Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 262, 1999 г.

Н. Д. Филонов

ОПЕРАТОР rot В ОБЛАСТЯХ КОНЕЧНОЙ МЕРЫ

Всюду, если не оговорено противное, мы предполагаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – открытое множество конечной лебеговой меры, $|\Omega| < \infty$.

1. Оператор rot, действующий в пространстве $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$, часто встречается в математической физике. Долгое время, однако, он не изучался с точки зрения спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Оператор rot, первоначально заданный на функциях из $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}^3)$, имеет бесконечные индексы дефекта. В работах [5, 6] выделено одно из самосопряженных расширений, обозначаемое ниже через R. Сужение R_J этого оператора на некоторое соленоидальное подпространство J (определение J см. в п. 3 ниже) соответствует задаче на спектр

$$\begin{cases} \operatorname{rot} u = \lambda\, u & \text{в} \quad \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{в} \quad \Omega, \\ (\operatorname{rot} u)_\nu = 0 & \text{на} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

где через f_ν обозначена нормальная составляющая вектора f на границе $\partial\Omega$. В [5, 6] показано, что при определенных условиях на *ограниченную* область Ω оператор R самосопряжен и спектр его дискретен.

Здесь мы покажем, что оператор R самосопряжен для любой области Ω, мера которой конечна. Идея доказательства заключается в том, что обратный оператор R_J^{-1} допускает представление $P_J T P_J$, где P_J – ортопроектор на J, а T – некоторый явно описываемый интегральный оператор. Из этого представления следует компактность R_J^{-1}.

2. Обсудим, далее, вопрос об асимптотике функции распределения $N^\pm(\lambda, \Omega)$ собственных чисел оператора R. Обычными вари-

Краткое сообщение; полное изложение будет опубликовано в журнале "Алгебра и Анализ". Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 96-15-96-103 и РФФИ 98-01-01-091.

ационными методами можно получить оценку снизу для главного члена асимптотики $N^{\pm}(\lambda, \Omega)$, используя ее полуаддитивность снизу как функции множества.

Для интегрального оператора T, входящего в представление обратного оператора R_J^{-1}, асимптотическое поведение собственных чисел известно (см. [1–3]). При помощи него удается установить асимптотическую оценку сверху. Таким образом, главный член асимптотики $N^{\pm}(\lambda, \Omega)$ вычисляется для произвольной области Ω конечной меры. Наконец, при дополнительных условиях на границу области $\partial\Omega$ получается асимптотическая формула с оценкой остатка (см. теоремы 2 и 3).

3. Положим

$$D_{\max} = \{u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)\},$$

$D_{\min}$ – замыкание $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{C}^3)$ по норме $\|u\|_R^2 = \|\operatorname{rot} u\|^2 + \|u\|^2$. Через $R_{\min}$, $R_{\max}$ обозначим операторы, задаваемые дифференциальным выражением rot на областях определения $D_{\min}$ и $D_{\max}$ соответственно. Разумеется, $R_{\max}^* = R_{\min} \subset R_{\max} = R_{\min}^*$. У симметричного в $L_2(\Omega, \mathbb{C}^3)$ оператора $R_{\min}$ существует бесконечно много самосопряженных расширений. Все они содержатся в $R_{\max}$, а потому также задаются выражением rot . Чтобы выделить интересующее нас расширение, понадобится следующий аналог разложения Вейля. Пусть

$$G = \ker R_{\max} = \{u \in L_2(\Omega, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} u = 0\},$$

J – замыкание в L_2 роторов гладких финитных функций, $J = \overline{\operatorname{rot} C_0^\infty}$, P_J – ортогональный в L_2 проектор на J. Тогда, очевидно, справедливо L_2-ортогональное разложение

$$L_2 = G \oplus J. \tag{1}$$

4. Р. Пикар (см. [5, 6]) предложил рассматривать операторы R_0 и R, заданные выражением rot на областях

$$D_0 = D_{\min} + G, \quad D = \{u \in D_{\max} : \operatorname{rot} u \in J\}.$$

Тогда $D_0 \subset D$ и $R_0 \subset R = R_0^*$. Для достаточно широкого класса областей (включающего ограниченные области с липшицевой границей) Пикар показал, что операторы R_0 и R совпадают и, тем самым, реализуют самосопряженное расширение $R_{\min}$. Оказывается, справедлива следующая

Теорема 1. *Для произвольного открытого множества Ω конечной меры оператор R самосопряжен, оператор R_0 в существенном самосопряжен.*

Замечания. 1) Разумеется, второе утверждение является следствием первого: $\overline{R_0} = R_0^{**} = R^* = R$.

2) Нам не известно, обязательно ли операторы R_0 и R совпадают в общем случае.

3) Пикар также рассматривал множества Ω, дополнение которых $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ ограничено. Он доказал, что в этом случае оператор R в существенном самосопряжен (см. [6]).

5. Пусть $\lambda > 0$. Обозначим через $N^{\pm}(\lambda, \Omega)$ функции распределения последовательных положительных и отрицательных (с учетом кратности) собственных чисел оператора R,

$$N^{\pm}(\lambda, \Omega) = \#\{\lambda_k \in \sigma(R) : 0 < \pm\lambda_k \leqslant \lambda\},$$

где $\sigma(R)$ – спектр оператора. Удается описать асимптотическое поведение этой величины при больших λ.

Теорема 2. *Пусть Ω – открытое множество конечной меры. Тогда справедливы асимптотические равенства*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-3} N^{\pm}(\lambda, \Omega) = (6\pi^2)^{-1} |\Omega|.$$

6. При дополнительных условиях на открытое множество Ω можно получить оценку остатка в теореме 2. При $\delta > 0$ обозначим через Γ_δ "приграничный слой"

$$\Gamma_\delta = \big\{ x \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \delta \big\}.$$

Теорема 3. *Предположим, что 1) множество Ω ограничено; 2) $|\Gamma_\delta| = O(\delta)$ при $\delta \to 0$. Тогда*

$$N^{\pm}(\lambda, \Omega) = (6\pi^2)^{-1} |\Omega| \lambda^3 + O(\lambda^2 \ln \lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Замечания. 1) Второе условие означает, что верхний двумерный объем Минковского замкнутого множества $\partial\Omega$ конечен (см. [7]).

2) Всякая ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, удовлетворяет и условиям теоремы 3.

Автор выражает благодарность М. Ш. Бирману за постоянное внимание к работе.

Литература

1. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **34**, вып. 5 (1970), 1142–1158.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории.* Труды Десятой математической школы (Нальчик, 1972), Ин-т Математики АН УкрССР, Киев, 1974, 5–189.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами.* — Вестн. ЛГУ **13**, сер. 1 (1977), 13–21.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Вейлевская асимптотика спектра оператора Максвелла для областей с липшицевой границей.* — Вестн. ЛГУ **3**, сер. 1 (1987), 23–28.
5. R. Picard, *On the Spectrum of curl.* — Preprint Technische Universität Dresden, MATH-AN-04-95 (1995).
6. R. Picard, *On a selfadjoint realization of curl in exterior domains.* — Preprint Technische Universität Dresden, MATH-AN-03-96 (1996).
7. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* Наука, М. 1987.

Filonov N. D. The operator rot in an arbitrary region of finite measure.

The definition of the self-adjoint operator rot in an arbitrary region $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ of finite measure is investigated. The spectrum of the operator is discrete. One can prove Weyl's asymptotic formula for the eigenvalues. Under an additional condition concerning the boundary of the region a remainder estimate can be obtained.

С.-Петербургский
государственный
университет
n@filonov.pdmi.ras.ru

Поступило 28 июня 1999 г.