Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

В. А. Родин

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРДИ И БЕЛЛМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ, БЛИЗКИХ К L_∞ И L_1

Преобразование тригонометрического ряда с помощью замены его коэффициентов на их арифметические средние порождает преобразование Харди [1]. Для $f \in L_1$, имеющей косинус-ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \qquad (\overline{a} = \{a_1, a_2, \dots\}), \tag{1}$$

определим

$$H(f)(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\overline{a}) \cos kx, \tag{2}$$

где

$$H_k(\overline{a}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

Для $g \in L_p$, $p > 1$, имеющей ряд Фурье вида (1), определим преобразование Беллмана [2]:

$$B(g)(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\overline{a}) \cos kx, \tag{3}$$

где

$$B_k(\overline{a}) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{a_i}{i}.$$

Хорошо известно, что шкала пространств L_p за исключением границ инвариантна относительно преобразований H и B. Более точно: для $1 \le p < \infty$ пространства L_p инвариантны относительно H [1], для $1 < p \le \infty$ относительно B. Расширяя рамки пространства L_p, П. Л. Ульянов [3] поставил задачу о нахождении необходимых и достаточных условий на N-функцию в шкале

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 98-01-00044.

пространств Орлича L_N, гарантирующих инвариантность относительно H и B. Данная задача была решена Е. Алшынбаевой [3, 4]. Затем в работах Андерсена [5] и О. Я. Берчияна [6] были получены аналогичные результаты для широкого класса симметричных пространств.

Задача становится прозрачной, если рассмотреть равенства, полученные Харди [1] и Голубовым [7]:

$$\begin{aligned} H(f)(x) &= \frac{1}{2}\int\limits_x^{\pi} f(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\ln\left|2\sin\frac{t}{2}\right|\,dt, \\ B(g)(x) &= \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\int\limits_0^{x} g(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x-t)\ln\left|2\sin\frac{t}{2}\right|\,dt \end{aligned} \tag{4}$$

для функций f и g, определенных в (1) и (3). Проанализируем эти равенства. Ниже будет показано, что второе слагаемое в (4) как линейный оператор непрерывно действует в любом симметричном пространстве E. Первые слагаемые отличаются от операторов Харди–Литтлвуда

$$H_1 f(x) = \int\limits_x^{\pi} \frac{f(t)}{t}\,dt \quad \text{и} \quad H_2 g(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^{x} g(t)\,dt \tag{5}$$

на ограниченную функцию ($g \in L_1$, $f \in L_1$).

Для операторов (5) условия ограниченного действия в симметричных пространствах E хорошо известны [8, стр. 187, 189] и могут быть выражены как в терминах нормы оператора растяжения, так и в ограничениях на индексы Бойда. Изучение поведения операторов H и B в других, “близких” к краям шкалы пространствах, а именно в $\mathrm{Re}^{+} H$ и BMO, описано в работах [7, 9, 10].

Подводя итоги вышеизложенному, можно заметить, что для различных пространств выяснялись условия их инвариантности относительно преобразований Харди и Беллмана или доказывалась их неинвариантность. Неинвариантные относительно оператора Харди пространства “находились около” L_∞, а неинвариантные относительно оператора Беллмана – около пространства L_1. При этом закон “искажения” пространств (например, BMO) не исследовался.

В настоящей работе для некоторых классов симметричных пространств, в частности для пространств Орлича, а также для пространств BMO и $\mathrm{Re}^+ H$, доказана точная граница смещения пространств образов операторов H и B относительно пространств определения функций f и g.

Эти явления возникают при изучении операторов H и B для функций из пространств, "близких" к L_∞ и L_1 соответственно (см. Рис. 1, 2). Работа продолжает исследования, начатые автором в заметке [10].

1. *Преобразование Харди в пространствах Орлича и Марцинкевича, близких к L_∞.*

Напомним определения [8].

Важной характеристикой симметричного пространства E является фундаментальная функция $\phi_E(t) = \|\chi_e\|_E$, $\operatorname{mes} e = t$, где χ_e – индикаторная функция измеримого множества e. В симметричном пространстве всегда можно сделать эквивалентную перенормировку так, чтобы $\phi_E(t)$ была вогнутой функцией.

Далее все функции из области определения операторов будем считать суммируемыми на $[0,\pi]$, продолженными четным образом на $[-\pi,\pi]$ и 2π-периодическими. Если $\phi(t)$ – возрастающая на $[0,\pi]$ функция, то через пространство Лоренца $\Lambda(\phi)$ [8, стр. 160, 162] обозначают пространство всех измеримых на $[0,\pi]$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda(\phi)} = \int\limits_0^\pi f^*(t)\,d\phi(t). \tag{6}$$

Здесь и далее f^* – перестановка функции $|f(x)|$ в убывающем порядке. Пространство Марцинкевича $M(\psi)$ определяется для любой функции $\psi(t) \geq 0$ такой, что $\psi(t) \uparrow$, а $\psi(t)/t \downarrow$ на $[0,\pi]$.

В этом случае

$$\|f\|_{M(\psi)} = \sup_{0\leq\tau\leq\pi} \int\limits_0^\tau f^*(s)\,ds/\psi(\tau). \tag{7}$$

Среди симметричных пространств с одинаковой фундаментальной функцией наиболее узким является пространство Лоренца, а наиболее широким — пространство Марцинкевича. Для симметричного E с вогнутой ϕ_E имеют место вложения

$$\Lambda(\phi_E) \subset E \subset M(\psi_E), \tag{8}$$

где $\psi_E(t) = t/\phi_E(t)$. Через L_N обозначаем пространство Орлича. Фундаментальная функция пространства L_N с нормой Люксембурга вычисляется по формуле [11, стр. 97]

$$\phi_{L_N}(t) = 1/N^{-1}(1/t). \tag{9}$$

Для симметричного пространства E ассоциированное с ним пространство состоит из всех измеримых функций $g(t)$, для которых

$$\|g\| = \sup_{\|f\|_E \le 1} \int_0^\pi f(t)g(t)\,dt < \infty.$$

Пространство, ассоциированное с симметричным, само является симметричным. Если E изометрично E'', то пространство E называется максимальным. Заметим, что пространства Орлича, Марцинкевича и Лоренца являются максимальными [8, стр. 141].

Теорема 1. 1) *Для* $0 < \beta < \infty$ *оператор* H *ограниченно действует из пространства Марцинкевича* $M(\tau \ln^\beta \frac{e\pi}{\tau})$ *в пространство Марцинкевича* $M(\tau \ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{\tau})$; 2) *оператор* H *неограничен из* $M(\tau \ln^\beta \frac{e\pi}{\tau})$ *в любое симметричное пространство* E, *строго вложенное в* $M(\tau \ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{\tau})$.

Заметим, что фундаментальная функция пространства $M(\tau \ln^\beta \frac{e\pi}{\tau})$ эквивалентна функции $\ln^{-\beta} \frac{c}{\tau}$. По этой функции и формуле (9) можно определить пространство Орлича L_N с $N(u)$=$\exp(|u|^{1/\beta})$–1. Известно [12, стр. 248], что пространство Орлича с быстро растущей N-функцией (например, если для функции N выполнено условие Δ_3) совпадает с пространством Марцинкевича с той же фундаментальной функцией. Поэтому из теоремы 1 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Теорема 2. 1) *Для* $0 < \alpha < \infty$ *оператор* H *ограниченно действует из пространства Орлича* $L_{N(\alpha)}$ *с* $N(\alpha)(u) = \exp(|u|^\alpha) - 1$ *в пространство Орлича* $L_{\overline{N}(\alpha)}$ *с* $\overline{N}(\alpha)(u) = \exp(|u|^{\alpha/(\alpha+1)}) - 1$; 2) *оператор* H *неограничен из* $L_{N(\alpha)}$ *в любое* E, *если симметричное про-*

странство $E \subset L_{N(\alpha)}$ и вложение строгое. Для случая $\alpha = 1$ данное утверждение доказано в работе [10]. *Утверждения теорем* 1 *и* 2 *справедливы и в предельном случае* ($\beta = 0$) *и* ($\alpha = \infty$).

Теорема 3. 1) *Оператор H ограниченно действует из L_∞ в пространство $M(\tau \ln \frac{e\pi}{\tau})$ (или в $L_{N(\alpha)}$ с $N(u) = \exp|u| - 1$);* 2) *оператор H неограничен из L_∞ в любое симметричное пространство E, если $E \subset M(\tau \ln \frac{e\pi}{\tau})$ и вложение строгое.*

Утверждения теорем 2 и 3 иллюстрируются рисунками 1 и 2.

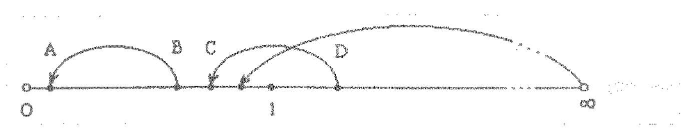

Рис. 1.

Рисунок 1 поясняет схему смещения пространств Орлича с быстро растущими N-функциями $N(\alpha)(u) = \exp(|u|^\alpha) - 1$ в пространства Орлича с $\overline{N}$-функциями, $\overline{N}(\alpha)(u) = \exp(|u|^{\alpha/(\alpha+1)}) - 1$ с оператором Харди. Точкам A и B соответствует случай $0 < \alpha < 1$, а точкам C и D – случай $\alpha > 1$. В этом случае $\alpha/(\alpha + 1) < 1$. Для $\alpha = \infty$ (теорема 3) оператор Харди ограниченно действует из L_∞ в пространство Орлича с $N(u) = \exp|u| - 1$.

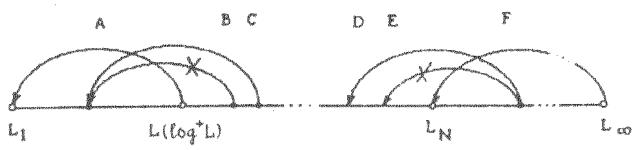

Рис. 2.

Левая часть рисунка 2 поясняет действие оператора Беллмана. Точкам A и C соответствуют пространства $L(\ln^+ L)^\beta$ и $L(\ln^+ L)^{\beta+1}$ для $0 < \beta < \infty$ соответственно. Точка B соответствует симметричному пространству из теоремы 6. Правая часть поясняет действие оператора Харди. Точки D и F соответствуют пространствам Орлича с N-функциями $\overline{N}(\alpha)(u) = \exp(|u|^{\alpha/(\alpha+1)})-1$ и $N(\alpha)(u)=\exp(|u|^{\alpha})-1$ для $0<\alpha<\infty$ соответственно. Точка E – симметричному пространству из теоремы 2.

Из теоремы 2 можно получить утверждения о поведении оператора H в пространстве BMO.

Теорема 4. *Оператор H ограниченно действует из* BMO *в пространство Орлича L_Φ с $\Phi(u)=\exp|u|^{1/2}-1$ и неограничен из* BMO *в любое симметричное пространство E, если $E\subset L_\Phi$ и вложение строгое.*

Замечание 1. Из теоремы 4 следует неинвариантность пространства BMO относительно оператора H, доказанная Б. И. Голубовым [7]. Действительно, если $E=L_N$ с $N(u)=\exp|u|-1$, то, так как $L_N\subset L_\Phi$, по теореме 4 оператор H неограничен из BMO в L_N. Неравенство Иона–Ниренберга [13, стр. 281] можно интерпретировать как строгое вложение BMO $\subset L_N$, следовательно H не действует из BMO в BMO.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f\in M(\psi)$ и $\|f\|_{M(\psi)}=1$. Тогда, согласно (7), для любого $\tau\in[0,\pi]$ справедливо неравенство

$$\int_0^\tau f^*(t)\,dt \le \psi(\tau). \tag{10}$$

Интегрируя по частям и применяя (10), получим

$$|(H_1f)(\tau)| = \left|\int_\tau^\pi \frac{f(t)}{t}\,dt\right| \le \frac{\psi(\pi)}{\pi}+\frac{\psi(\tau)}{\tau}+\int_\tau^\pi \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt \tag{11}$$

для $\tau\in(0,\pi]$. Из (11) следует, что если $\psi_\beta(\tau)=\tau\ln^\beta\frac{e\pi}{\tau}$, то для $f\in M(\psi_\beta)$ справедливо неравенство

$$|(H_1f)(\tau)| \le \frac{\beta}{1+\beta}+\ln^\beta\frac{e\pi}{\tau}+\frac{1}{1+\beta}\ln^{1+\beta}\frac{e\pi}{\tau}\le C\ln^{1+\beta}\frac{e\pi}{\tau} \tag{12}$$

с абсолютной константой C.

Следовательно,

$$\int_0^\tau (H_1f)^*(t)\,dt \le C\int_0^\tau \ln^{1+\beta}\frac{e\pi}{t}\,dt \le C_1\tau\ln^{1+\beta}\frac{e\pi}{\tau}.$$

Поэтому, согласно (7), оператор H_1 ограниченно действует из $M(\tau \ln^{\beta} \frac{e\pi}{\tau})$ в $M(\tau \ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{\tau})$. Согласно первому равенству в (4) преобразование H отличается от H_1 на оператор

$$(Vf)(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \ln \left|2 \sin \frac{t}{2}\right| \, dt \tag{13}$$

и ограниченную для $f \in L_1$ функцию

$$(hf)(x) = \int\limits_{x}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{t} \right) \, dt. \tag{14}$$

Для любого симметричного пространства E по обобщенному неравенству Минковского [8, стр. 65] имеем

$$\|Vf\|_E \leq \|f\|_E (-\frac{1}{2\pi}) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln \left|2 \sin \frac{t}{2}\right| \, dt \leq C \|f\|_E.$$

Следовательно, V ограниченно действует из $M(\tau \ln^{\beta} \frac{e\pi}{\tau})$ в $M(\tau \ln^{\beta} \frac{e\pi}{\tau})$ и в силу вложения $M(\tau \ln^{\beta} \frac{e\pi}{\tau}) \subset M(\tau \ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{\tau})$ ограниченно действует в $M(\tau \ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{\tau})$. Оператор h непрерывен из L_1 в L_∞. Пункт 1) доказан. Для доказательства пункта 2) понадобится одно экстремальное свойство пространства Марцинкевича [14], установленное Е. М. Семеновым: если f_0^* – интегрируемая, положительная невозрастающая функция, такая, что $\frac{1}{t} \int\limits_0^t f_0^*(s) \, ds \in E$, то имеет место включение $E \supseteq M(\phi_0)$, где $\phi_0(\tau) = \int\limits_0^{\tau} f_0^*(s) \, ds$.

Предположим, что оператор H ограниченно действует из $M(\tau \ln^{\beta} \frac{e\pi}{\tau})$ в некоторое симметричное пространство

$$E \supseteq M\left(\tau \ln^{\beta} \frac{e\pi}{\tau} \right).$$

Тогда и оператор H_1 ограниченно действует в это пространство E. Оператор H_1 переводит функцию $\ln^{\beta} \frac{e\pi}{t} \in M(\tau \ln^{\beta} \frac{e\pi}{\tau})$ в функцию $\ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{t}$. Если эта функция принадлежит E, то её интегральное среднее эквивалентно ей и также принадлежит E и, следовательно, $E \supseteq M(\phi)$, где

$$\phi(\tau) = \int\limits_0^\tau \ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{t}\, dt \approx \tau \ln^{1+\beta} \frac{e\pi}{\tau}.$$

Теорема 1, а, следовательно, и теорема 2 доказаны.

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in L_\infty$ и $\|f\|_{L_\infty} = 1$, тогда $\int\limits_0^\tau f^*(t)\, dt < \tau$, и так же, как в (11), получаем $|(H_1 f)(\tau)| \le 2 \ln \frac{e\pi}{\tau}$. Функция $\ln \frac{e\pi}{t}$ лежит в $M(\tau \ln \frac{e\pi}{\tau})$. Пункт 1) теоремы 3 доказан. Для доказательства второй части отметим, что оператор H переводит функцию $f(t) \equiv 1$ в функцию, эквивалентную $\ln \frac{\pi}{t}$. Если эта функция принадлежит E, то и её интегральное среднее также принадлежит E. Теорема доказана.

2. *Преобразование Беллмана в пространствах Орлича и Лоренца, близких к L_1.*

Согласно (4), оператор Беллмана B отличается от оператора Харди–Литтлвуда $(H_2 g)(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x g(t)\, dt$ на оператор V, который непрерывно действует в симметричном пространстве E, и ограниченную функцию h. Известно, что операторы H_1 и H_2 являются сопряжёнными операторами, а пространство Марцинкевича (7) является сопряжённым к пространству Лоренца (6) [8, стр. 54]. В связи с этим от оператора Беллмана естественно ожидать результатов, двойственных к теоремам 1–4.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 5. 1) *Для $0 < \beta < \infty$ оператор B ограниченно действует из пространства Лоренца $\Lambda(\phi_{1+\beta})$ в пространство $\Lambda(\phi_\beta)$, где $\phi_\beta(\tau) = \tau \ln^\beta \frac{e\pi}{\tau}$; 2) оператор B неограничен из любого симметричного пространства F, если $F \supset \Lambda(\phi_{1+\beta})$ и вложение строгое, в пространство $\Lambda(\phi_\beta)$.*

Фундаментальная функция пространства Лоренца $\Lambda(\phi_\beta)$ эквивалентна функции $t \ln^\beta \frac{e\pi}{t}$. По этой функции и (9) определим пространство Орлича $L_{M(\beta)}$ с $M(\beta)(u) = u(\ln^+(u+1))^\beta$. Пространство Орлича с данной M-функцией совпадает с пространством Лоренца $\Lambda(\phi_\beta)$ [12, стр. 249]. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. 1) *Для* $0 < \beta < \infty$ *оператор* B *ограниченно действует из пространства Орлича* $L(\ln^+ L)^{1+\beta}$ *в пространство Орлича* $L(\ln^+ L)^{\beta}$*;* 2) *оператор* B *неограничен из симметричного пространства* F *в* $L(\ln^+ L)^{\beta}$ *в том случае, если* $F \supset L(\ln^+ L)^{1+\beta}$ *и вложение строгое.*

Теорема 7. *Оператор Беллмана* B *ограничен из пространства Орлича* $L(\ln^+ L)$ *в* L_1 *и неограничен из произвольного симметричного пространства* F *в* L_1*, если* $F \supset L(\ln^+ L)$ *и вложение строгое.*

Рисунок 2 иллюстрирует утверждения теорем 6 и 7.

Теорема 8. 1) *Оператор* B *ограничен из пространства* $L(\ln^+ L)^2$ *в пространство* $\mathrm{Re}^+ H$*; 2) оператор* B *неограничен из любого симметричного* F *в* $\mathrm{Re}^+ H$*, если справедливо строгое вложение* $F \supset L(\ln^+ L)^2$*.*

Замечание 2. Из теоремы 8 следует известная неинвариантность пространства $\mathrm{Re}^+ H$ относительно оператора B [7, 9]. Действительно, если в качестве F возьмем пространство $L(\ln^+ L)$, то оператор B неограничен из $L(\ln^+ L)$ в $\mathrm{Re}^+ H$. Так как имеет место вложение $L(\ln^+ L) \subset \mathrm{Re}^+ H$, то тем более B неограничен из $\mathrm{Re}^+ H$ в $\mathrm{Re}^+ H$.

Замечание 3. Как отмечено в работе [9], ограничения на функции f и g, задававшиеся равенствами (1) и (3), могут быть сняты с помощью разложения их на положительную и отрицательную части благодаря линейности операторов H и B. Для корректного определения оператора B необходимо на функцию g накладывать такие условия, чтобы был конечен интеграл $\frac{1}{x}\int\limits_0^x g(t)\,dt = (H_2 g)(x)$. Известно, что $H_2 g \in L_1$, если $g \in L(\ln^+ L)$ [15, стр. 460, Рис. 2].

Автор выражает благодарность Б. И. Голубову за предоставленную им информацию и внимание.

Литература

1. G. H. Hardy, *Notes on some points in the integral calculus.* — Messeuger Math. **58** (1928), 50–52.
2. R. Bellman, *A note on a theorem of Hardy on Fourier constants.* — Bull. Am. Math. Soc. **50** (1994), 741–744.
3. Е. Алшынбаева, *Преобразование коэффициентов Фурье некоторых классов функций.* — Матем. заметки **25**, No. 5 (1979), 645–651.

4. Е. Алшынбаева, *О преобразованиях коэффициентов Фурье некоторых классов функций.* Автореф. дисс. к.ф.-м.н., Тбилиси (1979).
5. K. C. Andersen, *On the transformation of Fourier coefficients of certain classes of functions.* — Pacific. J. Math. **100**, No. 2 (1982), 243–248.
6. О. Я. Берчиян, *О преобразованиях Харди и Беллмана коэффициентов Фурье функций из симметричных пространств.* — Матем. заметки **53**, No. 4 (1993), 3–12.
7. Б. И. Голубов, *О преобразованиях Харди и Беллмана пространства BMO.* — В кн.: Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам физики и механики. МФТИ, Москва 1995, с. 56–64.
8. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов.* Наука, М. (1978).
9. В. И. Голубов, *Ограниченность операторов Харди и Харди–Литтлвуда в пространствах* ReH *и* BMO. — Матем. сборник **185**, No. 11 (1994), 31–40.
10. В. А. Родин, *К вопросу о преобразовании Харди пространства* BMO. — Phystech J. **3**, No. 4 (1997), 79–83.
11. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Физматгиз, М. (1953).
12. В. А. Андриенко, *Теоремы вложения для функции одного переменного.* — В кн.: Итоги науки "Математический анализ, 1970". Москва (1971).
13. Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М. (1984).
14. В. А. Родин, Е. М. Семенов, *Ряды Радемахера в симметричных пространствах.* — Anal. Math. **1**, No. 3 (1975), 207–222.
15. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды Т. 2.* Мир, М. (1965).

Rodin V.A. Hardy and Bellman transformations in spaces close to L_∞ and to L_1.

Replacement of the coefficients of a trigonometric series by their arithmetic averages gives rise to the Hardy operator. The Bellman operator is its adjoint. The spaces L_p with $p \in [1, \infty)$ are invariant under the Hardy transformation. This result was proved by Hardy. On the other hand, the space L_∞ is not invariant under the Hardy transformation and L_1 is not invariant under the Bellman transformation. B. I. Golubov has proved that the space BMO is not invariant under the Hardy transformation and $\mathrm{Re}^+ H$ is not invariant under the Bellman operator. In the present paper the exact "shift" of the domain under the action of these operators is described for certain Orlicz, Lorenz, Marcinkiewicz spaces, BMO, and $\mathrm{Re}^+ H$. For the Hardy operator this shift occurs if the domain is close to L_∞, and for the Bellman operator if the domain is close to L_1.

Воронежский государственный
университет, кафедра теории
функций и геометрии
rodin@func.vsu.ru rodin_v@mail.ru

Поступило 5 апреля 1999 г.