Крейна и Г. Лангера [11], на которую имеется много ссылок в математической литературе, из работы [12] и депонированной работы автора [13].

она абсолютно непрерывна и равенство $u'(t)J = zu(t)\mathcal{H}(t)$ справедливо при почти всех (по мере Лебега) $t \in I$. Уравнение (2.1) мы называем регулярным, если $\mathcal{H}(t)$ суммируема на I, а в противном случае – сингулярным. Не уменьшая общности, будем считать впредь, что $\operatorname{tr}\mathcal{H}(t) = 1$ $\forall t \in I$. Этого всегда можно добиться за счет изменения независимой переменной в (2.1). Теперь уравнение (2.1) сингулярно в том и только в том случае, когда $L = \infty$. Через $\varphi(t,z) = (\varphi^{(1)}(t,z);\ \varphi^{(2)}(t,z))$ и $\psi(t,z) = (\psi^{(1)}(t,z);$ $\psi^{(2)}(t,z))$ будем обозначать решения уравнения (2.1), удовлетворяющие условиям $x\big|_{t=0} = (0;1)$ и $x\big|_{t=0} = (1;0)$ соответственно. При фиксированном $t \in I$ они являются целыми функциями переменной z.

Заметим, что в случае, когда $L < \infty$, существуют пределы $\lim\limits_{t\uparrow L}\varphi(t,z)$ и $\lim\limits_{t\uparrow L}\psi(t,z)$, которые будем обозначать через $\varphi(L,z)$ и $\psi(L,z)$ соответственно.

2. Введем чрезвычайно важное понятие $\mathcal{H}$-неделимого промежутка (сокращенно $\mathcal{H}$-н.п.).

Определение 2.1. *Промежуток $\Delta \subset I$ будем называть $\mathcal{H}$-неделимым промежутком типа θ, если при почти всех $t \in \Delta$*

$$\mathcal{H}(t) = \xi_\theta \xi_\theta^T, \tag{2.2}$$

*где $\xi_\theta = (\cos\theta; \sin\theta)^T$ – матрица-столбец (T – символ транспонирования). $\mathcal{H}$-н.п. будем называть максимальным, если он не является правильной частью другого $\mathcal{H}$-н.п.**

Заметим, что любой максимальный $\mathcal{H}$-н.п. за исключением случая, когда L – его правый конец, – это замкнутый промежуток. Впредь *мы исключаем из рассмотрения случай, когда L – конец $\mathcal{H}$-н.п.*

Приведем ряд свойств решений уравнения (2.1) на $\mathcal{H}$-н.п.

(a) *Если Δ – $\mathcal{H}$-н.п. типа θ и $u(t,z) = (u^{(1)}(t,z); u^{(2)}(t,z))$ – решение уравнения* (2.1), *то при фиксированном $z \in \mathbb{C}$ имеем $u(t,z)\xi_\theta = \mathrm{const}$ на Δ, т.е. при $t \in \Delta$*

$$u^{(1)}(t,z)\cos\theta + u^{(2)}(t,z)\sin\theta = u_\Delta(z), \tag{2.3}$$

*Особую роль $\mathcal{H}$-н.п. заметил еще де Бранж [8], однако он не присвоил им названия и не разделил их по типам, т.к. у него не было в этом необходимости.

где $u_\Delta(z)$ *не зависит от* t.

Действительно, если $u(t,z)$ – решение уравнения (2.1), то

$$\frac{d}{dt}\,u(t,z) = -zu(t,z)\xi_\theta\xi_\theta^T J \tag{2.4}$$

при почти всех $t \in \Delta$. Умножив справа обе части (2.4) на ξ_θ и учитывая равенство $\xi_\theta^T J\xi_\theta = 0$, получим, что $\frac{d}{dt}(u(t,z)\xi_\theta) = 0$ при п.в. $t \in \Delta$. Так как $u(t,z)$, а значит и $u(t,z)\xi_\theta$, абсолютно непрерывны на Δ, то (2.3) доказано.

(б) *Если* $\Delta = [\alpha,\beta]$ – $\mathcal{H}$-*н.п. типа* θ *и* $u(t,z) = (u^{(1)}(t,z); u^{(2)}(t,z))$ – *решение уравнения* (2.1), *то* $u^{(1)}(t,z)$ *и* $u^{(2)}(t,z)$ *при фиксированном* $z \in \mathbb{C}$ *являются линейными функциями на* Δ, *и*

$$\frac{d}{dt}u(t,z) = -zu_\Delta(z)\xi_\theta^T J \quad \forall t \in (\alpha,\beta), \tag{2.5}$$

то есть при любом $t \in (\alpha,\beta)$

$$\frac{d}{dt}u^{(1)}(t,z) = -zu_\Delta(z)\sin\theta, \;\; \frac{d}{dt}\,u^{(2)}(t,z) = zu_\Delta(z)\cos\theta, \tag{2.6}$$

где

$$u_\Delta(z) := u^{(1)}(t,z)\cos\theta + u^{(2)}(t,z)\sin\theta \tag{2.7}$$

не зависит от t *на* $[\alpha,\beta]$ *в соответствии со свойством* (а).

Доказательство. Из (2.4) и свойства (а) вытекает, что при почти всех $t \in \Delta$ справедливо равенство (2.5), а значит и равенства (2.6), где $u_\Delta(z)$ определено равенством (2.7). Так как $u^{(1)}(t,z)$, $u^{(2)}(t,z)$ абсолютно непрерывны на Δ и правые части в (2.6) не зависят от t, то эти функции линейны и равенства (2.6), а значит равенство (2.5), справедливы при всех $t \in (\alpha,\beta)$.

3. Введем понятие спектральной функции граничной задачи

$$\frac{dx}{dt}\,J = zx\mathcal{H}(t), \quad t \in I, \quad x\big|_{t=0} = (0;1). \tag{$*$}$$

Через H обозначим множество всех измеримых по Лебегу вектор-функций $f(t) = (f^{(1)}(t); f^{(2)}(t))$ таких, что

$$\int\limits_I f(t)\mathcal{H}(t)(f(t))^*\,dt < \infty, \tag{2.8}$$

и для $f,\ g \in H$ положим

$$(f,g) = \int\limits_I f(t)\mathcal{H}(t)(g(t))^*\,dt.$$

(f,g) придает множеству H структуру квазигильбертова пространства, в котором (f,g) – скалярное произведение (см. [14]). Если $L = +\infty$, через H' обозначим множество вектор-функций $f \in H$, которые принимают значение (0;0) в какой-нибудь левой окрестности точки L, а в случае, когда $L < +\infty$, считаем $H' = H$.

Вектор-функцию $f \in H$ будем относить к множеству $\hat{H}$, если для любого максимального $\mathcal{H}$-н.п. Δ существует такая константа $c(f,\Delta)$, что $f(t)\xi_\theta = c(f,\Delta)$ при п.в. $t \in \Delta$, где θ – тип этого $\mathcal{H}$-н.п., причем в случае, когда $0 \in \Delta$ и $\theta = 0$, эта константа равна нулю. $\hat{H}$ – также квазигильбертово пространство.* Положим $\hat{H}' = \hat{H} \cap H'$.

Пусть, как и прежде, $\varphi(t,z) = (\varphi^{(1)}(t,z);\varphi^{(2)}(t,z))$ – решение (единственное) граничной задачи $(*)$. Если $f \in \hat{H}'$, то при любом $\lambda \in \mathbb{R}$ существует

$$\mathcal{F}(\lambda) := \int\limits_I f(t)\mathcal{H}(t)(\varphi(t,\lambda))^T\,dt. \tag{2.9}$$

Через $\mathcal{U}$ обозначим отображение $f \mapsto \mathcal{F}$, определяемое равенством (2.9).

Определение 2.2. *Неубывающую функцию $\tau(\lambda)$, нормированную условиями $\tau(\lambda) = \frac{1}{2}(\tau(\lambda-0)+\tau(\lambda+0))$, $-\infty < \lambda < +\infty$, $\tau(0) = 0$, мы называем спектральной функцией граничной задачи $(*)$, если отображение $\mathcal{U}$ изометрически переводит $\hat{H}'$ в $L^{(2)}_\tau(-\infty,+\infty)$, т.е. если для любой вектор-функции $f \in \hat{H}'$ и $\mathcal{F} = \mathcal{U}f$ справедливо "равенство Парсеваля"*

$$\int\limits_I f(t)\mathcal{H}(t)(f(t))^*\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(\lambda)|^2 d\tau(\lambda). \tag{2.10}$$

---

*Доказательство этого факта после ранее упомянутой работы [14] весьма несложно и было проведено в работе [13].

Последнее требование равносильно тому, что при любых f, $g \in \hat{H}'$ и $\mathcal{F} = \mathcal{U}f$, $\mathcal{G} = \mathcal{U}g$ справедливо равенство

$$\int\limits_I f(t)\mathcal{H}(t)(g(t))^* \, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\lambda)\overline{\mathcal{G}(\lambda)} d\tau(\lambda). \tag{2.11}$$

Существование спектральных функций граничной задачи $(*)$ было доказано при некоторых дополнительных ограничениях в работах де Бранжа [8–10], а без всяких ограничений и даже, более того, когда $h_{21}(t) = \overline{h_{12}(t)} \notin \mathbb{R}$, в работе [13].

Из определения 2.2 следует, что проблема отыскания всех спектральных функций граничной задачи $(*)$ – это некоторая проблема моментов (не обязательно степенная). Действительно, имеется некоторое множество P функций $V(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda)\overline{\mathcal{G}(\lambda)}$ таких, что $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathcal{U}\hat{H}'$. Для каждой такой функции обозначим через $T(V)$ интеграл, стоящий в левой части (2.11) для таких f, g, что $\mathcal{U}f = \mathcal{F}$, $\mathcal{U}g = \mathcal{G}$. Задача отыскания всех спектральных функций граничной задачи $(*)$ – это задача отыскания всех таких нормированных неубывающих функций τ, что для любой функции $V \in P$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(\lambda) d\tau(\lambda) = T(V).$$

В §3 будет построен такой класс гамильтонианов, что множество P для задачи $(*)$ с гамильтонианом этого класса совпадает с множеством всех полиномов, а значит множество спектральных функций этой задачи совпадает с множеством всех решений некоторой СПМГ, которую будем считать соответствующей этому гамильтониану. Такие гамильтонианы будем называть гамбургеровскими. Более того, будет показано, что для любой СПМГ со строго позитивной последовательностью $\{s_n\}_0^\infty$ найдется гамбургеровский гамильтониан, соответствующий в указанном смысле этой СПМГ.

4. Пусть $\mathcal{H}(t)$, $t \in I$, – гамильтониан. Пусть $V(t,z)$ – матрица-функция 2×2, определяемая системой

$$\frac{dV(t,z)}{dt} J = zV(t,z)\mathcal{H}(t), \quad t \in I, \quad V(0,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Заметим, что

$$V(t,z)=\begin{pmatrix}\psi^{(1)}(t,z) & \psi^{(2)}(t,z)\\ \varphi^{(1)}(t,z) & \varphi^{(2)}(t,z)\end{pmatrix}\quad \forall t\in I,\ z\in\mathbb{C}.$$

Продифференцировав $V(t,z)J\,(V(t,z))^*$ по переменной t, получим хорошо известное соотношение

$$V(t,z)J(V(t,z))^*-J=(z-\bar z)\int\limits_0^t V(s,z)\mathcal{H}(s)(V(s,z))^*ds. \tag{2.13}$$

Отсюда вытекает, что при $z\in\mathbb{C}_+$ матрица-функция $V(t,z)$ является J_1-растягивающей, где $J_1=-iJ=\left(\begin{smallmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{smallmatrix}\right)$:

$$V(t,z)J_1(V(t,z))^*-J_1\geqslant 0.$$

Поэтому (см., например [15], стр. 11) при фиксированном $z\in\mathbb{C}_+$ преобразование

$$\zeta\mapsto v_t(z,\zeta):=\frac{\psi^{(1)}(t,z)\zeta+\psi^{(2)}(t,z)}{\varphi^{(1)}(t,z)\zeta+\varphi^{(2)}(t,z)}$$

переводит $\overline{\mathbb{C}}_+$ в круг $D_t(z)\subset\overline{\mathbb{C}}_+$, границу которого $\Lambda_t(z)$ описывает точка $v_t(z,\zeta)$, когда ζ пробегает $\overline{\mathbb{R}}$. С помощью теории Вейля гнездящихся кругов легко устанавливается, что если $0<t_1<t_2<L$, то $D_{t_2}(z)\subset D_{t_1}(z)$.

Пусть $D(z)=\bigcap_{t\in(0,L)}D_t(z)$. Ясно, что $D(z)$ – либо точка, либо круг. Оказывается, если $D(z)$ – круг при одном $z\in\mathbb{C}_+$, то $D(z)$ – круг при любом $z\in\mathbb{C}_+$. В соответствие с этим говорят, что для задачи $(*)$ имеет место случай предельной точки или предельного круга. Установлено, как и в случае уравнения Штурма-Лиувилля или в случае струны (см. [2]), что случай предельного круга имеет место тогда и только тогда, когда хотя бы при одном (а, значит, и при любом) $z\in\mathbb{C}$ любое решение $u(t,z)$ уравнения (2.1) имеет $\mathcal{H}$-суммируемый на I квадрат:

$$\int\limits_0^L u(t,z)\mathcal{H}(t)(u(t,z))^*dt<\infty,$$

а для этого необходимо и достаточно, чтобы имели $\mathcal{H}$-суммируемый на I квадрат два линейно независимых решения. Так как

$\varphi(t,0) \equiv (0;1)$, $\psi(t,0) \equiv (1;0)$, имеем

$$\int_0^L \varphi(t,0)\mathcal{H}(t)(\varphi(t,0))^* dt = \int_0^L h_{22}(t)dt,$$

$$\int_0^L \psi(t,0)\mathcal{H}(t)(\psi(t,0))^* dt = \int_0^L h_{11}(t)dt.$$

Поскольку $h_{11}(t) + h_{22}(t) = 1$ $\forall t \in I$, случай предельного круга имеет место тогда и только тогда, когда $L < +\infty$. В этом случае для любой функции $\omega \in (\tilde{R})$ функция

$$V_\omega(z) := v_L(z, \omega(z)) = \frac{\psi^{(1)}(L,z)\omega(z) + \psi^{(2)}(L,z)}{\varphi^{(1)}(L,z)\omega(z) + \varphi^{(2)}(L,z)} \tag{2.14}$$

является R-функцией. Ее спектральная функция τ определяется в соответствии с (1.15) равенством

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \downarrow 0} \int_0^\lambda \operatorname{Im} V_\omega(\xi + i\eta) d\xi, \quad -\infty < \lambda < +\infty. \tag{2.15}$$

Предложение 2.1. *Если $L < +\infty$, то равенствами* (2.14), (2.15) *устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством T всех спектральных функций τ граничной задачи* $(*)$ *и множеством $(\tilde{R})$ функций ω.*

Напомним, что это и следующее предложение справедливы лишь в том случае, когда L не является концом $\mathcal{H}$-н.п.

Предложение 2.2. *В случае, когда $L = \infty$, функция $V_\infty(z)$, определенная равенством*

$$V_\infty(z) := \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{\psi^{(1)}(t,z)}{\varphi^{(1)}(t,z)} \quad \left(= \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{\psi^{(2)}(t,z)}{\varphi^{(2)}(t,z)} \right),$$

является R-функцией, и ее спектральная функция является единственной спектральной функцией граничной задачи $(*)$.

Из этих двух предложений легко следует

Лемма 2.1. *Нормированная неубывающая функция* τ *является спектральной функцией граничной задачи* $(*)$ *в том и только в том случае, когда* τ *является спектральной функцией такой* R*-функции* $V(z)$, *что* $V(z) \in D_t(z)$ *при любых* $t \in (0, L)$ *и* $z \in \mathbb{C}_+$, *а для этого достаточно, чтобы имели место включения* $V(z) \in D_{t_j}(z)$ *для любых* $j \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_+$, *где* $\{t_j\}_1^\infty \subset (0, L)$ – *такая возрастающая последовательность, что* $\lim t_j = L$.

§3. Гамбургеровские гамильтонианы и СПМГ

1. Пусть даны две последовательности вещественных чисел: $\{l_j\}_{-1}^\infty$, в которой $l_{-1} = l_0 = 1$, $l_j > 0$, $j = 1, 2, \dots$, и $\{\theta_j\}_{-1}^\infty$, в которой $\theta_{-1} = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ и

$$\theta_j < \theta_{j+1} < \theta_j + \pi, \quad j = 0, 1, 2, \dots. \tag{3.1}$$

Положим $t_{-1} = -1$, $t_0 = t_{-1} + l_{-1} = 0$, $t_{j+1} = t_j + l_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $\mathring{L} = \lim t_j$. На промежутке $\mathring{I} = [-1, \mathring{L})$ построим гамильтониан $\mathring{\mathcal{H}}$, положив

$$\mathring{\mathcal{H}}(t) = \xi_{\theta_j} \xi_{\theta_j}^T \ \ \forall t \in [t_j, t_{j+1}), \ \ j = -1, 0, 1, \dots. \tag{3.2}$$

Гамильтониан $\mathring{\mathcal{H}}(t)$, $-1 \leqslant t < \mathring{L}$ будем называть гамбургеровским, а числа $l_1, l_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ – его параметрами. Ясно, что промежуток $[-1, \mathring{L})$ представляет собой объединение $\mathring{\mathcal{H}}$-н.п. $\Delta_j = [t_j, t_{j+1}]$, $j = -1, 0, 1, \dots$. Через $\mathring{\varphi}(t, z) = (\varphi_0^{(1)}(t, z); \varphi_0^{(2)}(t, z))$ будем обозначать решение канонического дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} J = z x \mathring{\mathcal{H}}(t), \quad -1 \leqslant t < \mathring{L}, \tag{3.3}$$

удовлетворяющее условию $x\big|_{t=0} = (0; 1)$, а через $\mathring{\psi}(t, z) = (\psi_0^{(1)}(t, z); \psi_0^{(2)}(t, z))$ – решение уравнения (3.3), удовлетворяющее условию $x\big|_{t=0} = (1; 0)$.

Нас будут интересовать в дальнейшем спектральные функции граничной задачи

$$\frac{dx}{dt} J = z x \mathring{\mathcal{H}}(t), \quad 0 \leqslant t < \mathring{L}; \quad x\big|_{t=0} = (0; 1). \tag{$**$}$$

($[-1, 0)$ – это дополнительный промежуток, введенный для установления связи с СПМГ.)

Пусть $u(t,z) = (u^{(1)}(t,z); u^{(2)}(t,z))$ – какое-нибудь решение уравнения (3.3) на $[-1, \overset{\circ}{L})$. Согласно свойству (а) из п. 2.2, $u(t,z)\xi_{\theta_j} = u^{(1)}(t,z)\cos\theta_j + u^{(2)}(t,z)\sin\theta_j$ является константой на $[t_j, t_{j+1}]$. Обозначим ее через $u_j(z)$, $j = -1, 0, 1, \dots$. Итак, для $j = -1, 0, 1, 2, \dots$

$$u^{(1)}(t_j, z)\cos\theta_j + u^{(2)}(t_j, z)\sin\theta_j = u_j(z), \tag{3.4}$$

$$u^{(1)}(t_j, z)\cos\theta_{j-1} + u^{(2)}(t_j, z)\sin\theta_{j-1} = u_{j-1}(z). \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5), используя правило Крамера, получим, что

$$u^{(1)}(t_j, z) = \frac{u_{j-1}(z)\sin\theta_j - u_j(z)\sin\theta_{j-1}}{\sin(\theta_j - \theta_{j-1})}, \tag{3.6}$$

$$u^{(2)}(t_j, z) = \frac{u_j(z)\cos\theta_{j-1} - u_{j-1}(z)\cos\theta_j}{\sin(\theta_j - \theta_{j-1})}, \tag{3.7}$$

и, следовательно (заменяем j на $j+1$),

$$u^{(1)}(t_{j+1}, z) = \frac{u_j(z)\sin\theta_{j+1} - u_{j+1}(z)\sin\theta_j}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)}, \tag{3.8}$$

$$u^{(2)}(t_{j+1}, z) = \frac{u_{j+1}(z)\cos\theta_j - u_j(z)\cos\theta_{j+1}}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)}. \tag{3.9}$$

Согласно свойству (б) из п. 2.2

$$\frac{d}{dt}u^{(1)}(t,z) = \frac{u^{(1)}(t_{j+1}, z) - u^{(1)}(t_j, z)}{l_j} \quad \forall t \in (t_j, t_{j+1}), \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dt}u^{(2)}(t,z) = \frac{u^{(2)}(t_{j+1}, z) - u^{(2)}(t_j, z)}{l_j} \quad \forall t \in (t_j, t_{j+1}). \tag{3.11}$$

Из (3.10), (3.6), (3.8) и свойства (б) из п. 2.2 (см. первое равенство (2.6)) вытекает, что

$$\begin{aligned} z u_j(z) l_j \sin\theta_j = {} & \frac{u_{j-1}(z)\sin\theta_j - u_j(z)\sin\theta_{j-1}}{\sin(\theta_j - \theta_{j-1})} - \\ & - \frac{u_j(z)\sin\theta_{j+1} - u_{j+1}(z)\sin\theta_j}{\sin(\theta_{j+1} - \theta_j)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

С помощью несложных преобразований из (3.12), когда $\sin\theta_j \neq 0$, получим:

$$zu_j(z) =$$

$$= u_{j-1}(z)\frac{1}{l_j\sin(\theta_j-\theta_{j-1})} - u_j(z)\frac{\sin(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})}{l_j\sin(\theta_j-\theta_{j-1})\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)} +$$

$$+u_{j+1}(z)\frac{1}{l_j\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)}, \quad j=0,1,2,\dots. \tag{3.13}$$

Положив $\tilde u_j(z) = \sqrt{l_j}\,u_j(z)$, $j=-1,0,1,\dots$, получим из (3.13):

$$z\tilde u_j(z) = \tilde u_{j-1}(z)\frac{1}{\sqrt{l_{j-1}l_j}\sin(\theta_j-\theta_{j-1})} -$$

$$\tilde u_j(z)\frac{\sin(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})}{l_j\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)\sin(\theta_j-\theta_{j-1})} + \tilde u_{j+1}(z)\frac{1}{\sqrt{l_jl_{j+1}}\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)}. \tag{3.14}$$

Если же $\sin\theta_j = 0$, то из равенств (3.11), (3.7), (3.9) и свойства (б) из п. 2.2 (см. второе равенство (2.6)) получим:

$$zu_j(z)l_j\cos\theta_j = \frac{u_{j+1}(z)\cos\theta_j - u_j(z)\cos\theta_{j+1}}{\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)} -$$

$$-\frac{u_j(z)\cos\theta_{j-1} - u_{j-1}(z)\cos\theta_j}{\sin(\theta_j-\theta_{j-1})}.$$

С помощью несложных преобразований опять получим равенство (3.13), из которого следует (3.14). Итак, в любом случае

$$z\tilde u_j(z) = b_{j-1}\tilde u_{j-1}(z) + a_j\tilde u_j(z) + b_j\tilde u_{j+1}(z), \quad j=0,1,2,\dots, \tag{3.15}$$

где

$$b_j = \left(\sqrt{l_jl_{j+1}}\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)\right)^{-1}, \quad j=-1,0,1,\dots, \tag{3.16}$$

$$a_j = -\frac{\sin(\theta_{j+1}-\theta_{j-1})}{l_j\sin(\theta_{j+1}-\theta_j)\sin(\theta_j-\theta_{j-1})} =$$

$$= -\frac{1}{l_j}(\operatorname{ctg}(\theta_j-\theta_{j-1}) + \operatorname{ctg}(\theta_{j+1}-\theta_j)), \quad j=0,1,2,\dots. \tag{3.17}$$

В частности $b_{-1} = 1$ (ср. с (1.8)). Доказана

Лемма 3.1. *Если* $u(t,z) = (u^{(1)}(t,z); u^{(2)}(t,z))$ *– решение уравнения* (3.3), *то последовательность* $\{\tilde{u}_j(z)\}_{-1}^{\infty}$, *в которой* $\tilde{u}_j(z) = \sqrt{l_j}(u^{(1)}(t_j,z)\cos\theta_j + u^{(2)}(t_j,z)\sin\theta_j)$, *является решением разностного уравнения* (1.6) *с* $\{a_j\}_0^{\infty}$, $\{b_j\}_{-1}^{\infty}$, *определяемыми равенствами* (3.16), (3.17).

Согласно (3.16) и (3.1), числа $b_0, b_1, \ldots$ положительны. Паре числовых последовательностей $\{a_j\}_0^{\infty}$, $\{b_j\}_{-1}^{\infty}$, определяемых равенствами (3.16), (3.17), соответствует, согласно предложению 1.3, одна и только одна строго позитивная последовательность $\{s_k\}_0^{\infty}$ с $s_0 = 1$, а значит и СПМГ (1.1).

Будем говорить, что эта СПМГ соответствует гамбургеровскому гамильтониану $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$, *построенному выше, и граничной задаче* (∗∗).

Возникает вопрос. Всякая ли СПМГ вида (1.1) соответствует в указанном смысле некоторому гамбургеровскому гамильтониану?

Ответ на этот вопрос положителен. В самом деле, пусть задана СПМГ (1.1), т.е. задана строго позитивная последовательность $\{s_k\}_0^{\infty}$ с $s_0 = 1$. Этим самым в соответствии с предложением 1.3 определены последовательность $\{a_j\}_0^{\infty}$ вещественных чисел и последовательность $\{b_j\}_{-1}^{\infty}$ положительных чисел. Положим $l_{-1} = 1$, $l_0 = 1$, $\theta_{-1} = 0$, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Затем из равенства (3.17) с $j = 0$, которое превращается в равенство $a_0 = \operatorname{tg}\theta_1$, однозначно найдем θ_1, удовлетворяющее условию (3.1) с $j = 0$, а затем из (3.16) с $j = 0$ найдем $l_1 > 0$. Теперь из (3.17) с $j = 1$, найдем θ_2, удовлетворяющее условию (3.1) с $j = 1$, и т.д. По индукции определяются однозначно все элементы последовательности $\{l_j\}_{-1}^{\infty}$ положительных чисел и последовательности $\{\theta_j\}_{-1}^{\infty}$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию (3.1). Этим установлена

Теорема 3.1. *Между множеством всех СПМГ* (1.1) *с* $s_0 = 1$ *и множеством всех гамбургеровских гамильтонианов* $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ *имеет место однозначное соответствие, определяемое равенствами* (1.3), (1.8), (1.10), (3.16), (3.17).

2. Рассмотрим упомянутые выше решения $\overset{\circ}{\varphi}(t,z)$ и $\overset{\circ}{\psi}(t,z)$ уравнения (3.3) на $[-1, \overset{\circ}{L})$. По аналогии с $u(t,z)$ положим при $j =$

$-1, 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi_j(z) = \varphi_0^{(1)}(t_j, z)\cos\theta_j + \varphi_0^{(2)}(t_j, z)\sin\theta_j, \quad \tilde{\varphi}_j(z) = \sqrt{l_j}\varphi_j(z);$$

$$\psi_j(z) = \psi_0^{(1)}(t_j, z)\cos\theta_j + \psi_0^{(2)}(t_j, z)\sin\theta_j, \quad \tilde{\psi}_j(z) = \sqrt{l_j}\varphi_j(z).$$

Согласно лемме 3.1 последовательности $\{\tilde{\varphi}_j(z)\}_{-1}^{\infty}$ и $\{\tilde{\psi}_j(z)\}_{-1}^{\infty}$ являются решениями разностного уравнения (1.6) с $\{a_j\}_0^{\infty}$ и $\{b_j\}_{-1}^{\infty}$, определяемыми равенствами (3.16), (3.17). Так как

$$\tilde{\varphi}_{-1}(z) = \sqrt{l_{-1}}(\varphi_0^{(1)}(t_{-1}, z)\cos\theta_{-1} + \varphi_0^{(2)}(t_{-1}, z)\sin\theta_{-1}) =$$
$$= \varphi_0^{(1)}(t_0, z)\cos\theta_{-1} + \varphi_0^{(2)}(t_0, z)\sin\theta_{-1} = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0,$$
$$\tilde{\varphi}_0(z) = \sqrt{l_0}(\varphi_0^{(1)}(t_0, z)\cos\theta_0 + \varphi_0^{(2)}(t_0, z)\sin\theta_0) = 1(0\cdot 0 + 1\cdot 1) = 1,$$

последовательность $\{\tilde{\varphi}_j(z)\}_{-1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (1.7), и поэтому она совпадает с последовательностью $\{P_j(z)\}_{-1}^{\infty}$ для соответствующей СПМГ. Аналогичным приемом устанавливается, что

$$\tilde{\psi}_{-1}(z) = \sqrt{l_{-1}}(\psi_0^{(1)}(t_0, z)\cos\theta_{-1} + \psi_0^{(2)}(t_0, z)\sin\theta_{-1}) = 1,$$
$$\tilde{\psi}_0(z) = \sqrt{l_0}(\psi_0^{(1)}(t_0, z)\ \cos\theta_0 + \psi_0^{(2)}(t_0, z)\sin\theta_0) = 0.$$

Поэтому последовательность $\{\tilde{\psi}_j(z)\}_{-1}^{\infty}$ совпадает с последовательностью $\{-Q_j(z)\}_{-1}^{\infty}$ для соответствующей СПМГ. Доказана

Лемма 3.2. *Если* $\mathring{\varphi}(t, z)$, $\mathring{\psi}(t, z)$ *– введенные выше решения уравнения* (3.3) *на* $[-1, L_0)$, *а* $\{P_j(z)\}_{-1}^{\infty}$, $\{Q_j(z)\}_{-1}^{\infty}$ *– последовательности полиномов для соответствующей СПМГ, то для* $j = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливы равенства:*

$$P_j(z) = \sqrt{l_j}(\varphi_0^{(1)}(t_j, z)\cos\theta_j + \varphi_0^{(2)}(t_j, z)\sin\theta_j), \tag{3.18}$$

$$Q_j(z) = -\sqrt{l_j}(\psi_0^{(1)}(t_j, z)\cos\theta_j + \psi_0^{(2)}(t_j, z)\sin\theta_j). \tag{3.19}$$

3. Обозначим через $\mathring{D}_n(z)$ при $\operatorname{Im} z > 0$ круг с границей $\mathring{\Lambda}_n(z)$ $(n \in \mathbb{N})$, описываемой точкой

$$v_{t_n}(z, \zeta) = \frac{\psi_0^{(1)}(t_n, z)\zeta + \psi_0^{(2)}(t_n, z)}{\varphi_0^{(1)}(t_n, z)\zeta + \varphi_0^{(2)}(t_n, z)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.20}$$

когда ζ описывает $\overline{\mathbb{R}}$. Граница $\Gamma_n(z)$ круга $K_n(z)$ при $z \in \mathbb{C}_+$ для соответствующей СПМГ описывается точкой $w_n(z,\xi)$, определенной равенством (1.11), когда ξ пробегает $\overline{\mathbb{R}}$. Учитывая, что в соответствии со свойством (a) из п. 2.2 $\varphi_0^{(1)}(t_{n-1},z)\cos\theta_{n-1} + \varphi_0^{(2)}(t_{n-1},z)\sin\theta_{n-1} = \varphi_0^{(1)}(t_n,z)\cos\theta_{n-1} + \varphi_0^{(2)}(t_n,z)\sin\theta_{n-1}$ и справедливо аналогичное равенство с ψ вместо φ, из (1.11), (3.18) и (3.19) получаем

$$w_n(z,\xi) = \frac{\psi_0^{(1)}(t_n,z)\zeta + \psi_0^{(2)}(t_n,z)}{\varphi_0^{(1)}(t_n,z)\zeta + \varphi_0^{(2)}(t_n,z)},$$

где

$$\zeta = \frac{\xi\cos\theta_n - \cos\theta_{n-1}}{\xi\sin\theta_n - \sin\theta_{n-1}}.$$

Имеем $-\cos\theta_n\sin\theta_{n-1} + \cos\theta_{n-1}\sin\theta_n = \sin(\theta_n - \theta_{n-1}) \neq 0$ ибо $\theta_n \not\equiv \theta_{n-1} \pmod{\pi}$; поэтому, когда ξ пробегает $\overline{\mathbb{R}}$, точка ζ также пробегает $\overline{\mathbb{R}}$, и, следовательно, $w_n(z,\xi)$ пробегает не только $\Gamma_n(z)$ (см. п. 1.4), но и $\mathring{\Lambda}_n(z)$. Доказана

Лемма 3.3. *Окружности $\Gamma_n(z)$ и $\mathring{\Lambda}_n(z)$, а значит и круги $K_n(z)$ и $D_n(z)$, совпадают при любых $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}_+$.*

Основная теорема. *Множество спектральных функций граничной задачи* (∗∗) *совпадает с множеством решений соответствующей СПМГ* (1.1).

Доказательство. Пусть σ – решение СПМГ (1.1). Пусть $w_\sigma(z)$ – функция, определенная равенством (1.12) (это R-функция, и σ – ее спектральная функция). Согласно предложению 1.5, $w_\sigma(z) \in K_n(z)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Согласно же лемме 3.3, $w_\sigma(z) \in \mathring{D}_n(z)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_+$. В соответствии с леммой 2.1, σ – спектральная функция граничной задачи (∗∗). Пусть теперь τ – спектральная функция граничной задачи (∗∗). Тогда (лемма 2.1) существует такая R-функция v_τ со спектральной функцией τ, что $v_\tau(z) \in \mathring{D}_n(z)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Согласно лемме 3.3, $v_\tau(z) \in K_n(z)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_+$. Так как $v_\tau(z) \in K_1(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}_+$, согласно лемме 1.1 имеем $v_\tau \in (R_0)$ и $v_\tau(z)$ представима в виде

$$v_\tau(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Из предложения 1.5 вытекает, что τ – решение СПМГ, соответствующей граничной задаче (**).

Следствие. *Когда* $\overset{\circ}{L} = +\infty$ *и только в этом случае, СПМГ* (1.1) *является определенной.*

Условие определенности приобрело "естественный" вид.

4. В этом пункте приведены формулы, позволяющие непосредственно по элементам последовательности $\{s_k\}_0^\infty$ найти параметры соответствующего гамбургеровского гамильтониана $\overset{\circ}{\mathcal{H}}$.

Так как $\overset{\circ}{\varphi}(t,z)$ и $\overset{\circ}{\psi}(t,z)$ – решения уравнения (3.3), при $z=0$ они являются константами, равными значениям этих вектор-функций при $t=0$. Таким образом, $\varphi_0^{(1)}(t_j,0)=0$, $\varphi_0^{(2)}(t_j,0)=1$, $\psi_0^{(1)}(t_j,0)=1$, $\psi_0^{(2)}(t_j,0)=0$ при $j=0,1,2,\dots$. Поэтому из равенств (3.18) и (3.19) следует, что

$$P_j(0)=\sqrt{l_j}\sin\theta_j,\quad -Q_j(0)=\sqrt{l_j}\cos\theta_j,\quad j=0,1,2,\dots. \tag{3.21}$$

Следовательно,

$$l_j=(P_j(0))^2+(Q_j(0))^2,\quad \operatorname{tg}\theta_j=-\frac{P_j(0)}{Q_j(0)},\quad j=0,1,2,\dots, \tag{3.22}$$

причем, когда $Q_j(0)=0$, последнее равенство понимается как $\operatorname{ctg}\theta_j=0$. В соответствии с (1.5), $P_0(0)=1$, а при $j=1,2,\dots$

$$P_j(0)=(D_{j-1}D_j)^{-1/2}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{j-1} & s_j & \dots & s_{2j-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^j(D_{j-1}D_j)^{-1/2}\mathcal{E}_j, \tag{3.23}$$

где

$$\mathcal{E}_j=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_j \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j-1} \end{vmatrix}. \tag{3.24}$$

Из формул (1.4), (1.5), (1.2) следует, что $Q(0)=0$, а при $j=1,2,3,\dots$

$$Q_j(0)=S\left\{\frac{P_j(\lambda)-P_j(0)}{\lambda-0}\right\}=$$

$$= (D_{j-1}D_j)^{-1/2} S \left\{ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j-1} \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{j-1} \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= (D_{j-1}D_j)^{-1/2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j-1} \\ 0 & s_0 & s_1 & \dots & s_{j-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (D_{j-1}D_j)^{-1/2}(-1)^j C_j, \tag{3.25}$$

где

$$C_j = \begin{vmatrix} 0 & s_0 & s_1 & \dots & s_{j-1} \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_{j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \dots & s_{2j-1} \end{vmatrix}. \tag{3.26}$$

Теперь из (3.21) вытекает

Теорема 3.2. *Параметры гамильтониана* $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(t)$, *соответствующего СПМГ* (1.1), *определяются равенствами*

$$l_j = \frac{C_j^2 + \mathcal{E}_j^2}{D_{j-1}D_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{3.27}$$

$$\operatorname{tg}\theta_j = -\frac{\mathcal{E}_j}{C_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{3.28}$$

где C_j, D_j, $\mathcal{E}_j$ *определены равенствами* (1.3), (3.24), (3.26), *причем при* $C_j = 0$ *равенство в* (3.28) *понимается как* $\operatorname{ctg}\theta_j = 0$.

Замечание. Из равенств (3.28) числа θ_j определяются с точностью до слагаемого, кратного π. Определяя последовательно $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, мы можем добиться выполнения условия (3.1). Может создаться впечатление, что для построения $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(t)$ по $\{s_k\}_0^\infty$ нужно использовать пошаговый процесс. Однако это не так, ибо значение $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(t)$ на промежутке $[t_j, t_{j+1})$ не изменится при прибавлении к θ_j числа, кратного π. Требование (3.1) было введено для того, чтобы числа b_j, определенные равенством (3.16), были положительны. Это послужило мостом между теорией СПМГ и спектральной теорией граничной задачи (∗∗). Если условие (3.1) не выполнено, то в равенствах (3.18), (3.19) и (3.21) левая и правая части могут отличаться знаками, однако равенства (3.22) справедливы независимо от того, какое значение θ_j выбрано.

5. У граничной задачи (∗∗) правый конец $\mathring{L}$ интервала, на котором она рассматривается, не является концом $\mathring{\mathcal{H}}$-н.п. Поэтому в соответствии с Основной теоремой *описание всех решений СПМГ можно получить, применив предложение* 2.1 *или предложение* 2.2 *к соответствующей этой СПМГ граничной задаче* (∗∗).

Хочу отметить, что усеченная СПМГ, состоящая в отыскании нормированной неубывающей функции σ такой, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n \, d\sigma(\lambda) = s_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

также укладывается в рассматриваемую схему, однако эта задача равносильна задаче отыскания спектральных функций граничной задачи с гамильтонианом $\mathring{\mathcal{H}}$ на укороченном промежутке $[0, t_{N+1}]$. Его правый конец является правым концом $\mathring{\mathcal{H}}$-н.п. В этой ситуации нельзя применять данное в предложении 2.1 описание множества спектральных функций.

Автор надеется вскоре опубликовать давно известное ему описание множества спектральных функций граничной задачи (∗) в случае, когда L – конец $\mathring{\mathcal{H}}$-н.п., и тогда завершить решение вопроса о включении усеченной СПМГ в спектральную теорию канонических систем.

6. Приведем доказательства некоторых известных предложений классической теории СПМГ, опираясь на изложенные выше результаты.

а) Доказательство предложения 1.7 (теорема Гамбургера). Из первого равенства (3.22) вытекает, что расходимость ряда (1.16) равносильна тому, что $\mathring{L} = +\infty$, т.к. $\mathring{L} = \sum_{j=0}^{\infty} l_j$. Остается применить следствие Основной теоремы.

b) Теорема Карлемана ([16]; [3], гл. I, Дополнения и задачи, п. 1). *Для определенности СПМГ* (1.1) *достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_n)^{-1}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Согласно (3.16),

$$(b_n)^{-1} = \sqrt{l_n l_{n+1}}\sin(\theta_{n+1}-\theta_n) \leqslant \sqrt{l_n l_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(l_n + l_{n+1}),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$\mathring{L} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(l_n + l_{n+1}) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}(b_n)^{-1} = \infty.$$

c) Теорема Денниса и Уолла ([17]; [3], гл. I, Дополнения и задачи, п. 2). *Для определенности СПМГ* (1.1) *достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_{n+1}|}{b_n b_{n+1}}. \tag{3.30}$$

Доказательство. Из (3.16) и (3.17) вытекает, что

$$\frac{|a_{n+1}|}{b_n b_{n+1}} = \sqrt{l_n l_{n+2}}\,|\sin(\theta_{n+2}-\theta_n)| \leqslant \frac{1}{2}(l_n + l_{n+2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поэтому из расходимости ряда (3.30) следует расходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(l_n + l_{n+2})$, а значит и ряда $\sum_{n=0}^{\infty} l_n$, т.е. бесконечность $\mathring{L}$.

7. В заключение отметим, что из (3.28) и того, что $\theta_{n+1} \not\equiv \theta_n \pmod{\pi}$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ вытекает следующая теорема теории определителей.

Теорема 3.3. *Если* $D_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots, m+1$, *то* $C_{n+1}\mathcal{E}_n - C_n\mathcal{E}_{n+1} \neq 0$ *при* $n = 1, 2, \ldots, m$, *где* $D_n, \mathcal{E}_n, C_n$ *определены равенствами* (1.3), (3.24), (3.26).

Автор не знает непосредственного доказательства этой теоремы.

Литература

1. М. Г. Крейн, *Об одном обобщении исследований Стилтьеса.* Докл. АН СССР, **87**, No. 6 (1952), 881–884.
2. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *О спектральных функциях струны. Доп. II к кн.:* Ф. Аткинсон*, Дискретные и непрерывные граничные задачи.* Мир, М., 1968, сс. 648–737.
3. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* Физматгиз, М., 1961.
4. М. Г. Крейн, *Об одном специальном классе целых и мероморфных функций.* — В кн.: Н. Ахиезер, М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ Украины, 1938, с. 208–252.
5. И. С. Кац, М. Г. Крейн, *R-функции – аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя, Доп. I к кн.:* Ф. Аткинсон*, Дискретные и непрерывные граничные задачи.* Мир, М., 1968, сс. 629–647.
6. H. Hamburger, *Über eine Entweiterung des Stiltjesschen Momentenproblems.* Math. Ann. **81** (1920), **82** (1921).
7. R. Newanlinna, *Asimptotische Entwickelungen beschränkter Functionen and das Stiltjessche Momentenproblem.* Ann. Acad. Sci. Fennicae **A18** (1922).
8. L. De Branges, *Some Hilbert spaces of entire functions.* Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 259–295.
9. L. De Branges, *Some Hilbert spaces of entire functions.* Trans. Amer. Math. Soc. **99** (1961), 118–152.
10. L. De Branges, *Hilbert spaces of entire functions.* New Jersey: Printice Hall, 1967.
11. M. G. Krein, H. Langer, *Continuation of Hermitian positive definite functions and related questions.* Неопубликованная рукопись.
12. И. С. Кац, *Линейные отношения, порождаемые каноническими дифференциальными уравнениями.* Функц. анализ и его прил. **17**, вып. 4 (1983), 86–87.
13. И. С. Кац, *Линейные отношения, порождаемые каноническим дифференциальным уравнением на интервале с регулярным концом, и разложимость по собственным функциям.* Деп. в УкрНИИНТИ №1453 (1984) (ВИНИТИ “Депонированные научные работы” №1 (195) (1985) б.о. 720).
14. И. С. Кац, *О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями.* Зап. НИИ матем. и мех. ХГУ и Харьковского матем. о-ва **22** (1950), 95–113.
15. Л. Б. Голинский, И. В. Михайлова, *Гильбертовы пространства целых функций как объект J-теории.* Физ.-техн. ин-т низких температур АН УССР, препринт 28-80, Харьков, 1980.
16. T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques.* Paris, 1926.
17. J. J. Dennis, H. S. Wall, *The limit-circle case for a positive definite J-fraction.* Duke Math. J. **12** (1945).

Kac I. S. Inclusion of Hamburger's power moment problem in the spectral theory of the canonical systems.

Hamburger's power moment problem (shortly HPMP) that has a solution with infinitely many points of increase is shown to be the problem of finding all spectral functions for some canonical system of the linear differential equations of phase dimension 2 and with Hamiltonian of special class. A rule for construction of this Hamiltonian using the data of HPMP is given. In this connection the Hamburger criterion for the uniqueness of a solution of HPMP acquires a "natural form", and some results of the classical HPMP theory receive simple proofs.

Одесская государственная академия
пищевых технологий

Поступило 4 апреля 1999 г.