Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

Е. Л. Пацевич

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТРАЖЕНИЯ

В работе [1] в 1963 году Альфорсом показано, что существует постоянная $C(K)$, зависящая только от K, такая, что для производных квазиконформного отражения λ_z и $\lambda_{\overline{z}}$ плоскости $\mathbb{C}$ относительно кривой $\mathcal{L}$, проходящей через бесконечность, справедливы оценки

$$C(K)^{-1} \leqslant \frac{|d\lambda(z)|}{|dz|} \leqslant C(K), \tag{1}$$

где K – коэффициент квазиконформности кривой $\mathcal{L}$, т.е. величина, ограничивающая дилатацию $\mathbb{D}_\lambda$:

$$1 \leqslant \mathbb{D}_\lambda = \frac{1+|\mu_\lambda|}{|\mu_\lambda|-1} \leqslant K, \quad 1 \leqslant k = (K+1)/(K-1) \leqslant |\mu_\lambda| \leqslant \infty, \tag{2}$$

здесь μ_λ – комплексное отклонение, $\mu_\lambda = \lambda_{\overline{z}}/\lambda_z$.

Целью настоящей заметки является уточнение постоянной $C(K)$ для некоторого класса граничных кривых плоских односвязных областей.

Пусть B ($\mathbb{C} \setminus \overline{B} = B^-$) есть внешность замкнутой квазиконформной кривой $\mathcal{L}$ в плоскости z. Дадим определение области $B = B(\mathcal{F})$. А именно, это означает, что параметрическое уравнение кривой $\mathcal{L} = \partial B(\mathcal{F})$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \left\{ z : z = R(\theta)e^{i\mu(\theta)},\ \mathcal{F}(R,\mu) = \theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \right\}.$$

На функцию $\mathcal{F}$ накладываются следующие условия: при каждом фиксированном θ она инъективна относительно пары (R,μ), значения ее при каждом θ являются значениями в точке (R,μ) однозначной функции двух переменных $\mathcal{F}(\rho,\varphi)$: $\mathcal{P} = (\alpha_1,\beta_1) \times (\alpha_2,\beta_2) \to [0,2\pi]$, и $R_\theta = dR/d\theta$ существует почти всюду. Везде далее $|z| = \rho$, $\arg z = \varphi$ (не обязательно главное значение). Предполагается также, что $\mathcal{F}(\rho,\varphi)$ непрерывна на $\mathcal{P}$, частные производные $\mathcal{F}'_\rho$, $\mathcal{F}'_\varphi$ существуют и непрерывны в $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}'_\varphi \neq 0$, здесь $(\alpha_1,\beta_1) \subseteq (0,\infty)$, $(\alpha_2,\beta_2) \subseteq (-\infty,\infty)$.

В работе [2] показано, что квазиконформное отражение плоскости $\mathbb{C}$ относительно граничной кривой $\mathcal{L}$ может быть взято в следующем виде для $z \in \widetilde{\Gamma}_\theta$:

$$\lambda(z) = \frac{R^2(\theta)}{|z|} e^{i\varphi^*}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \tag{3}$$

где φ^* – единственный корень уравнения $\mathcal{F}(R^2(\theta)/|z|, \varphi) = \theta$, $R(\theta)$ – модуль точки пересечения $\widetilde{\Gamma}_\theta$ с кривой $\mathcal{L}$. Здесь $\widetilde{\Gamma}_\theta$ – кривая одного из семейств χ_θ обобщенных линий уровня, обладающих тем свойством, что существует биекция между точками области $B(\mathcal{F})$ и точками пересечения двух кривых из разных семейств χ_ρ и χ_θ. Строгое определение обобщенных линий уровня дано в [2]. Будем придерживаться данных там обозначений. Пару $S = \{\mathcal{L}, \chi_\theta\}$ назовем структурой области $B(\mathcal{F})$. При этом предположим, что обобщенные линии уровня являются допустимыми, т.е. производная dz_r/dz непрерывна в $\overline{B}$, а модуль $|dz_r|/|dz|$ стремится к r при $|z| \to \infty$, здесь $\{z_r(z)\} \overset{\text{def}}{=} \Gamma_{\rho r} \cap \widetilde{\Gamma}_\theta$, если $\{z\} = \Gamma_\rho \cap \widetilde{\Gamma}_\theta$ для любого фиксированного r, $1 < r < \infty$. Отметим, что кривые, составляющие обобщенные линии уровня, вообще говоря, являются квазиконформными.

Введем обозначения $\left(\varkappa(\theta) = \frac{1}{R}\frac{dR}{d\theta}\right)$:

$$\begin{aligned} &A(z) = (\varkappa(\theta)t(\rho) - 1/2) - i\varkappa(\theta)\mathcal{F}'_\varphi; \\ &C(z) = 1 - it(\rho^*)/F'_{\varphi^*}; \\ &Q(z) = (t(\rho) - i\mathcal{F}'_\varphi)/(2\mathcal{F}'_{\varphi^*}); \end{aligned} \tag{4}$$

где $\rho^* = R^2(\theta)/|z|$, $\theta = \mathcal{F}(\rho, \varphi)$, $t(\rho) = \rho\mathcal{F}'_\rho$. Пусть $\tau = R(\theta)/|z|$, тогда $|\lambda(z)/z| = \tau^2$. Из неравенства $|\mu_\lambda| \geqslant k$ следует, что

$$|A|^2|C|^2 + |Q|^2 \leqslant \frac{2k^2}{k^2-1} \operatorname{Im}\left(\overline{A}\,\overline{C}Q\right) - \frac{2}{k^2-1} \operatorname{Im}\left(A\overline{C}\,\overline{Q}\right). \tag{5}$$

Далее через $R(\theta_0)$ будем обозначать модуль точки пересечения кривой $\widetilde{\Gamma}_{\theta_0}$ с граничной кривой $\mathcal{L}$, $\theta_0 = \mathcal{F}(\rho_0, \varphi_0)$.

Теорема 1. *Пусть B есть область $B(\mathcal{F})$, а квазиконформное отражение $\lambda(z)$ плоскости $\mathbb{C}$ относительно кривой $\mathcal{L} = \partial B(\mathcal{F})$ имеет вид* (3). *Если $|\mu_\lambda| \geqslant k$, то для производных λ_z и $\lambda_{\overline{z}}$ справедливы* *оценки*

$$|\lambda_z| \leqslant \tau^2 \frac{K-1}{2\sqrt{K}} \left|\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}\right|^{1/2}, \quad z \in \widetilde{\Gamma}_{\theta_0}, \quad \textit{п.в.}; \tag{6}$$

$$|\lambda_{\overline{z}}| \leqslant \tau^2 \frac{K+1}{2\sqrt{K}} \left|\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}\right|^{1/2}, \quad z \in \widetilde{\Gamma}_{\theta_0}, \quad \textit{п.в.}; \tag{7}$$

при этом $\tau = R(\theta_0)/|z|$, K *– коэффициент квазиконформности кривой* $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}'_{\varphi_0}$ *и* $\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}$ *– частные производные по второму аргументу от функции* $\mathcal{F}(\rho,\varphi)$ *в точках* (ρ_0,φ_0) *и* $(R^2(\theta_0)/|z|,\varphi_0^*)$.

Доказательство. В [2] с помощью необходимых вычислений получены формулы

$$\begin{aligned} \lambda_z &= \frac{\lambda(z)}{z}\left[A(z)C(z)+iQ(z)\right], \\ \lambda_{\overline{z}} &= \frac{\lambda(z)}{z}\left[\,\overline{A}(z)C(z)+i\overline{Q}(z)\,\right], \end{aligned} \tag{8}$$

для величин $A(z)$, $C(z)$ и $Q(z)$, заданных в (4), при $\theta=\theta_0$, $\rho=\rho_0$, $\varphi=\varphi_0$. Обозначим $U(z)=A(z)C(z)+iQ(z)$, тогда из (8) будем иметь

$$|\lambda_z| = \tau^2|U(z)| = \tau^2\left(|A|^2|C|^2+|Q|^2-2\,\mathrm{Im}\,\overline{A}\,\overline{C}\,Q\right)^{1/2}.$$

Условие (5) можно переписать в виде

$$|A|^2|C|^2+|Q|^2-2\,\mathrm{Im}\,\overline{A}\,\overline{C}\,Q \leqslant \frac{2}{k^2-1}\left(\mathrm{Im}\,\overline{A}\,\overline{C}\,Q-\mathrm{Im}\,A\overline{C}\,\overline{Q}\right).$$

Заметим, что

$$\mathrm{Im}\left(\overline{A}\,\overline{C}\,Q-A\,\overline{C}\,\overline{Q}\right) = 2\,\mathrm{Im}\left(\overline{A}\,Q\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}.$$

Поэтому

$$|U|^2 \leqslant \frac{1}{k^2-1}\,\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}, \quad k=\frac{K+1}{K-1},$$

откуда немедленно следует оценка (6). Действия с производной $\lambda_{\overline{z}}$ проводятся аналогично. Неравенство (5) дает

$$|U_1|^2 = |A|^2|C|^2+|Q|^2-2\,\mathrm{Im}\,A\,\overline{C}\,\overline{Q} \leqslant \frac{2k^2}{k^2-1}\,\mathrm{Im}\left(\overline{A}\,\overline{C}\,Q-A\overline{C}\,\overline{Q}\right),$$

откуда

$$|U_1|^2 \leqslant \frac{k^2}{k^2-1}\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}},$$

и справедливость (7) доказана. Все соотношения, используемые при доказательстве теоремы 1, верны почти всюду.

Наряду с (2) дополнительно предположим, что комплексное отклонение μ_λ отделено от бесконечности, т.е. имеют место неравенства

$$\begin{gathered} 1 \leqslant k \leqslant |\mu_\lambda| \leqslant k_0 \leqslant \infty, \\ 1 \leqslant K_0 \leqslant \mathbb{D}_\lambda \leqslant K, \quad k_0 = \frac{K_0+1}{K_0-1}. \end{gathered} \tag{9}$$

В обозначениях теоремы 1 справедливо утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что квазиконформное отражение $\lambda(z)$ плоскости $\mathbb{C}$ относительно кривой $\mathcal{L} = \partial B(\mathcal{F})$ имеет вид (3). Если выполнены соотношения (9), то для производных λ_z и $\lambda_{\overline{z}}$ справедливы двусторонние оценки*

$$\tau^2\frac{K_0-1}{2\sqrt{K_0}}\left|\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}\right|^{1/2} \leqslant |\lambda_z| \leqslant \tau^2\frac{K-1}{2\sqrt{K}}\left|\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}\right|^{1/2}, \quad z \in \widetilde{\Gamma}_{\theta_0}, \quad \textit{п.в.}; \tag{10}$$

$$\tau^2\frac{K_0+1}{2\sqrt{K_0}}\left|\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}\right|^{1/2} \leqslant |\lambda_{\overline{z}}| \leqslant \tau^2\frac{K+1}{2\sqrt{K}}\left|\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}\right|^{1/2}, \quad z \in \widetilde{\Gamma}_{\theta_0}, \quad \textit{п.в.} \tag{11}$$

Ограничимся тем, что получим оценку слева в (10). Из неравенства $|\mu_\lambda| \leqslant k_0$ следует

$$|A|^2|C|^2 + |Q|^2 \geqslant \frac{2k_0^2}{k_0^2-1}\operatorname{Im}(\overline{A}\,\overline{C}Q) - \frac{2}{k_0^2-1}\operatorname{Im}(A\overline{C}\,\overline{Q}), \quad \text{п.в.}$$

Поэтому

$$|U^2| \geqslant \frac{2}{k_0^2-1}\operatorname{Im}\left(\overline{A}\,\overline{C}\,Q - A\,\overline{C}\,\overline{Q}\right), \ \text{п.в.},$$

откуда

$$|\lambda_z| = \tau^2|U| \geqslant \tau^2\frac{1}{\sqrt{k_0^2-1}}\left|\frac{\mathcal{F}'_{\varphi_0}}{\mathcal{F}'_{\varphi_0^*}}\right|^{1/2}, \quad \text{п.в.}$$

Теорема 2 доказана.

При выполнении (9) для области $B(\mathcal{F})$ с дополнительным условием $\mathcal{F}'_\varphi \equiv 1$ будем иметь:

$$\tau^2(K_0-1)/(2\sqrt{K_0}) \leqslant |\lambda_z| \leqslant \tau^2(K-1)/(2\sqrt{K}), \quad z \in \widetilde{\Gamma}_{\theta_0}, \quad \text{п.в.}$$

$$\tau^2(K_0+1)/(2\sqrt{K_0}) \leqslant |\lambda_{\overline{z}}| \leqslant \tau^2(K+1)/(2\sqrt{K}), \quad z \in \widetilde{\Gamma}_{\theta_0}, \quad \text{п.в.}$$

К таким областям относятся, например, звездообразные ($\mathcal{F}(\rho,\varphi) = \varphi$), спиралеобразные порядка σ, $\mathrm{tg}\sigma = \kappa$ ($\mathcal{F}(\rho,\varphi) = \varphi + \kappa \ln \rho$ или, например, $\mathcal{F}(\rho,\varphi) = \varphi + \kappa \ln\ln(\rho+1)$), и области типа $B(\Phi)$, рассмотренные в ([2], п. 4).

Литература

1. L. V. Ahlfors, *Quasiconformal reflection.* — Acta Math. **109**, No. 4 (1963), 201–301.
2. Е. Л. Пацевич, *Квазиконформное отражение для обобщенно-спиралеобразных областей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **262** (1999), 185–198.

Patsevich E. L. Some estimates for the derivative of a quasiconformal reflection.

Estimates are sharpaned for the derivatives of a quasiconformal reflection for plane domains of special form.

Новгородский
государственный
университет
patsev@pdmi.ras.ru

Поступило 5 марта 1999 г.