Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

Е. Л. Пацевич

КВАЗИКОНФОРМНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННО-СПИРАЛЕОБРАЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Введение. Пусть B есть внешность замкнутой жордановой кривой $\mathcal{L}$ в плоскости z. Дополнение $\overline{B}$ до полной плоскости обозначим через B^-. Предположим, что кривая $\mathcal{L}$ является квазиокружностью.

Под обобщенными линиями уровня области B будем понимать два семейства кривых $\chi_\rho = \{\Gamma_\rho, 1 \leqslant \rho < \infty\}$ и $\chi_\theta = \{\widetilde{\Gamma}_\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, $\mathcal{L} = \Gamma_1$, обладающие тем свойством, что существует биекция между точками области B и точками пересечения двух кривых из разных семейств. Предполагается, что кривые семейства χ_θ соединяют $\mathcal{L}$ с бесконечно удаленной точкой, и $\Gamma_{\rho_1} \cap \Gamma_{\rho_2} = \varnothing$ при $\rho_1 \neq \rho_2$, $\overline{\widetilde{\Gamma}}_{\theta_1} \cap \overline{\widetilde{\Gamma}}_{\theta_2} = \{z_0, \infty\}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$, причем $\widetilde{\Gamma}_0 = \widetilde{\Gamma}_{2\pi}$, $z_0 \in B^-$. Без ограничения общности положим $z_0 = 0$.

Определим отображение $z_r(z)$. Именно, если $\{z\} = \Gamma_\rho \cap \widetilde{\Gamma}_\theta$ для некоторых фиксированных ρ и θ из указанных промежутков, то $\{z_r(z)\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma_{\rho r} \cap \widetilde{\Gamma}_\theta$, здесь r фиксировано, $1 < r < \infty$. И наоборот, если $\{z_r\} = \Gamma_\rho \cap \widetilde{\Gamma}_\theta$, то $\{z(z_r)\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma_{\rho r^{-1}} \cap \widetilde{\Gamma}_\theta$. Нас интересуют обобщенные линии уровня области B, удовлетворяющие условиям: производные $\partial z_r/\partial z$ и $\partial z_r/\partial \overline{z}$ непрерывны в $\overline{B}$, а их модули при $|z| \to \infty$ стремятся к r. Эти требования будут важны в приложениях. Обобщенные линии уровня, удовлетворяющие этим условиям, будем называть допустимыми.

Целью настоящей работы являются примеры спиралеобразных и обобщенно-спиралеобразных областей, для которых уравнения допустимых семейств обобщенных линий уровня записываются явно в полярных и декартовых координатах, а также построение для их граничных кривых квазиконформных отражений.

В первом пункте работы дается определение областей $B(\mathcal{F})$ и $B(f)$, во втором вводится новое понятие обобщенно-спиралеобразной области. Третий раздел статьи посвящен построению квазиконформного отражения в явном виде для граничных кривых указанных ранее областей. В четвертом пункте приведены примеры спиралеобразных и обобщенно-спиралеобразных областей.

1°. Области $B(\mathcal{F})$ и $B(f)$. Предположим, что параметрическое уравнение замкнутой жордановой кривой $\mathcal{L}$ имеет вид $\mathcal{L} = \{z : z = R(\theta)e^{i\mu(\theta)}, \mathcal{F}(R, \mu) = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. Пусть функция $\mathcal{F}$ при каждом фиксированном θ инъективна относительно пары (R, μ), значения ее при каждом θ являются значениями в точке (R, μ) однозначной функции двух переменных $\mathcal{F}(\rho, \varphi) : \mathcal{P} = (\alpha_1, \beta_1) \times \langle\alpha_2, \beta_2\rangle \to [0, 2\pi]$, и $R_\theta = dR/d\theta$ существует. Если R_θ на отрезке $[0, 2\pi]$ существует почти всюду, то все соотношения, в которых участвует эта величина, будут верны за исключением множества меры нуль. Обозначим $|z| = \rho$, $\arg z = \varphi$ (не обязательно главное значение), и предположим, что $\mathcal{F}(\rho, \varphi)$ непрерывна на $\mathcal{P}$, частные производные $\mathcal{F}'_\rho$, $\mathcal{F}'_\varphi$ непрерывны в $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}'_\varphi \neq 0$, здесь $\alpha_1 < \min R(\theta)$, $\beta_1 > \max R(\theta)$ при $\theta \in [0, 2\pi]$, $(\alpha_1, \beta_1) \subseteq (0, \infty)$, $\langle\alpha_2, \beta_2\rangle \subseteq (-\infty, \infty)$. При выполнении этих требований будем говорить, что функция $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям (A), а внешность кривой $\mathcal{L}$ назовем областью $B(\mathcal{F})$.

Геометрически это означает, что граница $\mathcal{L} = \partial B(\mathcal{F})$ может быть погружена в кольцевую область $G = \{z : \alpha_1 < |z| < \beta_1, \arg z \in \langle\alpha_2, \beta_2\rangle\}$, покрытую однопараметрическим семейством χ_θ, причем $\widetilde{\Gamma}_{\theta_1} \cap \widetilde{\Gamma}_{\theta_2} = \varnothing$ при $\theta_1 \neq \theta_2$, и через каждую точку области G проходит только одна кривая этого семейства. Дополнительно предположим, что если $(\alpha_1, \beta_1) = (0, \infty)$, то $\overline{\widetilde{\Gamma}}_{\theta_1} \cap \overline{\widetilde{\Gamma}}_{\theta_2} = \{0, \infty\}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$.

Из определения области $B(\mathcal{F})$ следует, что кривая $\mathcal{L}$ пересекает каждую кривую семейства χ_θ только один раз. Из условий (A) делаем вывод, что в любой содержащейся в области G окрестности точки (R, μ) уравнение $\mathcal{F}(\rho, \varphi) = \theta$ при каждом фиксированном θ определяет φ как однозначную непрерывную функцию от ρ с непрерывной производной φ'_ρ и, кроме того, $\varphi'_\theta \neq 0$.

Рассмотрим частный случай области $B(\mathcal{F})$, когда $\mathcal{F}(\rho, \varphi) = f_1(\varphi) + kf_2(\rho)$, $k = \operatorname{tg}\sigma$, $|\sigma| < \pi/2$, в предположении, что 1) $f_1(\varphi) : (a, b) \to (a_1, b_1)$ есть биекция, производная которой $f_1'(\varphi)$ непрерывна и не равна нулю на (a, b); 2) $f_2(\varphi) : (a_2, b_2) \to (a_1, b_1)$ имеет непрерывную производную на (a_2, b_2). Интервалы (a, b), (a_1, b_1) могут быть бесконечными в обе стороны, $(a_2, b_2) \subset (0, \infty)$. При выполнении этих условий будем говорить, что функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\rho)$ удовлетворяют условиям (A_1), а область B будем обозначать через $B(f)$.

2°. Обобщенная спиралеобразность. Напомним определение звездообразной области B^*. Область B^- называется звездообразной относительно $z_0 = 0$, если при обходе ее граничной точки z в положительном направлении $\arg z$ возрастает, т.е.

$$\frac{d}{d\psi}\arg h(e^{i\psi}) = \frac{d}{d\psi}\operatorname{Im}\ln h(e^{i\psi}) = \operatorname{Re} e^{i\psi}\frac{h'(e^{i\psi})}{h(e^{i\psi})} > 0,$$

здесь $h(\omega)$ – аналитическая в $D = \{\omega : |\omega| < 1\}$, непрерывная в $\overline{D}$ функция, отображающая круг D на область B^-.

Из определения области $B(f)$ следует, что функция $\varphi(\rho,\theta) = f_1^{-1}(\theta - kf_2(\rho))$ дифференцируема по обоим аргументам и $d\varphi/d\theta \neq 0$. При фиксированном r, $0 < r < 1$, обозначим $\omega_r = re^{i\psi}$, $\varphi_r = \arg h(\omega_r)$, $\rho_r = |h(\omega_r)|$. Функции $h(\omega_r)$ и $\varphi_r = f_1^{-1}(\theta - kf_2(\rho_r))$ устанавливают некоторое соответствие между ω_r и θ. Предположим, что $\mathcal{L}$ – простая кривая, тогда $h(\omega)$ однолистна в D, и по принципу соответствия границ при конформном отображении функция $\theta = \theta(\psi)$, определяемая из соотношения

$$h(re^{i\psi}) = \rho_r e^{i\varphi_r(\rho_r,\theta)},$$

монотонна. Вычислим $d\theta/d\psi$ и положим $d\theta/d\psi > 0$.

В силу условий (A_1) производная $d\theta/d\psi$ существует и непрерывна. Будем иметь, $k = \operatorname{tg}\sigma$:

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{d}{d\psi}\left[\operatorname{Im}(1+ik)(f_2(\rho_r) + if_1(\varphi_r))\right] =$$

$$= \frac{1}{2\cos\sigma}\operatorname{Re}\left[e^{i\sigma}\omega_r\frac{h'(\omega_r)}{h(\omega_r)}\left(f_1'(\varphi_r) + \rho_r f_2'(\rho_r)\right)\right] > 0. \qquad (1)$$

Это справедливо для любого фиксированного r, $0 < r < 1$. Если для функции, стоящей справа в (1) в квадратных скобках, верен принцип максимума (например, если каждое открытое множество круга D она переводит в открытое множество области $B^-(f)$), и $h'(\omega) \in H_1$, то по теореме Ф. Рисса ([4], с. 395) почти всюду на окружности $\{\omega : |\omega| = 1\}$ будем иметь $\partial h(e^{i\psi})/\partial\psi = ie^{i\psi}h'(e^{i\psi})$, поэтому в (1) можно перейти к пределу при $r \to 1$:

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\sigma}\frac{\omega h'(\omega)}{h(\omega)}\left(f_1'\big(\arg h(\omega)\big) + |h(\omega)|f_2'\big(|h(\omega)|\big)\right)\right] > 0, \quad \omega = e^{i\psi}. \quad (2)$$

Следовательно, если $h(D) = B^-(f)$, то в силу определения области $B^-(f)$ неравенство (1) справедливо. И наоборот, если выполняется (1), то $\mathcal{L} = \partial h(D)$ пересекает каждую кривую семейства χ_θ только один раз. Условие $d\theta/d\psi > 0$ впервые было использовано в работе Б. Н. Рахманова (см. [1, 2]) для получения признаков однолистности некоторых подклассов аналитических функций. При этом отрезки прямых и парабол играли роль кривых семейства χ_θ.

Определение. *Если функция $h(\omega)$, $h(0) = 0$, конформно отображающая единичный круг D на область $B^-(f)$, удовлетворяет условию (1) при каждом фиксированном r, $0 < r < 1$, то область $B^-(f)$ называется обобщенно-спиралеобразной. При замене требования (1) на более сильное неравенство*

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\sigma}\omega_r \frac{h'(\omega_r)}{h(\omega_r)}\left(f_1'(\varphi_r) + \rho_r f_2'(\rho_r)\right)\right] \leqslant \alpha\pi/2,$$
$$0 < \alpha < 1, \quad |\sigma| < \pi/2, \tag{3}$$

область $B^-(f)$ назовем α-обобщенно-спиралеобразной порядка σ. При $\alpha = 1$, $r = 1$, может произойти потеря квазиконформности граничной кривой $\mathcal{L}$.

Условие обобщенной звездообразности не выводит за пределы простой звездообразности, т.к. при $\sigma = 0$, $r = 1$, из (1) получаем

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{d}{d\psi} f_1(\varphi) = \frac{1}{2} f_1'(\varphi) \frac{\omega h'(\omega)}{h(\omega)} > 0,$$
$$\varphi = \arg h(\omega), \quad \omega = e^{i\psi}. \tag{4}$$

По определению области $B(f)$ производная $f_1'(\varphi)$ знакопостоянна, поэтому условие (4) эквивалентно условию (3). Заметим, что абсолютная непрерывность функции $h(\omega)$ на границе круга D в плоскости ω в случае звездообразной области следует из принадлежности $h(e^{i\psi})$ классу H^1 (см. [3]).

В силу принадлежности функции $h(e^{i\psi})$ классу Харди и условия существования производной R_θ будем иметь равенство

$$\frac{dh(e^{i\psi})}{d\psi} = R(\theta)e^{i\mu(\theta)}[x(\theta) + i\mu_\theta]\frac{d\theta}{d\psi},$$

здесь под $x(\theta)$ будем понимать прежнее значение R_θ/R, а производная $\mu_\theta = d\mu/d\theta$ существует в силу равенства $\mu_\theta = [f_1'(\mu)]^{-1}(1-$

$kf_2'(R)R_\theta)$ для всякого θ из промежутка $[0,2\pi]$. Так как $d\theta/d\psi > 0$, имеем

$$\arg\frac{h'(e^{i\psi})}{h(e^{i\psi})}e^{i\psi} = \arg[\mu_\theta - ix] = \arg\left[\frac{1-kR_\theta f_2'(R)}{f_1'(\mu)} - i\frac{R_\theta}{R}\right],$$

и для $h(\omega) = R(\theta)\,e^{i\mu(\theta)}$ будем иметь из (3) при $r=1$:

$$\left|\arg\left\{e^{i\sigma}\frac{\omega h'(\omega)}{h(\omega)}\left[f_1'(\mu) + kf_2'(R)\right]\right\}\right| =$$

$$= \left|\arg\left\{e^{i\sigma}\left(\frac{1-kR_\theta f_2'(R)}{f_1'(\mu)} - i\frac{R_\theta}{R}\right)(f_1'(\mu)+kf_2'(R))\right\}\right| \leqslant \alpha\pi/2,$$

что эквивалентно при $f_1'(\mu) + kf_2'(R) > 0$:

$$\frac{|kR(1-kR_\theta f_2'(R) - R_\theta f_1'(\mu))\,|}{|R(1-kR_\theta f_2'(R) + kR_\theta f_1'(\mu))\,|} \leqslant \mathrm{tg}\alpha\pi/2, \tag{5}$$

при $0<\alpha<1$, $k=\mathrm{tg}\sigma$.

3°. Квазиконформное отражение. Пусть задана область $B(\mathcal{F})$. Напомним, что граница $B(\mathcal{F})$ является квазиокружностью, и, следовательно, существует квазиконформное отражение $\lambda(z)$ плоскости $\mathbb{C}$ относительно $\mathcal{L}$, т.е. антиквазиконформное отображение $\lambda(z):\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, оставляющее неподвижными точки $\mathcal{L}$, и такое, что $\lambda(B) = B^-$, $\lambda(B^-) = B$. Будем считать, что для комплексного отклонения $\mu_\lambda = \lambda_{\overline{z}}/\lambda_z$ справедливы неравенства

$$1 \leqslant \mathbb{D}_\lambda = (1+|\mu_\lambda|)/(|\mu_\lambda|-1) \leqslant K,$$

$$1 \leqslant k = (K+1)/(K-1) \leqslant |\mu_\lambda| \leqslant \infty.$$

Определение. *Структурой области $B(\mathcal{F})$ (или $B(f)$) будем называть пару, состоящую из граничной кривой $\mathcal{L}$ и семейства χ_θ. Эту пару будем обозначать $S = \{\mathcal{L},\chi_\theta\}$.*

Предположим, что структура области $B(\mathcal{F})$ задана. Определим функцию $\lambda(z)$, $z\in\widetilde{\Gamma}_\theta$, с помощью равенства

$$\lambda(z) = R^2(\theta)\,e^{i\varphi^*}/|z|, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \tag{6}$$

где φ^* – единственный корень уравнения $\mathcal{F}(R^2(\theta)/|z|,\varphi)=\theta$. Положим теперь

$$\begin{aligned} &V(z)=t(\rho)-i\mathcal{F}'_{\varphi},\\ &A(z)=x(\theta)V(z)-1/2,\\ &C(z)=1-it(\rho^*)/\mathcal{F}'_{\varphi^*},\\ &Q(z)=V(z)/(2\mathcal{F}'_{\varphi^*}), \end{aligned} \tag{7}$$

где $t(\rho)=\rho\mathcal{F}'_{\rho}$, $\rho^*=R^2/\rho$, а $\mathcal{F}'_{\rho^*}$ и $\mathcal{F}'_{\varphi^*}$ – частные производные функции $\mathcal{F}$ в точке (ρ^*,φ^*), $x(\theta)=R_\theta/R$. Нам понадобится неравенство при $k>1$

$$|A|^2|C|^2+|Q|^2\leqslant\frac{2k^2}{k^2-1}\operatorname{Im}(\overline{A}\;\overline{C}Q)-\frac{2}{k^2-1}\operatorname{Im}(A\overline{C}\;\overline{Q}). \tag{8}$$

Входящие в это соотношение величины $A=A(z)$, $C=C(z)$, $Q=Q(z)$ заданы формулами (7).

Теорема 1. *Предположим, что неравенство* (8) *выполнено с* $k=k_0$ *и область* $B(\mathcal{F})$ *задана. Тогда граничная кривая* $\mathcal{L}$ *области является квазиконформной с коэффициентом квазиконформности* $K_0=(k_0+1)/(k_0-1)$. *Существует двусвязная область* G *такая, что функция* (6) *есть квазиконформное отражение области* G *относительно* $\mathcal{L}$: $\lambda(G\cap B)=G\cap B^-$, $\lambda(B^-\cap G)=B\cap G$, $\lambda(\mathcal{L})=\mathcal{L}$, *с комплексным отклонением* μ_λ:

$$|\mu_\lambda|^2=\frac{\left(|A|^2|C|^2+|Q|^2-2\operatorname{Im}\overline{Q}A\overline{C}\right)}{\left(|A|^2|C|^2+|Q|^2-2\operatorname{Im}\overline{A}\;\overline{C}Q\right)}>1. \tag{9}$$

Доказательство. Напомним, что параметрическое уравнение граничной кривой $\mathcal{L}$ имеет вид $\mathcal{L}=\{z:z=R(\theta)\,e^{i\mu(\theta)},\mathcal{F}(R,\mu)=0,$ $0\leqslant\theta<2\pi\}$. Из условий (A) следует, что уравнение $\mathcal{F}(\rho,\varphi)=\theta$ при каждом фиксированном θ определяет однозначную непрерывную функцию $\varphi=\varphi(\rho,\theta)$. Следовательно, каждая окружность $\rho=\mathrm{const}$ при $\rho>0$ пересекает любую кривую семейства χ_θ в одной точке. Пусть z – произвольная точка области $B(\mathcal{F})$. Тогда найдется значение $\theta=\theta_0$ такое, что $z\in\widetilde{\Gamma}_{\theta_0}$. Предположим, что пересечение кривой $\widetilde{\Gamma}_{\theta_0}$ с граничной есть точка $z_0=R(\theta_0)\,e^{i\mu(\theta_0)}$. Будем иметь $\mathcal{F}(|\lambda(z)|,\arg\lambda(z))=\mathcal{F}(R^2(\theta_0)/|z|,\varphi^*)$. Последнее выражение равно θ_0 в силу выбора φ^*, поэтому $z^*=\lambda(z)$ также находится на кривой $\widetilde{\Gamma}_{\theta_0}$, но внутри $\mathcal{L}$. Точки самой кривой $\mathcal{L}$ при этом остаются неподвижными, т.к. $\lambda(R(\theta_0)\,e^{i\mu(\theta_0)}) = R(\theta_0)\,e^{i\varphi_0(\theta_0)}$, где $\varphi_0(\theta_0)$ есть единственный корень уравнения $\mathcal{F}(R(\theta_0),\varphi) = \theta_0$, т.е. $\varphi_0(\theta_0) = \mu(\theta_0)$.

Найдем производные $\lambda_{\overline{z}}$ и λ_z от функции (6). Для $z^* = \lambda(z)$ вычисления показывают

$$\lambda_z = \frac{\lambda(z)}{z}\,[A(z)C(z) + iQ(z)] = \frac{\lambda(z)}{z} N(x,z,z^*),$$

$$\lambda_{\overline{z}} = \frac{\lambda(z)}{z}\,\left[\overline{A}(z)C(z) + i\overline{Q}(z)\right] = \frac{\lambda(z)}{\overline{z}}\,M(x,z,z^*),$$

здесь величины $A(z)$, $C(z)$ и $Q(z)$ заданы формулами (7). Модуль комплексного отклонения μ_λ есть отношение $M(x,z,z^*)$ к $N(x,z,z^*)$, равное правой части (9). Поэтому $|\mu_1| > 1$, если выполняется неравенство

$$\operatorname{Im} A\overline{Q}\,\overline{C} < \operatorname{Im}\overline{A}Q\overline{C},$$

что эквивалентно условию $\operatorname{Im} A\overline{Q} = -\mathcal{F}'_\varphi/(4\mathcal{F}'_{\varphi^*}) < 0$. Последнее справедливо в силу непрерывности производной $\mathcal{F}'_\varphi$ и неравенства ее нулю. Ограничение $|\mu_\lambda| \geqslant k_0 > 1$ выполняется в силу (8).

Отражение $\lambda(z)$ в виде (6) построено в предположении, что задана структура $S = \{\mathcal{L}, \chi_\theta\}$ области $B(\mathcal{F})$. Считая χ_θ одним из двух семейств обобщенных линий уровня области $B(\mathcal{F})$, построим второе следующим образом. Пусть по-прежнему пересечение граничной кривой $\mathcal{L}$ и кривой Γ_θ при $\theta = \theta_0$ есть точка $z_0 = R(\theta_0)\,e^{i\mu(\theta_0)}$. Для любого фиксированного ρ, $\alpha_1 < \rho < \beta_1$, где α_1 и β_1 постоянные из определения области $B(\mathcal{F})$, зададим кривую Γ_ρ с помощью равенства $\Gamma_\rho = \{z_\rho : z_\rho = \rho R(\theta)e^{i\varphi^0(\theta)}, \mathcal{F}(\rho R(\theta), \varphi^0(\theta)) = \theta\}$. Определим теперь важное для нас отображение

$$z_r(z) = r|z|e^{i\varphi_r}, \tag{10}$$

где φ_r есть единственный корень уравнения $\mathcal{F}(r|z|,\varphi) = \mathcal{F}(|z|, \arg z)$, причем под $\arg z$ понимается то значение аргумента, при котором определена функция двух переменных $\mathcal{F}(\rho,\varphi)$. В качестве области G можно взять двусвязную область, ограниченную кривыми Γ_{α_1} и Γ_{β_1}. Тогда $\lambda(z)$ есть отражение области G относительно кривой $\mathcal{L}$. Действительно, если z лежит в области $G \cap B$ и принадлежит кривой Γ_θ при $\theta = \theta_0$, то $\lambda(z) \in G \cap B^-$ и $\lambda(z)$ принадлежит той же кривой Γ_{θ_0}. Как уже было отмечено, точки самой граничной кривой при отображении $\lambda(z)$ остаются неподвижными. Доказательство теоремы закончено.

При наличии области G область $B(\mathcal{F})$ будем обозначать $B_G(\mathcal{F})$. Если $G = \mathbb{C}^2$, то индекс G употребляться не будет.

Важно отметить смысл введения двусвязной области G, которую можно рассматривать как некоторую окрестность граничной кривой. Он заключается в том, что вне области G пару семейств $\{\chi_\theta, \chi_\rho\}$ всегда можно дополнить до двух семейств допустимых линий уровня области $B_G(\mathcal{F})$, если при $\rho > \beta_1$ кривые $\widetilde{\Gamma}_\theta$ заменить лучами $\varphi = \theta$. Второе семейство χ_ρ вне области G тогда получим с помощью $\mathcal{L}$-подобия аналогично тому, как это сделано в [5, 6]. Предположим, что мы это сделали. Будем иметь при $\rho \to \infty : \lambda(z) = R^2(\theta)/\overline{z}$, $z_r(z) = rz$, и требование $|\partial z_r|/|\partial z| \to r$ при $|z| \to \infty$ будет выполнено. Производные от функции (6) равны

$$\frac{\partial z_r}{\partial z} = (z_r)_z = \frac{1}{2} r e^{i(\varphi_r - \varphi)} \left[1 + \frac{\mathcal{F}'_\varphi}{\mathcal{F}'_{\varphi_r}} + i \frac{t(\rho) - t(\rho r)}{\mathcal{F}'_{\varphi_r}} \right], \qquad (11)$$

$$\frac{\partial z_r}{\partial \overline{z}} = (z_r)_{\overline{z}} = \frac{1}{2} r e^{i(\varphi_r + \varphi)} \left[1 - \frac{\mathcal{F}'_\varphi}{\mathcal{F}'_{\varphi_r}} + i \frac{t(\rho) - t(\rho r)}{\mathcal{F}'_{\varphi_r}} \right], \qquad (12)$$

где $t(\rho r) = r\rho\mathcal{F}'_{\rho r}$ при фиксированном r, $\mathcal{F}'_{\rho r}$ и $\mathcal{F}'_{\varphi_r}$ – частные производные от функции $\mathcal{F}$ в точке $(r\rho, \varphi_r)$. Тогда производные $\partial z_r/\partial z = \{(11), 1 < \rho < \beta_1; r, \rho \geqslant \beta_1\}$, $\partial z_r/\partial \overline{z} = \{(12), 1 < \rho < \beta_1; 0, \rho \geqslant \beta_1\}$ непрерывны в $\overline{B}$ в силу условий (A). Из формулы (12) видим, что условие равенства нулю производной $\partial z_r/\partial \overline{z}$ эквивалентно выполнению одновременно двух соотношений

$$\mathcal{F}'_\varphi \circ (\rho, \varphi) \equiv 1, \quad \mathcal{F}'_\rho \circ (\rho, \varphi) = r\mathcal{F}'_\rho \circ (\rho_r, \varphi_r).$$

Отметим, что неединственность выбора семейства χ_θ при одной и той же границе $\mathcal{L}$ влечет за собой неединственность квазиконформного отражения $\lambda(z)$, так как оно строится только по структуре области $B(\mathcal{F})$. Здесь можно иметь в виду как отражение $\lambda(z)$ всей плоскости $\mathbb{C}$ относительно $\mathcal{L}$, так и отражение двусвязной области G относительно граничной кривой.

Приступим к рассмотрению частного случая области $B(\mathcal{F})$, а именно, к случаю области $B(f)$, определение которой дано в пункте 1^0. Формула (6) будет выглядеть так:

$$\lambda(z) = \frac{R^2(\theta)}{|z|} e^{i f_1^{-1}(\theta - k f_2(R^2(\theta)/|z|))}, \qquad (13)$$

где для $|z| = \rho$ и $\arg z = \varphi$ выполняется равенство $\mathcal{F}(\rho, \varphi) = \theta$. Производные λ_z и $\lambda_{\overline{z}}$ от функции (13) вычисляются по формулам

$$\lambda_z = \frac{\lambda(z)}{z}\left[A_1(z)\, C_1(z) + iQ_1(z)\right] = \frac{\lambda(z)}{z} N_1(x, z, z^*),$$

$$\lambda_{\overline{z}} = \frac{\lambda(z)}{\overline{z}}\left[\overline{A}_1(z)\, C_1(z) + i\overline{Q}_1(z)\right] = \frac{\lambda(z)}{\overline{z}} M_1(x, z, z^*),$$

где

$$\begin{aligned}
&V_1(z) = k\rho f_2'(\rho) - if_1'(\varphi),\\
&A_1(z) = x(\theta)V_1(z) - 1/2,\\
&C_1(z) = 1 - ik\tau(\rho^*)/f_1'(\widetilde{\varphi}^*),\\
&Q_1(z) = V_1(z)/(2f_1'(\widetilde{\varphi}^*)),
\end{aligned}$$

причем

$$\widetilde{\varphi}^* = f_1^{-1}(\theta - kf_2(\rho^*)), \quad \tau(\rho^*) = \rho^* f_2'(\rho^*),$$

$$\rho^* = R^2(\theta)/\rho, \quad x(\theta) = R_\theta/R, \quad R_\theta = dR/d\theta.$$

Неравенство $|\mu_\lambda| > 1$ эквивалентно требованию $f_1'(\varphi)/f_1'(\widetilde{\varphi}^*) > 0$, справедливость которого очевидна в силу условий (A_1) в определении области $B(f)$. Требование (8) переходит в аналогичное, где вместо величин $A(z)$, $C(z)$, $Q(z)$ стоят соответственно $A_1(z)$, $C_1(z)$, $Q_1(z)$. Второе допустимое семейство обобщенных линий уровня χ_ρ при $a_2 < \rho < b_2$ строится аналогично случаю $B(\mathcal{F})$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Предположим, что неравенство (8) выполнено для величин $A = A(z)$, $C = C(z)$, $Q = Q(z)$, $k = k_0$, и область $B(f)$ задана. Тогда граничная кривая $\mathcal{L}$ области $B(f)$ является квазиконформной с коэффициентом квазиконформности $K_0 = (k_0+1)/(k_0-1)$. Существует двусвязная область G такая, что функция (13) есть квазиконформное отражение области G относительно $\mathcal{L}$ с комплексным отклонением μ_λ :*

$$|\mu_\lambda|^2 = \frac{\left(|A_1|^2|C_1|^2 + |Q_1|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,\overline{Q}_1 A_1 \overline{C}_1\right)}{\left(|A_1|^2|C_1|^2 + |Q_1|^2 - 2\,\mathrm{Im}\,\overline{A}_1\,\overline{C}_1 Q_1\right)} > 1.$$

4°. Примеры.

1. Звездообразные области. Определение звездообразной области B_α^* дано, например, в [1]. Это частный случай области $B(f)$ при $f_1(\varphi) = \varphi$, $f_2(\rho) \equiv 0$, $k = 0$. Структура звездообразной области $S = \{\mathcal{L}, \widetilde{\Gamma}_\theta = \{z : \arg z = \theta, 0 \leqslant \theta < 2\pi\}\}$. Необходимые величины равны $\lambda(z) = R^2(\theta)/\overline{z}$, $z_r(z) = rz$, $\lambda_z = -iR(\theta)/|z|^2$, $\lambda_{\overline{z}} = R(R^2 + R_\theta^2)^{1/2}/|z|^2$. $V_1(z) = -i$, $A_1(z) = -xi - \frac{1}{2}$, $C_1(z) \equiv 1$, $Q_1(z) = -\frac{i}{2}$. Условие (5) принимает вид

$$|R_\theta/R| \leqslant \mathrm{tg}\alpha\pi/2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Модуль комплексного отклонения равен выражению

$$|\mu_\lambda| = \left|\frac{-xi}{xi-1}\right| = \left(1 + \left(\frac{R}{R_\theta}\right)^2\right)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \left(1 + (\mathrm{tg}\alpha\pi/2)^{-2}\right)^{1/2} = (\sin\alpha\pi/2)^{-1}.$$

Следовательно, коэффициент квазиконформности равен $K = \mathrm{ctg}^2\beta/2$ при $\beta = \pi/2 - \alpha\pi/2$.

2. Спиралеобразные области. Определение α-спиралеобразной области порядка σ дано, например, в [6]. Это частный случай области $B(\mathcal{F})$ при $\mathcal{F}(\rho, \varphi) = \varphi + k\ln\rho$. Квазиконформное отражение имеет вид $\lambda(z) = R^2(\theta)e^{2i\mu(\theta)}/z$. Интересующие нас величины равны $z_r(z) = zre^{-ik\ln r}$, $N_1 = i(k - x(1+k^2))$, $M_1 = -e^{-2i\sigma}(1 + N_1)$. Неравенство (5) имеет вид

$$|1 - R_\theta(1+k^2)/R| \leqslant \mathrm{tg}\alpha\pi/2, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Поэтому модуль комплексного отклонения оценивается снизу величиной $(\sin\alpha\pi/2)^{-1}$ (см. [7] и [2]), а коэффициент квазиконформности граничной кривой сохраняет то же значение, что и в примере 1, т.е. $K = \mathrm{ctg}^2\beta/2$, $\beta = \pi/2 - \alpha\pi/2$.

3. Обобщенно-спиралеобразная область, структура которой порождена двояко-кратными спиралями. Рассмотрим частный случай области $B(f)$ при $f_1(\varphi) = \varphi$, $f_2(\rho) = k\ln\ln(\rho+1)$. Отражение $\lambda(z)$ имеет вид

$$\lambda(z) = R^2(\theta)e^{i(\theta - k\ln\ln(|z|+1))}/|z|.$$

Отображение $z_r(z)$ строится по формуле

$$z_r(z) = r|z|e^{i\varphi_r}, \quad \varphi_r = \varphi + k\ln\frac{\ln(\rho+1)}{\ln(r\rho+1)},$$

где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$. Имеем

$$f_1'(\varphi) + \rho f_2'(\rho) = 1 + \frac{\rho}{\ln(\rho+1)}\frac{1}{\rho+1} > 0.$$

В силу положительности последнего выражения и аналитичности функции $\omega h'(\omega)/h(\omega)$ можно перейти к пределу в (3) при $r \to 1$. Поэтому условие обобщенной спиралеобразности области $B(f)$ при $f_1(\varphi) = \varphi$, $f_2(\rho) = k\ln\ln(\rho+1)$, превращается в условие простой звездообразности.

Вывод: для любого семейства χ_θ из пары $S = \{\mathcal{L}, \chi_\theta\}$, называемой структурой области, для которого выполняется неравенство $f_1'(\varphi)+\rho f_2'(\rho) > 0$ при ρ и φ из промежутков, указанных в условии (A_1) определения области $B(f)$, и, в частности, для семейства $\chi_\theta = \{z : f_1(\arg z) + kf_2(|z|) = \theta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, условие обобщенной звездообразности не дает ничего нового по сравнению с простой звездообразностью.

Заметим, что определение обобщенно-спиралеобразной области можно сформулировать так: область B^- называется обобщенно-спиралеобразной относительно нуля, если часть кривой, соединяющей любую точку области B^- с нулем (возможно, асимптотически), уравнение которой имеет вид $f_1(\arg z) + kf_2(|z|) = \theta$ при некотором фиксированном θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, целиком лежит в области B^-.

Приведем теперь примеры обобщенно-спиралеобразных областей.

4. Обобщенно-спиралеобразные области, порожденные функцией $\Phi(x)$. В отличие от предыдущего буквой x в дальнейшем будем обозначать абсциссу точки $x + i\Phi(x)$. Пусть χ_θ состоит из кривых $\widetilde{\Gamma}_\theta = \{z : z = e^{i\theta}(x + i\Phi(x)), 0 < x < \infty\}$, где функция Φ удовлетворяет условиям: $\widetilde{\Phi}^2(x) = x^2 + \Phi^2(x)$ есть возрастающая непрерывная функция класса $C^1(0,\infty)$ и $\Phi(0) = 0$. Так как $|z| = \widetilde{\Phi}(x)$ возрастает по x, кривые этого семейства попарно не пересекаются. Обозначим такие области $B(\Phi)$, причем $\mathcal{L} = \partial B(\Phi)$ пересекает каждую кривую семейства $\widetilde{\Gamma}_\theta$ только один раз. Будем считать, что величина $\arg(x+i\Phi(x))$ для $x>0$ лежит в промежутке $-\pi/2 \leqslant \arg(x+i\Phi(x)) \leqslant \pi/2$. Положим теперь

$$\widetilde{\Gamma}_\theta = \Big\{ z : z = (x^2+\Phi^2(x))^{1/2} e^{i(\theta + \operatorname{arctg}\Phi(x)/x)},\ x>0,\ \theta \in [0,2\pi] \Big\}.$$

Тогда

$$f_1(\varphi) = \varphi,$$
$$f_2(\rho) = -\frac{1}{K}\operatorname{arctg}(\Phi(x)/x) = -\frac{1}{K}\operatorname{arctg}\frac{\Phi(\widetilde{\Phi}^{-1}(\rho))}{\widetilde{\Phi}^{-1}(\rho)},$$

где $\widetilde{\Phi}^{-1}(\rho)$ есть функция, обратная $\rho = \widetilde{\Phi}(x)$ при фиксированной ветви корня. Тогда

$$f_1(\arg z) + kf_2(|z|) = \theta.$$

Сделав необходимые вычисления, получим

$$x'_\rho = (\Phi'(x))^{-1}, \quad f'_1(\varphi) \equiv 1,$$
$$f'_2(\rho) = -\frac{1}{\kappa}\frac{x\Phi'(x) - \Phi(x)}{(x^2+\Phi^2(x))^{1/2}(x+\Phi\Phi')}.$$

Составим сумму

$$f'_1(\varphi) + \rho f'_2(\rho) = \frac{x(\kappa - \Phi') + \Phi(\kappa\Phi'+1)}{x+\Phi\Phi'} = \frac{E}{x+\Phi\Phi'}.$$

Знаменатель последней дроби больше нуля, поэтому ее знак зависит от числителя.

Рассмотрим несколько конкретных примеров области $B(\Phi)$.

а) $\Phi_1(x) : x \mapsto (2px)^{1/2}$, $p>0$. Здесь выражение $E = \kappa(x + 2p)$ знакопостоянно при $x>0$. Значит, область $B(\Phi_1)$ является просто спиралеобразной.

б) 2π-периодическая функция $\Phi_2(x) = \sin x$. Тогда $E = x(\kappa - \cos x) + \sin x(\kappa\cos x + 1)$. При $\cos x = \varepsilon$, $\kappa < \varepsilon$, будем иметь $E = x(\kappa - \varepsilon) + (\varepsilon - \varepsilon^2)^{1/2}(\kappa\varepsilon + 1)$. Найдутся такие достаточно большие x, что знак E будет отрицательным за счет первого множителя, и такие достаточно малые $x < (1-\varepsilon^2)^{1/2}(\kappa\varepsilon+1)/(\varepsilon - \kappa)$, что знак E будет положительным. Значит, область $B(\Phi_2)$ не является спиралеобразной. Понятие обобщенной спиралеобразности здесь проявляется существенным образом.

в) Рассмотрим еще случай b-периодической функции, $b < \infty$, $\Phi_3(x) = \{\varepsilon_1 x, 0 < x \leqslant a; \varepsilon_2(b-x), a < x < b\}$. Он отличается от предыдущего наличием угловой точки. За величину производной в угловой точке условимся брать ее значение слева. Тогда $E = \{\kappa, 0 < x \leqslant a; \kappa + \varepsilon_2 b/(x(1+\varepsilon_2^2) - \varepsilon_2^2 b), a < x < b\}$. При $\kappa > 0$ $(\kappa < 0)$, $b/a > 1 + \varepsilon_2^{-2}$, значение E положительно для $0 < x \leqslant a$ и отрицательно для $x < \varepsilon_2^2 b/(1+\varepsilon_2^2)$ $(x > \varepsilon_2^2 b/(1+\varepsilon_2^2))$. Следовательно, и в данном случае область $B(\Phi_3)$ является существенно обобщенно-спиралеобразной.

5. Явный вид квазиконформного отражения для области $B(\Phi)$. Пусть точка z принадлежит области $B(\Phi)$,

$$z = (x^2 + \Phi^2(x))^{1/2} e^{i(\theta_0 + \operatorname{arctg}(\Phi(x)/x))},$$

а $z_{\mathcal{L}}$ есть точка пересечения кривой $\widetilde{\Gamma}_{\theta_0}$ с граничной

$$z_{\mathcal{L}} = \left(x_{\mathcal{L}}^2 + \Phi^2(x_{\mathcal{L}})\right)^{1/2} e^{i(\theta_0 + \operatorname{arctg}(\Phi(x_{\mathcal{L}})/x_{\mathcal{L}}))}.$$

Тогда

$$z^* = \lambda(z) = \frac{(x_{\mathcal{L}}^2 + \Phi^2(x_{\mathcal{L}}))}{(x^2 + \Phi^2(x))^{1/2}} e^{i(\theta_0 + \operatorname{arctg}(\Phi(x^*)/x^*))}, \tag{15}$$

где z^* является корнем уравнения

$$\frac{x_{\mathcal{L}}^2 + \Phi^2(x_{\mathcal{L}})}{(x^2 + \Phi^2(x))^{1/2}} = \left((x^*)^2 + \Phi^2(x^*)\right)^{1/2}.$$

Формула (15) является частным случаем (14) при $f_1(\varphi) = \varphi$, $f_2(\rho) = -1/k \operatorname{arctg} \frac{\Phi(x)}{x}$.

Литература

1. Б. Н. Рахманов, *К теории однолистных функций.* — ДАН СССР **88**, No. 3 (1953), 413–415.
2. Б. Н. Рахманов, *К теории однолистных функций.* — ДАН СССР **97**, No. 6 (1954), 973–977.
3. D. A. Brannau, W. E. Kirwan, *On some classes of bounded univalent functions.* — J. London Math. Soc. **1**, part 3 (1969), 431–443.
4. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Наука, М. (1966).
5. Е. Л. Пацевич, *Условия инъективности для некоторых классов областей, I.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **255** (1998), 104–124.

6. Е. Л. Пацевич, *Условия инъективности для некоторых классов областей, II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **255** (1998), 125–139.
7. М. А. Севодин, *Условия однолистности в спиралеобразных областях.* — В кн.: Тр. семин. по краевым задачам. Изд-во Каз. ун-та, Казань, вып. 23, 193–200 (1987).

Patsevich E. L. Quasiconformal reflection for generalized spiral domains.

We discuss a method of constructing a generalized spiral domain such that the quasiconformal reflection on the boundary of this domain can be described explicitly.

Новгородский
государственный
университет
patsev@pdmi.ras.ru

Поступило 5 марта 1999 г.