Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

К. Г. Межевич, Н. А. Широков

ОДИН КЛАСС ФУНКЦИЙ НА ДИЗЪЮНКТНОЙ СИСТЕМЕ ОТРЕЗКОВ

К настоящему моменту существует всего несколько работ [7–9], в которых класс функций на несвязных подмножествах комплексной плоскости описывается скоростью полиномиальных приближений. В настоящей статье мы пополняем список подобных пространств.

1. Формулировка задачи и начальные приготовления.

Множество E является дизъюнктным объединением отрезков $S_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots, m$, на комплексной плоскости C, α_k – произвольные числа, $k = 1, 2, \dots, m$, $0 < \alpha_k < 1$.

Мы хотим найти класс функций f таких, что для каждого $n = 1, 2, \dots$ существуют полиномы $P_n(x)$ степени, не превосходящей n, такие, что

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant c_f \frac{1}{n^{\alpha_k}}, \quad x \in S_k, \tag{1}$$

c_f не зависит от n и x.

Окажется, что на E этот класс такой же, как для отдельно взятого отрезка.

Для $S_k = [a_k, b_k]$ положим:

$$S_k^{(1)} = \left[a_k, a_k + \frac{1}{4}(b_k - a_k)\right],$$

$$S'_k = \left[a_k + \frac{1}{4}(b_k - a_k), a_k + \frac{3}{4}(b_k - a_k)\right], \tag{1.1}$$

$$S_k^{(2)} = \left[b_k - \frac{1}{4}(b_k - a_k), b_k\right].$$

Теперь определим класс функций f так, чтобы выполнялись условия:

$$H(E;\alpha_1,\dots,\alpha_m)=$$

$$=\begin{cases} \text{на } S'_k : |f(x)-f(y)|\leqslant c\cdot|x-y|^{\alpha_k}, \\ \text{на } S_k^{(1)} : |f(x)-f(y)|\leqslant c\cdot\left|\sqrt{|x-a_k|}-\sqrt{|y-a_k|}\right|^{\alpha_k}, \\ \text{на } S_k^{(2)} : |f(x)-f(y)|\leqslant c\cdot\left|\sqrt{|x-b_k|}-\sqrt{|y-b_k|}\right|^{\alpha_k}, \\ \quad k=1,\dots,m. \end{cases} \tag{1.2}$$

Теорема. *Во введенных обозначениях и при сделанных предположениях, для того, чтобы функцию f, определенную на множестве E, можно было приблизить полиномами, как в (1), необходимо и достаточно, чтобы $f\in H(E;\alpha_1,\dots,\alpha_m)$.*

Трудность представляет только утверждение о достаточности, поскольку необходимость легко следует из классических обратных теорем [1].

Итак, имеем функцию $f\in H(E;\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, построим требуемый полином P_n в несколько этапов.

2. Построение P_n: геометрический этап и полиномы $g_n(z)$.

В соответствии с (1.1), $S'_k\subset S_k$ – отрезки вдвое меньшей длины с теми же серединами, что и S_k; возьмем любые точки $z_k\in S'_k$ и построим некоторый контиуум $\Gamma(z_1,\dots,z_m)\supset E$. Прежде всего выберем такое $\delta>0$, чтобы прямоугольники U_k, в которых S_k является средней линией, а длина второй стороны равна 4δ, попарно не пересекались; $U'_k\subset U_k$ – прямоугольники, в которых S_k по-прежнему является средней линией, а длина второй стороны равна 2δ. Выберем некоторую точку A, лежащую вне всех U_k, $k=1,2,\dots,m$. Соединим A с одной из вершин T_k прямоугольников U_k C^2-гладкими попарно непересекающимися кривыми, объединение которых обозначим через γ_0. Далее, обозначим через $\tau_k(z_k)$ отрезок длины δ, перпендикулярный S_k, концом которого является точка z_k, и расположенный по ту же сторону S_k, что и выбранная ранее вершина T_k прямоугольника U_k. Соединим вершину T_k и конец отрезка $\tau_k(z_k)$, отличный от z_k, C^2- гладкой кривой $\gamma_k\subset U_k\setminus U'_k$, радиус кривизны которой ограничен снизу некоторым числом $\sigma_0>0$, не зависящим от z_k. Окончательно полагаем

$$\Gamma(z_1,\dots,z_m)=\bigcup_{k=1}^{m}(S_k\cup\tau_k(z_k)\cup\gamma_k)\cup\gamma_0.$$

Продолжим функцию f с множества E на $\Gamma(z_1,\dots,z_m)$. Если $z\in\gamma_k$, то пусть

$$f(z)=f(z_k)\cdot\left(\frac{z-T_k}{z_k-T_k}\right).$$

Если же $z\in\gamma_0$, то полагаем $f(z)=0$.

Пусть $C\setminus\Gamma(z_1,\dots,z_m)=\Omega(z_1,\dots,z_m)$. Конформное отображение области $\Omega(z_1,\dots,z_m)$ на внешность круга $|\lambda|>1$ обозначим через $\varphi_{z_1,\dots,z_m}(z)$, считая, что

$$\varphi_{z_1,\dots,z_m}(\infty)=\infty,\quad \lim_{z\to\infty}\frac{\varphi_{z_1,\dots,z_m}(z)}{z}>0;$$

$z=\psi_{z_1,\dots,z_m}(\lambda)$ – обратное отображение.

Пусть $R=1+\frac{1}{n}$, где n соизмеримо со степенью будущего полинома. Положим

$$\xi_{R,\theta}(\zeta)=\xi_{R,\theta}(\zeta_{\{z_1,\dots,z_m\}})=\psi\big(\mathrm{Re}^{-i\theta}\,\varphi(\zeta)\big),$$
$$\text{где}\ \ \zeta\in\Omega(z_1,\dots,z_m), \tag{2}$$

здесь и далее для краткости пишем $\varphi=\varphi_{z_1,\dots,z_m}$, $\psi=\psi_{z_1,\dots,z_m}$.

Пусть $\gamma(z_1,\dots,z_m)$ – это путь, состоящий в обходе континуума $\Gamma(z_1,\dots,z_m)$ в положительном направлении. Выберем большое натуральное p (не зависящее от z) и еще большее ν (более определено мы скажем о них позже, в (11)), и построим полином $g_n(z;z_1,\dots,z_m)$.

Сначала пусть $\zeta\in\gamma(z_1,\dots,z_m)$, $z\in E$,

$$K(z,\zeta,\theta)=\frac{1}{\xi_{R,\theta}(\zeta)-z}+\frac{-\zeta+\xi_{R,\theta}(\zeta)}{(\xi_{R,\theta}(\zeta)-z)^2}+\dots+\frac{(-\zeta+\xi_{R,\theta}(\zeta))^{p-1}}{(\xi_{R,\theta}(\zeta)-z)^p}$$

и

$$F(z,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(z_1,\dots,z_m)}f(\zeta)K(z,\zeta,\theta)d\zeta,$$

где функция f продолжена на $\Gamma(z_1,\dots,z_m)$. $K(z,\zeta,\theta)$ зависит от отображения $\Omega(z_1,\dots,z_m)$ на внешность единичного круга $|R|>1$, причем если взять ζ_1 и ζ_2 на разных стороных одного разреза, то значения $K(z,\zeta_1,\theta)$ и $K(z,\zeta_2,\theta)$ могут не совпадать. Пусть

$$J_n(\theta)=C_{n,\nu}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{2\nu},\quad C_{n,\nu}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{2\nu}d\theta=1.$$

Определим полином $g_n(z)$ следующей формулой:

$$g_n(z)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_n(\theta)F(z,\theta)\,d\theta,\quad g_n(z)=g_n(z;z_1,\dots,z_m).$$

Построенный нами континуум не имеет внутренних точек. Однако временно допустим, что f аналитична в малой окрестности S_k. Тогда к f можно применить формулу Коши. А именно, пусть τ_k – близкий контур, окружающий S_k; γ_{τ_k} – путь обхода континуума $\Gamma(z_1,\dots,z_m)\cup\tau_k$ в положительном направлении. Тогда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\tau_k}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Проделаем теперь некоторые выкладки для последующей оценки разности g_n-f. Так как

$$F(z,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\tau_k}}f(\zeta)K(z,\zeta,\theta)\,d\zeta\quad\text{при}\quad z\in S_k,$$

то

$$F(z,\theta)-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\tau_k}}f(\zeta)\left(K(z,\zeta,\theta)-\frac{1}{\zeta-z}\right)d\zeta,$$

$$K(z,\zeta,\theta)-\frac{1}{\zeta-z}=$$

$$=\frac{1}{\xi_{R,\theta}-z}+\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{(\xi_{R,\theta}-z)^2}+\dots+\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^{p-1}}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}-\frac{1}{\zeta-z}=$$

$$=-\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p(\zeta-z)},$$

т.е.

$$F(z,\theta)-f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\tau_k}}f(\zeta)\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p(\zeta-z)}\,d\zeta.$$

Запишем для удобства $f(\zeta) = f(z) + \varphi(\zeta, z)$. Получаем:

$$F(z,\theta) - f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\tau_k}} f(z)\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p(\zeta-z)}\,d\zeta -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\tau_k}} \frac{\varphi(\zeta,z)}{\zeta-z}\left(\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right)^p d\zeta. \tag{3}$$

Пусть

$$\widetilde{\gamma}_l = \tau_l(z_l)\cup\gamma_l\cup S_l, \quad \widetilde{\gamma}'_k = \tau'_k(z_k)\cup\gamma_k\cup\tau_k,$$

где $\tau'_k(z_k)$ – часть отрезка $\tau_k(z_k)$, лежащая вне τ_k. Тогда:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{\tau_k}} \frac{\varphi(\zeta,z)}{z-\zeta}\left(\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right)^p d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}'_{\tau_k}} \ldots + \sum_{l\neq k}\int\limits_{\gamma_l}\ldots + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_k}\ldots. \tag{4}$$

В нашем случае более трудное слагаемое в правой части в (4) имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}'_{\tau_k}} \frac{\varphi(\zeta,z)}{z-\zeta}\left(\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right)^p d\zeta.$$

Этот интеграл сходится, т.к. мы можем его оценить:

$$\int\limits_{\gamma_k}\frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta-z|}\,|d\zeta| \leqslant \int\limits_0^{\gamma_k}\frac{w_k(t)}{t}\,dt$$

в силу оценки

$$|f(\zeta)-f(z)| \leqslant w_k(|\zeta-z|), \tag{5}$$

где w_k – функция, взятая из правой части (1.2).

Из сходимости интеграла следует, что можно в (3) и (4) перейти к пределу при ширине, стремящейся к нулю: $\tau_k \to 0$.

Теперь получаем:

$$F(z,\theta) - f(z) = -\frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}'_{\tau_k}} \frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p(\zeta-z)}\,d\zeta -$$

$$-\sum_{l\neq k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}\varphi(\zeta,z)\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p(\zeta-z)}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}_k}\varphi(\zeta,z)\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p(\zeta-z)}\,d\zeta. \qquad (6)$$

Известно [2, 3], что $F(z,\theta)$ будет полиномом, если проинтегрировать по θ от 0 до 2π.

3. Оценка уклонения $g_n - f$.

Соотношение (6) влечет:

$$g_n(z)-f(z)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_n(\theta)(F(z,\theta)-f(z))\,d\theta,$$

и можно записать:

$$g_n(z;z_1,\ldots,z_m)-f(z)=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_n(\theta)\,d\theta\left(-\frac{f(z)}{2\pi i}\right)\int\limits_{\gamma\{z_1,\ldots,z_m\}}\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}+$$

$$+\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_n(\theta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k}\frac{f(\zeta)-f(z)}{z-\zeta}\left(\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right)^p d\zeta\right)d\theta-$$

$$-\sum_{l\neq k}\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_n(\theta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}(f(\zeta)-f(z))\cdot\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right)d\theta. \qquad (7)$$

Оценим $g_n - f$, начиная с первого слагаемого. Прежде всего, $|f(z)|\leqslant M$; по теореме Коши

$$\int\limits_{\gamma\{z_1,\ldots,z_m\}}\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\int\limits_{K}\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

где K – окружность, внутри которой лежит $\Gamma(z_1,\ldots,z_m)$, т.е. существует число $b>0$ такое, что $|\xi_{R,\theta}-z|\geqslant b$ для любого θ.

Тогда:

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}J_n(\theta)\,d\theta\int\limits_{K}\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)\frac{1}{b^{p+1}}\int\limits_{K}|\xi_{R,\theta}-\zeta|^p\,|d\zeta| \leqslant c_{R,\nu}\cdot\frac{1}{b^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}.$$

При $p \geqslant 2$

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)\,d\theta\int\limits_{K}\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\,d\zeta\right| \leqslant c\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Теперь оценим третье слагаемое: при $z\in S_k$

$$\left|\sum_{l\neq k}\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}(f(\zeta)-f(z))\cdot\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l\neq k}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_l}(f(\zeta)-f(z))\cdot\frac{(\xi_{R,\theta}-\zeta)^p}{(\xi_{R,\theta}-z)^p}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l\neq k}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta\int\limits_{\gamma_l}|f(\zeta)-f(z)|\cdot\left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p\cdot\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|}.$$

При $\zeta\in\gamma_l$, $z\in S_k$ существует число b_1 такое, что $|\zeta-z|\geqslant b_1>0$, и при $l\neq k$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta\int\limits_{\gamma_l}|f(\zeta)-f(z)|\cdot\left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p\cdot\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{b_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta\int\limits_{\gamma_l}\left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p\cdot|d\zeta|. \tag{8}$$

Пусть $E_{l,k}$ – множество всех $\theta\in[-\pi,\pi]$ таких, что при $\zeta\in\gamma_l$ имеем $\xi_\theta(\zeta)\in S_k\cup\tau_k$, где S_k – двусторонние отрезки. Из того, что $\gamma_0\cap(S_k\cup\tau_k)=\varnothing$ и $\gamma_l\cap(S_k\cup\tau_k)=\varnothing$, получаем существование числа $\delta>0$, не зависящего от $z_1,\dots,z_m$, такого, что $|\theta|\geqslant\delta$ при $\theta\in E_{l,k}$.

Учитывая это, продолжим (8):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta\int\limits_{\gamma_l}\left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p\cdot|d\zeta| =$$

$$= \int\limits_{E_{l,k}} J_n(\theta)d\theta \int\limits_{\gamma_l} \left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p \cdot |d\zeta| +$$

$$+ \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus E_{l,k}} J_n(\theta)d\theta \int\limits_{\gamma_l} \left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p \cdot |d\zeta|. \tag{9}$$

Оценим каждое слагаемое (9) по отдельности.

Пусть величина c_1 такова, что $|\xi_{R,\theta}-\zeta| \leqslant c_1$. Тогда

$$\int\limits_{E_{l,k}} J_n(\theta)d\theta \int\limits_{\gamma_l} \left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p \cdot |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1^p}{\rho_R^p(z)} \int\limits_{E_{l,k}} J_n(\theta)d\theta \int\limits_{\gamma_l} |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2 \cdot c_1^p}{\rho_R^p(z)} \cdot \int\limits_{\delta}^{\pi} b_\nu \left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{2\nu} d\theta. \tag{10}$$

При этом $\rho_R(z) \geqslant c_3 \cdot \frac{1}{n^2}$, $b_\nu \asymp \frac{1}{n^{2\nu-1}}$.

Отсюда при $\nu \geqslant p+1$, $a_\nu = \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{d\theta}{(\sin\theta)^{2\nu}}$ имеем

$$\frac{c_2 \cdot c_1^p}{\rho_R^p(z)} \cdot \int\limits_{\delta}^{\pi} b_\nu \left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{2\nu} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_2 \cdot c_1^p}{c_3^p} \cdot n^{2p} \cdot c_4 \cdot \frac{1}{n^{2\nu-1}} \cdot \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{d\theta}{(\sin\theta)^{2\nu}} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot a_\nu = a \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Теперь выберем b_1 так, что $|\zeta - z| \geqslant b_1 > 0$, $k \neq l$.

Тогда при $p \geqslant 4$

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus E_{l,k}} J_n(\theta)d\theta \int\limits_{\gamma_l} \left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p \cdot |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{b_1^p}\int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta \int_{\gamma_l} |\xi_{R,\theta}-\zeta|^p \cdot |d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant c\cdot \frac{1}{b_1^p}\int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)d\theta \int_{\gamma_l} |\xi_{R,\theta}-\zeta|^p \cdot |d\zeta| \leqslant c\cdot\frac{1}{b_1^p}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

И, наконец, оценим второе слагаемое:

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{f(\zeta)-f(z)}{z-\zeta}\left(\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right)^p d\zeta\right)d\theta.$$

При $z\in S_k'$ имеем $|f(\zeta)-f(z)|\leqslant c\cdot|\zeta-z|^{\alpha_k}$, поэтому

$$|I|\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)\,d\theta\int_{\gamma_k}\frac{|\zeta-z|^{\alpha_k}}{|\zeta-z|}\cdot\left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p\cdot|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_k}|\zeta-z|^{\alpha_k-1}\cdot|d\zeta|\cdot\int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)\left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p\cdot|d\theta|.$$

В соответствии с общими результатами В. И. Белого [4]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)\left|\frac{\xi_{R,\theta}-\zeta}{\xi_{R,\theta}-z}\right|^p\cdot d\theta\leqslant c\cdot\left|\frac{\xi_R-\zeta}{\xi_R-z}\right|^p,\quad \text{если}\quad \nu>10(p+1). \tag{11}$$

Отсюда

$$|I|\leqslant c\cdot\int_{\gamma_k}|\zeta-z|^{\alpha_k-1}\left|\frac{\xi_R-\zeta}{\xi_R-z}\right|^p\cdot|d\zeta|.$$

Далее, аналогично [5] получается, что

$$c\cdot\int_{\gamma_k}|\zeta-z|^{\alpha_k-1}\left|\frac{\xi_R-\zeta}{\xi_R-z}\right|^p\cdot|d\zeta|\leqslant c\cdot\rho_R^{*\alpha_k}(z;z_1,\dots,z_m),$$

где $\rho_R^*(z;z_1,\dots,z_m)$ – максимальное из трех возможных расстояний до дуг линий уровня, если p достаточно велико в соответствии со свойствами $\Gamma(z_1,\dots,z_m)$.

Итак, если $z \in S'_k$, то

$$|I| \leqslant c \cdot \rho_R^{*\alpha_k}(z; z_1, \ldots, z_m). \tag{12}$$

Пусть $z \in S_k \setminus S'_k$, z вблизи конца a_n:

$$|f(\zeta) - f(z)| \leqslant c \cdot \left| \sqrt{|\zeta - a_k|} - \sqrt{|z - a_k|} \right|^{\alpha_k}.$$

Имеем

$$|I| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta)\, d\theta \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{\left| \sqrt{|\zeta - a_k|} - \sqrt{|z - a_k|} \right|^{\alpha_k}}{|\zeta - z|} \cdot \left| \frac{\xi_{R,\theta} - \zeta}{\xi_{R,\theta} - z} \right|^p \cdot |d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{\left| \sqrt{|\zeta - a_k|} - \sqrt{|z - a_k|} \right|^{\alpha_k}}{|\zeta - z|} \cdot |d\zeta| \cdot \int_{-\pi}^{\pi} J_n(\theta) \left| \frac{\xi_{R,\theta} - \zeta}{\xi_{R,\theta} - z} \right|^p \cdot |d\theta| \leqslant$$

$$\leqslant c \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{\left| \sqrt{|\zeta - a_k|} - \sqrt{|z - a_k|} \right|^{\alpha_k}}{|\zeta - z|} \cdot \left| \frac{\xi_R - \zeta}{\xi_R - z} \right|^p \cdot |d\zeta|.$$

Оценка последнего выражения хорошо известна [6]:

$$c \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{\left| \sqrt{|\zeta - a_k|} - \sqrt{|z - a_k|} \right|^{\alpha_k}}{|\zeta - z|} \cdot \left| \frac{\xi_R - \zeta}{\xi_R - z} \right|^p \cdot |d\zeta| \leqslant c \cdot \frac{1}{n^{\alpha_k}}. \tag{13}$$

Из всего вышесказанного следует, что

$$|g_n(z; z_1, \ldots, z_m) - f(z)| \leqslant c \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{n^{\alpha_k}}, & z \in S_k \setminus S'_k, \\ \rho_R^{*\alpha_k}(z; z_1, \ldots, z_m), & z \in S'_k. \end{cases}$$

4. Полином P_n и оценка разности $f - P_n$.

Окончательно полагаем:

$$P_n(z) = \frac{1}{|S'_1|} \int_{S'_1} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S'_2|} \int_{S'_2} |dz_2| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S'_m|} \int_{S'_m} |dz_m| \cdot g(z; z_1, \ldots, z_m).$$

Оценим разность $f - P_n$.

Заметим, что

$$1 = \frac{1}{|S_1'|}\int\limits_{S_1'} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S_2'|}\int\limits_{S_2'} |dz_2| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S_m'|}\int\limits_{S_m'} |dz_m| \cdot 1,$$

поэтому

$$P_n(z) - f(z) = \\ = \frac{1}{|S_1'|}\int\limits_{S_1'} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S_2'|}\int\limits_{S_2'} |dz_2| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S_m'|}\int\limits_{S_m'} |dz_m| \cdot (g(z; z_1, \ldots, z_m) - f(z))$$

и

$$|P_n(z) - f(z)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{|S_1'|}\int\limits_{S_1'} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S_2'|}\int\limits_{S_2'} |dz_2| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S_m'|}\int\limits_{S_m'} |dz_m| \cdot \big|g(z; z_1, \ldots, z_m) - f(z)\big|.$$

Рассмотрим два случая:

(а) $z \in S_k \setminus S_k''$, $S_k'' \supset S_k'$. Тогда (13) дает

$$\big|g(z; z_1, \ldots, z_m) - f(z)\big| \leqslant \frac{c}{n^{\alpha_k}}$$

и

$$|P_n(z) - f(z)| \leqslant \frac{1}{|S_1'|}\int\limits_{S_1'} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S_2'|}\int\limits_{S_2'} |dz_2| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S_m'|}\int\limits_{S_m'} |dz_m| \cdot \frac{c}{n^{\alpha_k}} = \frac{c}{n^{\alpha_k}}.$$

(б) $z \in S_k''$. Имеем оценку (12); учитывая, что

$$\rho_R^*(z; z_1, \ldots, z_m) \asymp \frac{h}{\sqrt{|z - z_k|^2 + h}}, \quad h = \frac{1}{n},$$

получаем

$$|g(z; z_1, \ldots, z_m) - f(z)| \leqslant c \cdot \rho_R^{*\alpha_k}(z; z_1, \ldots, z_m) \leqslant c_1 \cdot \frac{1}{n^{\alpha_k}} \cdot \frac{1}{|z - z_k|^{\alpha_k}},$$

и далее

$$|P_n(z) - f(z)| \leqslant \frac{1}{|S_1'|}\int\limits_{S_1'} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S_2'|}\int\limits_{S_2'} |dz_2| \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|S'_m|} \cdot \int\limits_{S'_m} |dz_m| \cdot c_1 \cdot \frac{1}{n^{\alpha_k}} \frac{1}{|z-z_k|^{\alpha_k}} =$$

$$= \frac{1}{|S'_1|} \int\limits_{S'_1} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S'_2|} \int\limits_{S'_2} |dz_2| \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|S'_k|} \int\limits_{S'_k} \frac{c_1}{n^{\alpha_k}} \cdot \frac{1}{|z-z_k|^{\alpha_k}} |dz_k| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S'_m|} \int\limits_{S'_m} |dz_m|.$$

Так как

$$\frac{1}{|S'_k|} \int\limits_{S'_k} \frac{|dz_k|}{|z-z_k|^{\alpha_k}} \leqslant B, \qquad z \in S''_k,$$

получаем

$$\frac{1}{|S'_1|} \int\limits_{S'_1} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S'_2|} \int\limits_{S'_2} |dz_2| \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|S'_k|} \int\limits_{S'_k} \frac{c_1}{n^{\alpha_k}} \cdot \frac{1}{|z-z_k|^{\alpha_k}} |dz_k| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S'_m|} \int\limits_{S'_m} |dz_m| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|S'_1|} \int\limits_{S'_1} |dz_1| \cdot \frac{1}{|S'_2|} \int\limits_{S'_2} |dz_2| \cdot \ldots \cdot \frac{1}{|S'_m|} \int\limits_{S'_m} |dz_m| \cdot \frac{B \cdot c_1}{n^{\alpha_k}} = \frac{B \cdot c_1}{n^{\alpha_k}}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* Наука, Москва, 1977.
2. Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, *О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами,* Изв. АН Арм. ССР **6**, No. 4 (1971), 311–341.
3. В. Н. Дзядык, *О применении обобщенных полиномов Фабера к приближению интегралов типа Коши и функций класса A^r в областях с гладкой и кусочно-гладкой границей,* Укр. мат. журн. **24**, No. 1 (1972), 3–19.
4. В. И. Белый, *Конформные отображения и аппроксимация функций в областях с квазиконформной границей.* — Мат. сб. **102**, No. 03 (1977), 331–361.
5. Н. А. Широков, *Равномерное приближение аналитических функций полиномами в области ограниченного граничного вращения без нулевых внешних углов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **65** (1976), 199–202.

6. Ю. И. Волков, *О конструктивной характеристике функций комплексного переменного в областях с кусочно-гладкой границей.* — Укр. мат. журн. **17,** No. 3 (1965), 115–119.
7. Нгуен Ту Тхань, *О приближении функций полиномами на замкнутом множестве с углами, дополнение которого конечносвязно.* — Вестник ЛГУ No. 19 (1981), 30–35.
8. Н. А. Широков, *Приближение непрерывных аналитических функций в областях с ограниченным граничным вращением.* — ДАН СССР **228** (1976), 808–812.
9. Н. А. Широков, *Приближение многочленом на компактах с бесконечно-связным дополнением.* — Алгебра и Анализ **10,** No. 1 (1998), 248–264.

Mezhevitch K. G., Shirokov N. A. A class of functions on a disjoint collection of segments.

Let $E = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$, where S_k are disjoint segments, and let $\{\alpha_k\}$ be a collection of positive numbers, $0 < \alpha_k < 1$. We describe a class of functions f on E that admit approximation by polynomials of degree $\leqslant n$ with the rate $\frac{1}{n^{\alpha_k}}$ on S_k.

Российский
государственный
педагогический
университет
им. А. И. Герцена

С.-Петербургский
государственный
электротехнический
университет

Поступило 19 апреля 1999 г.