Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

М. А. Скопина

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ $C[-1,1]$

Задача о существовании и построении базиса (ортогонального базиса) в $C[a,b]$, состоящего из полиномов с минимально возможным ростом степеней, была поставлена П. Л. Ульяновым [1] в 1961 г. Исследования многих авторов посвящены этой проблеме. Подробное изложение истории вопроса приведено, например, в [2], мы отметим лишь ее ключевые моменты. В 1914 г. Г. Фабер [3] доказал, что не существует последовательности алгебраических многочленов P_n степени n, образующих базис в $C[a,b]$. В [4] Ал. А. Привалов усилил этот результат, показав, что если P_n образуют базис в $C[a,b]$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что степень P_n не меньше $n(1+\varepsilon)$ для $n \geqslant n_0$. А в [5] он установил окончательность этой оценки, построив пример полиномиального базиса, степени которого растут не быстрее, чем $n(1+\varepsilon)$. Однако этот базис не был ортогональным. Параллельно рассматривалась аналогичная задача для тригонометрических полиномов. Ее удалось решить благодаря использованию всплесков. Д. Оффин, К. Осколков [6] заметили, что незначительная модификация всплесков Мейера дает ортогональный базис, в котором степень полиномов лишь в два раза превышает минимальную. Заменив обычное всплеск-разложение на пакет всплесков, Р. А. Лоренц, А. А. Саакян [7] окончательно решили задачу для тригонометрических полиномов. Перенести этот результат на отрезок с помощью стандартного метода индуцированных функций не удается. В работе Т. Килгоре, Я. Престина, К. Селиж [8] задача решена для алгебраических многочленов, ортогональных с весом Чебышева первого рода. Для многочленов, ортогональных без веса, до сих пор вопрос оставался открытым.

Теорема 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность алгебраических многочленов T_n степени не выше $n(1+\varepsilon)$, образующих*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных иследований, грант 97-01-00443.

ортогональный базис в пространстве $C[-1,1]$.

Построение базиса осуществляется по той же схеме, что и в тригонометрическом случае. Базисы всплесков связаны с конструкцией кратномасштабного анализа. Чтобы распространить эту конструкцию на произвольное гильбертово пространство, определим обобщенные операторы сдвига S_j следующим образом. Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle f,g\rangle$, $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – ортонормированный базис в H. Если $f\in H$, то $f=\sum_k \widehat{f}(k)X_k$, где $\widehat{f}(k)=\langle f,X_k\rangle$. Для каждого неотрицательного целого j положим

$$S_j f=\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i 2^{-j}k}\widehat{f}(k)X_k.$$

Теорема 2. *Пусть* $G_j\in H$, $j\in\mathbb{Z}_+$, $V_j=\operatorname{span}\{S_j^n G_j, n=0,\dots,2^j-1\}$. *Если коэффициенты Фурье* G_j *удовлетворяют условиям:*

- **G**1. $\widehat{G}_0(k)=0$ *для любого* $k\neq 0$*;*
- **G**2. *для любого* $j\in\mathbb{Z}_+$ *и любого* $k=0,\dots,2^j-1$ *существует такое* $m\in\mathbb{Z}$*, что* $\widehat{G}_j(2^jm+k)\neq 0$*;*
- **G**3. *для любого* $k\in\mathbb{Z}$ *существует такое* $j\in\mathbb{Z}_+$*, что* $\widehat{G}_j(k)\neq 0$*;*
- **G**4. *для любого* $j=1,2,\dots$ *и любого* $k\in\mathbb{Z}$ *существует такое комплексное число* δ_k^j*, что* $\widehat{G}_{j-1}(2^jm+k)=\delta_k^j\widehat{G}_j(2^jm+k)$ *для всех* $m\in\mathbb{Z}$*,*

то:

1. $\{S_j^nG_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ *– базис в* V_j*, этот базис является ортонормированным тогда и только тогда, когда для всех* $k\in\mathbb{Z}$
$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|\widehat{G}_j(2^jm+k)\right|^2=2^{-j}; \tag{1}$$
2. $V_j\subset V_{j+1}$ *для любого* $j\in\mathbb{Z}_+$*;*
3. $\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}V_j$ *плотно в* H.

Семейство подпространств V_j, удовлетворяющих условиям 1–3, назовем *кратномасштабным анализом в* H. Положим $\lambda_r^j=e^{2\pi i2^{-j}}\overline{\delta^j_{r+2^{j-1}}}$ и обозначим через Δ_k и Λ_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, мультипликаторы, заданные на H и определяемые соответственно равенствами

$\widehat{\Delta_k f}(r) = \delta_r^k \widehat{f}(r)$, $\widehat{\Lambda_k f}(r) = \lambda_r^k \widehat{f}(r)$. Положим

$$H_j = \Lambda_{j+1} G_{j+1}, \quad W_j = \operatorname{span}\left\{S_j^n H_j, n = 0, \dots, 2^j - 1\right\}$$

для $j \in \mathbb{Z}_+$. Далее зафиксируем натуральное s. Для каждого целого $j \geqslant s$ и $\nu = (\nu_{j-s+1}, \dots, \nu_j)$, где ν_k принимает значения 0 и 1, положим

$$H_j^\nu = \prod_{k=j-s+1}^{j} \Delta_k^{\nu_k} \Lambda_k^{1-\nu_k} H_j, \quad W_j^\nu = \operatorname{span}\left\{S_{j-s}^n H_j^\nu, n = 0, \dots, 2^{j-s} - 1\right\}.$$

Совокупность элементов H_j^ν назовем *пакетом всплесков*.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы* 2 *выполнено соотношение* (1), *то*

1. $\left\{S_j^n H_j\right\}_{n=0}^{2^j-1}$ *и* $\left\{S_{j-s}^n H_j^\nu\right\}_{n=0}^{2^{j-s}-1}$ *являются ортонормированными базисами соответственно в* W_j *и* W_j^ν.
2. $W_j \oplus V_j = V_{j+1}$, $W_j = \bigoplus\limits_{\nu} W_j^\nu$.

Нетрудно видеть, что последовательность элементов $G_j = 2^{-j/2} \sum_{r \in \mathbb{Z}} \widetilde{\varphi}(2^{-j} k) X_k$, где $\widetilde{\varphi}$ – преобразование Фурье некоторой масштабирующей функции (см., например, [9], гл. 5), удовлетворяет условиям теоремы 2. По теореме 3 соответствующий пакет всплесков образует ортонормированный базис в H. Взяв в качестве φ масштабирующую функцию Мейера, мы получим полиномиальный ортонормированный базис. Повторяя рассуждения, проведенные в [7] для тригонометрического случая, можно показать, что рост степеней этого базиса (занумерованного в порядке их возрастания) не превосходит $n(1+\varepsilon(s))/2$, где $\varepsilon(s) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Чтобы реализовать эту схему в пространстве $L_2[-1,1]$, следует подобрать подходящий базис X_k. Пусть P_n – ортонормированные многочлены Лежандра. Положим $X_0 = P_0$, $X_n = P_{2n} + iP_{2n-1}$, $X_{-n} = \overline{X_n}$ для $n = 1, 2, \dots$. Ясно, что $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – ортонормированный базис в $L_2[-1,1]$, и алгебраические многочлены порядка $2n$ и $2n-1$ имеют степень n по отношению к этому базису.

Литература

1. П. Л. Ульянов, *О некоторых решенных и нерешенных проблемах теории ортогональных рядов*. Труды IV Всесоюзного математического съезда, Т. 2. Изд-во АН СССР, Л. 1964, с. 694–704.

2. П. Л. Ульянов, *О некоторых результатах и задачах из теории базисов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **170** (1989), 274–284.
3. G. Faber, *Über die interpolatorisce Darstelung stetiger Functionen.* — Jahresber Deutsch. Math.-Verein. **23** (1914), 192–210.
4. Ал. А. Привалов, *О росте степеней полиномиальных базисов.* — Мат. заметки **48, вып. 4** (1990), 69–78.
5. Ал. А. Привалов, *О росте степеней полиномиальных базисов и приближении тригонометрических проекторов.* — Мат. заметки **42, вып. 2** (1987), 207–214.
6. D. Offin, K. Oskolkov, *A note on orthonormal polynomials bases and wavelets.* — Constr. Appr. **9**, No. 1 (1993), 319–325.
7. R. A. Lorentz, A. A. Sahakian, *Orthogonal trigonometric Shauder bases of optimal degree for* $C(0, 2\pi)$. — J. Fourier Anal. Appl. **1**, No. 1 (1994), 103–112.
8. T. Kilgore, J. Prestin, K. Selig, *Orthogonal algebraic polynomial Shauder bases of optimal degree.* — J. Fourier Anal. Appl. **2**, No. 6 (1996), 597–610.
9. I. Daubechies, *Ten Lectures on wavelets.* — CBMS-NSR Series in Appl. Math. SIAM (1992).

Skopina M. A. On polynomial bases for the space $C[-1,1]$.

For any $\varepsilon > 0$ an orthogonal basis for the space $C[-1,1]$ is constructed consisting of algebraic polynomials P_n with deg $P_n \leqslant n(1+\varepsilon)$. The growth of degrees is best possible.

С.-Петербургский
государственный
университет
skopina@sk.usr.lgu.spb.su

Поступило 1 марта 1999 г.