Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

О. Семенова

О ПОРИСТОСТИ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА И ОГРАНИЧЕННОСТИ ОСЦИЛЛЯЦИИ ФУНКЦИИ $\log(\operatorname{dist}(X, \Lambda))$ В СЛУЧАЕ ФУКСОВОЙ ГРУППЫ БЕЗ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение.

Наличие у подмножества единичной окружности свойства пористости позволяет довольно легко доказывать ограниченность осцилляции функции, равной логарифму расстояния до этого множества.

Утверждение о пористости предельного множества чисто гиперболической конечно порожденной фуксовой группы второго рода приведено в работе [2], однако доказательство этого утверждения, изложенное в статье [2], налагает еще одно, не отмеченное в этой статье, требование на группу: следует дополнительно предположить существование фундаментального многоугольника без вершин в открытом единичном круге комплексной плоскости. Тем не менее, утверждение о пористости предельного множества выполняется для всякой конечно порожденной группы второго рода без параболических элементов, независимо от существования у этой группы фундаментального многоугольника специального вида. Основная цель настоящей статьи – доказать это утверждение и, тем самым, не только исправить неточность в работе [2], но и обобщить утверждение работы [2] на самый широкий класс конечно порожденных фуксовых групп, в котором данное утверждение может выполняться.

Приведем теперь точные формулировки основных результатов статьи и некоторые необходимые пояснения.

Формулировки основных результатов.

Множество $\mathcal{K}$ на единичной окружности $\mathbf{T}$ называем *пористым*, если существует такое положительное число δ, что для любой дуги I единичной окружности найдется дуга J, содержащаяся в $I \setminus \mathcal{K}$ и удовлетворяющая условию $|J| \geqslant \delta|I|$. Здесь $|J|$

обозначает длину дуги J.

Основные утверждения работы представляют собой следующие теоремы I и II.

Теорема I. *Пусть G – конечно порожденная фуксова группа второго рода, инвариантный круг которой – это единичный круг Δ комплексной плоскости. Предположим также, что G не содержит параболических элементов. Тогда предельное множество группы G является пористым.*

Далее символ Λ обозначает предельное множество группы G.

Теорема II. *Функция* $\log(\operatorname{dist}(x,\Lambda))$ *принадлежит классу* $BMO(\mathbf{T})$.

Здесь обозначение $\operatorname{dist}(x,\Lambda)$ отвечает расстоянию между точкой x единичной окружности и подмножеством Λ единичной окружности, порожденному метрикой длина дуги.

На протяжении всей статьи символы $\overline{\mathcal{K}}$ и $\operatorname{diam}(\mathcal{K})$ обозначают соответственно евклидово замыкание множества $\mathcal{K}$ в замкнутом единичном круге и евклидов диаметр этого множества.

План действий.

В статье [2] приводится следующее утверждение:

Пусть X – пористое подмножество единичной окружности $\mathbf{T}$. *Тогда существует положительное число C, зависящее только от X, при котором для всякой дуги I, такой что $I\cap X\neq\varnothing$, справедлива оценка:*

$$\int_I |\log(\operatorname{dist}(x,X))-\log|I||\,|dx|\leqslant C|I|.$$

С учетом этого утверждения теорема II является непосредственным следствием теоремы I, поэтому вся следующая часть статьи посвящена доказательству теоремы I.

В работе [2] при доказательстве утверждения, аналогичного теореме I, было показано, что пористость предельного множества фуксовой группы есть следствие существования для такой группы гиперболически выпуклого многоугольника D, обладающего следующими свойствами a)–f):

a) $\Delta\subseteq\bigcup_{g\in G} g(\overline{D})$;

b) многоугольник D имеет лишь конечное число вершин;

c) все вершины многоугольника D лежат на единичной окружности;

d) всякая связная компонента множества $\overline{D} \cap \mathbf{T}$ является невырожденной дугой, то есть дугой положительной длины;

e) многоугольник D лежит в регулярной области группы G, то есть $\overline{D} \cap \Lambda = \varnothing$;

f) для любого положительного числа ε неравенство $\operatorname{diam}(g(\,\overline{D}\,)) \geqslant \varepsilon$ верно лишь для конечного числа элементов g группы D.

Если в качестве D рассматривать выпуклый фундаментальный многоугольник P, как это было сделано в работе [2], то следует предположить дополнительно, что P не имеет вершин в открытом единичном круге. Цель всей последующей деятельности – в условиях теоремы I, то есть независимо от существования у группы фундаментального многоугольника специального вида, доказать существование многоугольника D, удовлетворяющего вышеперечисленным требованиям a)–f).

Доказательство теоремы I.

Так как группа G не содержит параболических элементов и является конечно порожденной, теоремы 9.4.5 и 10.1.2, доказанные в книге [1], гарантируют существование для группы G фундаментального многоугольника, устроенного следующим образом. Пересечение евклидова замыкания этого многоугольника с единичной окружностью содержится в регулярной области группы и представляет собой конечное объединение невырожденных дуг. Зафиксируем за таким многоугольником обозначение P.

Положим

$$G_* = \left\{ g \in G : g(\,\overline{P}\,) \cap \overline{P} \neq \varnothing \right\},$$
$$G_*^n = \{ g_n \circ \ldots \circ g_1 : g_1, \ldots, g_n \in G_* \} \quad \text{для} \quad n \in \mathbf{N}, \quad G_*^0 = \{ id \}. \tag{1}$$

В силу выбора многоугольника P можно утверждать, что G_* совпадает с набором $\{ g \in G : g(\,\overline{P}\,) \cap \overline{P} \cap \Delta \neq \varnothing \}$, а последний набор конечен в силу конечной порожденности группы G (см., например, теоремы 9.2.7 и 10.1.2 из [1]). Определим возрастающую последовательность замкнутых подмножеств единичной окружности:

$$\begin{aligned} K_0 &= \overline{P} \cap \mathbf{T}, \\ K_n &= G_*^n(K_0) = \\ = \bigcup \{g_n \circ \ldots \circ g_1(\overline{P}) &: g_1, \ldots, g_n \in G_*\} \quad \text{для} \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{2}$$

Нас будут интересовать свойства множеств K_n и их гиперболически выпуклых оболочек $\mathrm{Conv}\,(K_n)$.

Лемма 1. *Для каждого натурального числа n справедливы следующие утверждения:*

(I) *множество K_n лежит в регулярной области группы G и представляет собой конечное объединение замкнутых дуг единичной окружности. Все эти дуги являются невырожденными;*

(II) *множество $\mathrm{Conv}\,(K_n)$ является компактом, содержащимся в регулярной области группы G, то есть*

$$\mathrm{Conv}\,(K_n) = Cl\,(\mathrm{Conv}\,(K_n)) \subseteq \overline{\Delta} \setminus \Lambda.$$

Доказательство. (I). В силу выбора многоугольника P множество $\overline{P} \cap \mathbf{T}$ лежит в дополнении к предельному множеству, значит, и всякое множество K_n, будучи объединением образов множества $\overline{P} \cap \mathbf{T}$, лежит в $\overline{\Delta} \setminus \Lambda$. Кроме того, множество $\overline{P} \cap \mathbf{T}$ представляет собой конечное объединение невырожденных дуг, следовательно, и все множества K_n имеют тот же вид, поскольку $K_n = C_*^n(\overline{P} \cap \mathbf{T})$, а G_*^n представляет собой конечный набор элементов группы G.

(II). В силу предыдущего пункта все множества K_n являются компактами. Значит, их выпуклые оболочки также компактны. Предельное множество фуксовой группы является подмножеством единичной окружности, поэтому $(\mathrm{Conv}\,(K_n)) \cap \Lambda = (\mathrm{Conv}\,(K_n)) \cap \Lambda \cap \mathbf{T} = (\mathrm{Conv}\,(K_n) \cap \mathbf{T}) \cap \Lambda = K_n \cap \Lambda = \varnothing$, последнее из написанных равенств выполняется в силу пункта (I).

Лемма 2. *В условиях теоремы* (I) *найдутся такие натуральные числа M и N, что выполняются включения:*

$$\overline{P} \subseteq \mathrm{Conv}\,(K_N) \subseteq G_*^M(\,\overline{P}\,).$$

Доказательство. По лемме 1 для любого натурального n множество $\mathrm{Conv}\,(K_n)$ есть компакт, содержащийся в регулярной области группы G, поэтому множество $\mathrm{Conv}\,(K_n)$ пересекается лишь с конечным набором $g_1(\overline{P}), \ldots, g_{m(n)}(\overline{P})$ образов замыкания фундаментального многоугольника. Но набор $\{g(\overline{P})\}_{g\in G}$ образует покрытие множества $\overline{\Delta}\setminus\Lambda$, значит, $\mathrm{Conv}\,(K_n) \subseteq g_1(\overline{P}) \cup \ldots \cup g_{m(n)}(\overline{P})$.

Как известно, набор G_* порождает группу G, поэтому для некоторого натурального числа $M(n)$ выполняется условие

$$g_1(\overline{P}) \cup \ldots \cup g_{m(n)}(\overline{P}) \subseteq G_*^{M(n)}(\overline{P}).$$

Таким образом, для любого натурального n существует натуральное число $M(n)$, для которого справедливо соотношение $\mathrm{Conv}\,(K_N) \subseteq G_*^{M(n)}(\overline{P})$.

Для того, чтобы проверить условие $\overline{P} \subseteq \mathrm{Conv}\,(K_N)$ при некотором натуральном N, достаточно убедиться в том, что совокупность множеств $\{\mathrm{Conv}\,(K_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ образует покрытие открытого единичного круга. Тогда, поскольку $K_{n-1} \subseteq K_n$ для всякого натурального n, а множество V вершин многоугольника P конечно, должно выполняться условие $V \cap \Delta \subseteq \mathrm{Conv}\,(K_N)$ для некоторого натурального N. Но многоугольник P является выпуклым, поэтому $\overline{P} = \mathrm{Conv}\,\big((\,\overline{P} \cap \mathbf{T}) \cup (V \cap \Delta)\big) \subseteq \mathrm{Conv}\,(K_0 \cup K_N) \subseteq \mathrm{Conv}\,(K_N)$.

Итак, покажем, что совокупность множеств $\{\mathrm{Conv}\,(K_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ образует покрытие открытого единичного круга. Для этого воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 3. *Пусть G – произвольная фуксова группа, P – ее выпуклый фундаментальный многоугольник, множества K_n определены соотношениями* (2)*. Тогда имеет место включение:*

$$0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}\,(K_n).$$

То, что лемма 3 влечет необходимое для завершения доказательства леммы 2 утверждение, представляется достаточно очевидным: если x – произвольная точка открытого единичного круга, то рассмотрим группу $h^{-1}Gh$ с фундаментальным многоугольником $h^{-1}P$, где h это мёбиусово преобразование, сохраняющее единичную окружность и переводящее точку 0 в точку x. Применив лемму 3 к группе $h^{-1}Gh$, получаем

$$0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}\,(h^{-1}K_n).$$

Поскольку h является изометрией гиперболической плоскости, из последнего соотношения вытекает:

$$x = h(0) \in h\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}\,(h^{-1}K_n)\right) =$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}\,(hh^{-1}K_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Conv}\,(K_n).$$

Таким образом, набор $\{\mathrm{Conv}\,(K_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$ образует покрытие единичного круга, и лемма 2 доказана.

Для доказательства леммы 3 достаточно найти такие элементы g_1, g_2, g_3, g_4 группы G, для которых имеет место включение

$$0 \in \mathrm{Conv}\,\left(g_1\left(\overline{P} \cap \mathbf{T}\right) \cup \ldots \cup g_4\left(\overline{P} \cap \mathbf{T}\right)\right). \tag{3}$$

Тогда, поскольку G_* порождает группу G, для некоторого натурального числа l выполняется условие $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G_*^l$, поэтому $0 \in \mathrm{Conv}\,\left(G_*^l\left(\overline{P} \cap \mathbf{T}\right)\right) = \mathrm{Conv}(K_l)$. Итак, предъявим элементы, удовлетворяющие условию (3).

Обозначим через $T_1, \ldots, T_4$ открытые дуги единичной окружности длиной $\pi/4$, заключенные между точками $1, i, -1, -i$ (T_1 соединяет точки $1, i$; T_2 соединяет точки $i, -1$; и т.д.). Для $k = 1, \ldots, 4$ в качестве g_k выберем любой элемент группы G, удовлетворяющий условию $g_k(\overline{P}) \cap T_k \neq \varnothing$. Тогда элементы $g_1, \ldots, g_4$ – искомые. Действительно, выберем произвольную точку множества $g_k(\overline{P}) \cap T_k$, назвав ее a_k. Тогда $\mathrm{Re}\, a_1 > 0$, $\mathrm{Re}\, a_2 < 0$, геодезическая $\mathrm{geod}\,(a_1, a_2)$, соединяющая точки a_1 и a_2, пересекает мнимую ось в некоторой точке ib_+. Геодезическая $\mathrm{geod}\,(i, -i)$, соединяющая точки i и $-i$, совпадает с отрезком мнимой оси, заключенным между этими точками, таким образом, выполняется условие $\mathrm{geod}\,(a_1, a_2) \cap \mathrm{geod}\,(i, -i) = \{ib_+\}$. Аналогично, выполняется условие $\mathrm{geod}\,(a_3, a_4) \cap \mathrm{geod}\,(i, -i) = \{ib_-\}$, где b_- – некоторое вещественное число. При этом $\operatorname{geod}(a_1, a_2)$ лежит в верхней полуплоскости, а $\operatorname{geod}(a_3, a_4)$ – в нижней, поэтому b_+ – положительное число, а b_- – отрицательное. Значит, точка 0 лежит на отрезке геодезической $\operatorname{geod}(b_+, b_-)$, соединяющей точки b_+ и b_-. Приведенные соображения оправдывают следующую цепь включений:

$$0 \in \operatorname{geod}(b_+, b_-) = \operatorname{Conv}\left(\{b_+, b_-\}\right) =$$

$$\operatorname{Conv}\left(\{\operatorname{geod}(a_1, a_2) \cap \operatorname{geod}(i, -i), \operatorname{geod}(a_3, a_4) \cap \operatorname{geod}(i, -i)\} \right) \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname{Conv}\left(\operatorname{geod}(a_1, a_2) \cup \operatorname{geod}(a_3, a_4)\right) =$$

$$= \operatorname{Conv}\left(\{a_1, a_2, a_3, a_4\}\right) \subset \operatorname{Conv}\left(\bigcup_{k=1}^{4} g_k(\overline{P}) \cap \mathbf{T}\right).$$

Лемма 3 тем самым доказана.

Лемма 4. *В условиях теоремы* (1) *для любого положительного числа ε и каждого натурального числа n неравенство*

$$\operatorname{diam}\left(f\left(G_*^n\left(\overline{P}\right)\right)\right) \geqslant \varepsilon$$

выполняется лишь для конечного набора элементов f группы G.

Доказательство. Покажем сначала, что для каждого натурального n, любого элемента f группы G и произвольной точки x множества $f(G_*^n(\overline{P}))$ справедлива следующая оценка:

$$\operatorname{dist}\left(x, f\left(G_*^{n-1}\left(\overline{P}\right)\right)\right) \leqslant \max\left\{\operatorname{diam}\left(f\left(g\left(\overline{P}\right)\right)\right) : g \in G_*^n\right\}. \qquad (4)$$

В этом пункте $\operatorname{dist}(x, X)$ – евклидово расстояние между точкой x и множеством X, содержащимися в единичном круге. Если x – произвольная точка множества $f(G_*^n(\overline{P}))$, то найдется такой элемент g набора $G_*^n(\overline{P})$, что $x \in fg(\overline{P})$. Легко видеть, что вследствие принадлежности элемента g набору G_*^n выполняется условие $g(\overline{P}) \cap G_*^{n-1}(\overline{P}) \neq \varnothing$, поэтому $fg(\overline{P}) \cap f(G_*^{n-1}(\overline{P})) \neq \varnothing$, следовательно,

$$\operatorname{dist}\left(x, f\left(G_*^{n-1}\left(\overline{P}\right)\right)\right) \leqslant \operatorname{diam}\left(f\left(g\left(\overline{P}\right)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\operatorname{diam}\left(f\left(h\left(\overline{P}\right)\right)\right) : h \in G_*^n\right\}.$$

Используя неравенство (4), для произвольной точки x множества $f(G_*^n(\overline{P}))$ легко установить следующую оценку:

$$\operatorname{dist}\left(x, f(\overline{P})\right) = \operatorname{dist}\left(x, f(G_*^0(\overline{P}))\right) \leqslant$$

$$\leqslant (n+1) \cdot \max\left\{\operatorname{diam}\left(f\left(g\left(\overline{P}\right)\right)\right) : g \in G_*^n\right\}.$$

Вследствие этой оценки для любых точек x и y множества $f(G_*^n(\overline{P}))$ справедливо неравенство:

$$|x-y| \leqslant \operatorname{dist}\left(x, f\left(\overline{P}\right)\right) + \operatorname{diam}\left(f\left(\overline{P}\right)\right) + \operatorname{dist}\left(y, f\left(\overline{P}\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2n+1) \cdot \max\left\{\operatorname{diam}\left(f\left(g\left(\overline{P}\right)\right)\right) : g \in G_*^n\right\},$$

откуда следует

$$\operatorname{diam}\left(f\left(G_*^n\left(\overline{P}\right)\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant (2n+1) \cdot \max\left\{\operatorname{diam}\left(f\left(g\left(\overline{P}\right)\right)\right) : g \in G_*^n\right\}. \tag{5}$$

Как известно (см. [1], §9.3, утверждение (7)), для любого положительного числа ε неравенство $\operatorname{diam}(h(\overline{P})) \geqslant \varepsilon$ выполняется лишь для конечного набора элементов h группы G. Для каждого натурального n набор G_*^n представляет собой конечное множество. Поэтому при фиксированном n неравенство

$$\max\left\{\operatorname{diam}\left(f\left(g\left(\overline{P}\right)\right)\right) : g \in G_*^n\right\} \geqslant \frac{\varepsilon}{2n+1}$$

верно лишь для конечного набора элементов f группы G. Из неравенства (5) и последнего замечания вытекает требуемое утверждение. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы I. Положим $D = \operatorname{Conv}(K_N)$, где N – натуральное число, определенное в лемме 2. Проверим, что многоугольник D обладает свойствами a)–f).

В силу леммы 2 выполняется условие $\overline{P} \subseteq \operatorname{Conv}(K_N) = D$, вследствие чего

$$\Delta \subseteq \bigcup_{g\in G} g(\overline{P}) \subseteq \bigcup_{g\in G} g(\overline{D}).$$

Тем самым проверено условие a).

По лемме 1 множество K_N есть конечное объединение дуг единичной окружности, значит, дополнение множества K_N относительно окружности представляет собой множество такого же вида. Пусть дополнение множества K_N в $\mathbf{T}$ есть дизъюнктное объединение дуг $l_1, \ldots, l_m$, и для $j = 1, \ldots, m$ геодезическая с теми же концами, что и дуга l_j, есть γ_j. Тогда множество D представляет собой многоугольник, граница которого является объединением множества K_N и геодезических $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. С учетом этого замечания выполнение условий b) и c) очевидно.

Требования d) и e) удовлетворяются в силу, соответственно, первого и второго пункта леммы 1.

Вследствие леммы 2 справедливо неравенство

$$\operatorname{diam}\left(g\left(\overline{D}\right)\right) = \operatorname{diam}(g(\operatorname{Conv}(K_N))) \leqslant \operatorname{diam}\left(g\left(G_*^M\left(\overline{P}\right)\right)\right).$$

Но по лемме 4 неравенство $\operatorname{diam}\left(g\left(G_*^M\left(\overline{P}\right)\right)\right) \geqslant \varepsilon$ выполняется лишь для конечного набора элементов g группы G, поэтому выполняется требование f). Теорема доказана.

Литература

1. А. Бердон, *Геометрия дискретных групп*. Наука, М. (1986).
2. О. Л. Семенова, *Одно свойство чисто гиперболических фуксовых групп второго рода*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **255** (1998), 177–183.

Semenova O. On the porosity of the limit set and the boundedness of the oscillation of the function $\log(\operatorname{dist}(X, \Lambda))$ in the case of a Fucshian group without parabolic elements.

Let Λ be the limit set of a finitely generated Fucshian group of the second kind. If the group does not contain parabolic elements, then Λ is porous and the function $\log(\operatorname{dist}(X, \Lambda))$ belongs to the class BMO.

С.-Петербургский
государственный
университет
o_semenova@mail.ru

Поступило 2 июня 1999 г.