Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Е. П. Голубева

К ТЕОРЕМЕ Б. Ф. СКУБЕНКО О ЦИКЛАХ

1. Теорема, о которой идет речь в заголовке, играет важную роль в работе Б. Ф. Скубенко [1] о распределении целых точек на однополостном гиперболоиде. В ней показано, что длины периодов двух квадратичных иррациональностей одного дискриминанта не могут значительно отличаться друг от друга.

Этот факт представляет тем больший интерес, что сами длины периодов ведут себя как функции от дискриминанта крайне нерегулярно. Их значения тесно связаны с числом классов неопределенных бинарных квадратичных форм того же дискриминанта и об оценках этих значений (особенно об оценках снизу) известно крайне мало, хотя на этот счет еще со времен Гаусса существует ряд гипотез.

Именно теорема о циклах явилась основным вкладом Б. Ф. Скубенко в развитие эргодического метода Ю. В. Линника, специально созданного для изучения законов распределения целых точек на поверхностях второго порядка, соответствующих целочисленным тернарным квадратичным формам (см. [2]).

Заметим, что даже в случае простейшего однополостного гиперболоида результаты работ [3, 4] об оценках коэффициентов Фурье модулярных форм полуцелого веса не дают возможности доказать равномерность распределения целых точек (см. [5]).

Возращаясь к теореме о циклах, заметим, что для приложений к эргодическому методу Ю. В. Линника достаточно оценки (5) из теоремы 2 настоящей работы. Эта оценка очень просто следует из известной формулы Смита из теории непрерывных дробей. Впервые она была, почти в таком же виде, получена в работе автора [6]. Как показано в настоящей работе (см. замечание 1 ниже), оценка (5) в общем случае не может быть существенно улучшена.

Тем не менее, теорема о циклах в первоначальной формулировке Б. Ф. Скубенко представляет большой самостоятельный интерес, поскольку, как уже говорилось выше, она относится к крайне ограниченному кругу известных фактов, связанных с числами классов вещественных квадратичных полей.

Прежде чем сформулировать эту теорему приведем кратко известные факты из теории неопределенных бинарных квадратичных форм и вещественных квадратичных полей в том виде, как это сделано в работе [1] (более подробно эти вопросы освещены в монографии [7]).

Пусть $\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ – целочисленная неопределенная бинарная квадратичная форма дискриминанта $D = 4(b^2 - ac)$. Пусть $D > 0$, $d = D/4$ нечетно и не совпадает с полным квадратом. Пусть форма φ является приведенной. Условия приведения можно записать в виде

$$0 < b < \sqrt{d}, \quad \sqrt{d} - b < |a| < \sqrt{d} + b. \tag{1}$$

Форме φ поставим в соответствие матрицу L, определенную следующим образом:

$$L = \begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix}.$$

Все матрицы, соответствующие эквивалентным приведенным формам, образуют период – $L_1, \ldots, L_{2k}$. При этом соседняя справа к L_i матрица L_{i+1} определяется равенством

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & z_i \end{pmatrix} L_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & z_i \end{pmatrix}^{-1} = L_{i+1}, \quad L_{2k+1} = L_1, \tag{2}$$

где $z_i > 0$ – целое число.

Пусть L и L' соответствуют представителям двух различных классов форм, $2k$ и $2k'$ – длины их периодов соответственно.

Теорема о циклах 1 (Б. Ф. Скубенко [1]). *Пусть A - матрица второго порядка с целыми коэффициентами,* $\det A = N > 0$. *Пусть $ALA^{-1} = L'$, тогда*

$$\frac{k}{k'} < c_1 \log(1 + N),$$

где c_1 – абсолютная постоянная.

В книге [2] Ю. В. Линник в разделе открытых вопросов выделяет теорему о циклах как очень интересный арифметический факт и говорит о том, что она может быть сформулирована в терминах теории бинарных квадратичных форм. Приведем здесь эту формулировку.

Теорема о циклах $1'$. *Пусть φ и φ' – две неэквивалентные формы, принадлежащие классам C и C' соответственно. Пусть $N > 1$ – наименьшее целое, представимое классом форм $C'C^{-1}$. Обозначим через k и k' количество приведенных форм, эквивалентных φ и φ' соответственно, тогда*

$$\frac{k}{k'} < c_1 \log N, \tag{3}$$

где c_1 – абсолютная постоянная.

Там же Ю. В. Линник поставил вопрос о доказательстве этой теоремы без привлечения теории матриц.

В настоящей работе мы доказываем результат Б. Ф. Скубенко, оставаясь в рамках теории неопределенных бинарных квадратичных форм и вещественных квадратичных иррациональностей, в случае, когда одна из форм принадлежит к главному классу. Кроме того, мы указываем явное значение постоянной c_1 в неравенстве (3) для этого случая. Основным результатом является соотношение (6). Постоянная 20 в этом неравенстве не является точной, но, как показано в замечании 2, эта постоянная не меньше, чем $3/\log 2$.

2. Прежде чем перейти к изложению наших результатов, напомним некоторые известные факты о квадратичных иррациональностях.

Пусть $\xi > 1$ – первый корень приведенной формы $\varphi(x,y) = ax^2 - 2bxy + cy^2$, то есть $\xi = (b+\sqrt{d})/a$, где $d = D/4$. Все первые корни приведенных форм $\varphi_i(x,y) = a_ix^2 - 2b_ixy + c_iy^2$, эквивалентных $\varphi(x,y)$, для которых $a_i > 0$, можно получить, раскладывая ξ в обыкновенную непрерывную дробь:

$$\xi_i = [\xi_i] + \frac{1}{\xi_{i+1}}. \tag{4}$$

Эта дробь является периодической. Обозначим длину периода через $l(\xi)$.

Заметим, что цепочка матричных равенств (2), определяющая период форм, соответсвует цепочке равенств (4) и $l(\xi) = k$.

Все числа a_i представляются классом форм, к которому принадлежит форма φ, и наименьшее положительное целое, представимое этим классом, содержится среди коэффициентов a_i. Обозначим это число через N, тогда один из корней ξ_i имеет вид $\xi_i = (b_i + \sqrt{d})/N$.

Пусть форма φ' принадлежит к главному классу $C' = \mathbf{1}$, а форма φ нет. Тогда $C(C')^{-1} = C$ и неравенство (3) из теоремы $1'$ приобретает для этого случая следующий вид:

$$\frac{1}{c_1 \log N} < \frac{l(\xi')}{l(\xi)} < c_1 \log N,$$

где $\xi' = n + \sqrt{d}$, $n = [\sqrt{d}]$, $\xi = (b + \sqrt{d})/N$.

Именно в таком виде, указывая дополнительно значение постоянной c_1, мы будем доказывать теорему о циклах.

Теорема 2. 1. *Для любых* ξ_1 *и* ξ_2 *имеем*

$$\frac{l(\xi_1)}{l(\xi_2)} < \frac{\log D}{2 \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}}. \tag{5}$$

2. *Пусть* ξ_1 *принадлежит к главному классу и* $\xi_2 = (b + \sqrt{d})/N$, *тогда*

$$\frac{1}{20 \log N} < \frac{l(\xi_1)}{l(\xi_2)} < 20 \log N. \tag{6}$$

3. *Пусть* $d = n^2 + k$, *где* $n = [\sqrt{d}]$, $\xi_1 = n + \sqrt{d}$, $\xi_2 = (r + \sqrt{d})/2$, *где* $r = n$, *если* k *– четное, и* $r = n - 1$, *если* k *является нечетным. Тогда*

$$l(\xi_1) < 3l(\xi_2) + 2 \tag{7}$$

и

$$l(\xi_2) < 3l(\xi_1) + 2. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть T и U – наименьшие решения уравнения Пелля $T^2 - dU^2 = \pm 1$ и $\varepsilon = T + U\sqrt{d}$. В силу формулы Смита (см. [7]) для любой приведенной иррациональности ξ имеем

$$\varepsilon = \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_l, \tag{9}$$

где $l = l(\xi)$ и ξ_i пробегает все иррациональности из соотношений (4). В силу условий приведения (1) для каждого из корней ξ_i имеет место оценка $1 < \xi_i < 2\sqrt{d}$. Таким образом, из (9) следует неравенство

$$\log \varepsilon < \log(2\sqrt{d})^l = \frac{1}{2} l \log D.$$

С другой стороны, в работе [8] показано, что

$$l/\log \varepsilon < 1/\log((1 + \sqrt{5})/2).$$

Следовательно, для любой приведенной иррациональности ξ имеем

$$\frac{2}{\log D} < \frac{l(\xi)}{\log\varepsilon} < \frac{1}{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}},$$

откуда следует первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_{l_1}$, где $l_1 = l(\xi_1)$ – все положительные приведенные иррациональности из главного класса, тогда в силу (9)

$$\varepsilon = \alpha_1\dots\alpha_{l_1}. \tag{10}$$

Точно так же

$$\varepsilon = \beta_1\dots\beta_{l_2}, \tag{11}$$

где $l_2 = l(\xi_2)$ и β_i $(1\leqslant i\leqslant l_2)$ – все положительные приведенные иррациональности, эквивалентные ξ_2.

Разобьем множество $\{\alpha_i, 1\leqslant i\leqslant l_1\}$ на два подмножества A_1 и A_2. К множеству A_1 отнесем те α_i, которые удовлетворяют условию $\alpha_i < 2N$, к A_2 – все остальные α_i. Пусть $\#(A_1) = r_1$, $\#(A_2) = r_2$, тогда $l_1 = r_1 + r_2$.

Мы можем считать, что $\xi_1 = n+\sqrt{d}$, где $n = [\sqrt{d}]$. Пусть P_i/Q_i – подходящая дробь к $n+\sqrt{d}$, тогда, в силу известных свойств непрерывных дробей, имеем

$$\left|n+\sqrt{d}-\frac{P_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i(Q_i\alpha_i+Q_{i-1})},$$

где $1\leqslant i\leqslant l_1$, $Q_0 = 0$, Q_{i-1} – знаменатель предыдущей подходящей дроби. Отсюда

$$\left|b+\sqrt{d}-\frac{R_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i(Q_i\alpha_i+Q_{i-1})},$$

где $R_i = P_i-(n-b)Q_i\geqslant Q_i$.

Пусть $\alpha_i\in A_1$, тогда

$$\left|\frac{b+\sqrt{d}}{N}-\frac{R_i}{NQ_i}\right| = \frac{1}{NQ_i(NQ_i\frac{\alpha_i}{N}+Q_{i-1})} < \frac{1}{2(NQ_i)^2}. \tag{12}$$

В силу известных критериев отсюда следует, что $R_i/(NQ_i)$ является подходящей дробью к $\xi_2 = (b+\sqrt{d})/N$. Эта дробь не обязательно является несократимой. Пусть $R_i/(NQ_i) = T_i/S_i$, где

$(T_i, S_i) = 1$, $S_i \leqslant NQ_i$. Тогда

$$\left|\frac{b+\sqrt{d}}{N} - \frac{T_i}{S_i}\right| = \frac{1}{S_i(S_i\beta_j^{(i)} + W_i)},$$

где $\beta_j^{(i)}$ – одна из иррациональностей, входящих в равенство (11), W_i – знаменатель предыдущей подходящей дроби. Сравнивая последнее равенство с (12), получаем

$$NQ_i^2\alpha_i \leqslant NQ_i(Q_i\alpha_i + Q_{i-1}) = S_i(S_i\beta_j^{(i)} + W_i)$$
$$\leqslant S_i^2(\beta_j^{(i)} + 1) \leqslant 2S_i^2\beta_j^{(i)}.$$

Значит,

$$\frac{\alpha_i}{\beta_j^{(i)}} \leqslant \frac{2S_i^2}{NQ_i^2} \leqslant 2N. \tag{13}$$

Таким образом, каждому $\alpha_i \in A_1$ можно сопоставить одну из иррациональностей $\beta_j^{(i)}$ так, что выполнено последнее неравенство. Очевидно, что разным α_i отвечают различные $\beta_j^{(i)}$.

Разобьем множество $\{\beta_j\}$ на два подмножества B_1 и B_2. К B_1 отнесем те $\beta_j^{(i)}$, которые отвечают $\alpha_i \in A_1$, к подмножеству B_2 – все остальные β_j. Ясно, что $\#(B_1) = \#(A_1) = r_1$.

Из равенств (10), (11) и неравенства (13) имеем

$$\begin{aligned}\prod_{\beta_j\in B_2}\beta_j = \prod_{\alpha_i\in A_1}\alpha_i \prod_{\alpha_i\in A_2}\alpha_i \prod_{\beta_j\in B_1}\beta_j^{-1} \leqslant (2N)^{r_2} \prod_{\alpha_i\in A_1}\frac{\alpha_i}{\beta_j^{(i)}}\\ \leqslant (2N)^{r_1+r_2} = (2N)^{l_1}.\end{aligned} \tag{14}$$

Оценим теперь сверху $\#(B_2)$. Пусть $z_j = [\beta_j]$, $1 \leqslant j \leqslant l_2$, тогда разложение β_j в непрерывную дробь имеет вид

$$\beta_j = [\overline{z_j, \dots, z_{l_2}, z_1, \dots, z_{j-1}}].$$

Ясно, что

$$\beta_j > z_j + \frac{1}{z_{j+1} + \frac{1}{z_{j+2}}} > z_j. \tag{15}$$

Разобьем B_2 на четыре непересекающихся подмножества: $B_2 = B_3 \cup B_4 \cup B_5 \cup B_6$, следующим образом:

$$B_3 = \{\beta_j \mid \beta_j > 2\}, \quad B_4 = \{\beta_j \mid \beta_j < 2, \beta_{j+1} \in B_3\},$$

$B_5 = \{\beta_j \mid \beta_j < 2, \beta_{j+1} > 2, \beta_{j+1} \in B_1\}, \quad B_6 = \{\beta_j \mid \beta_j < 2, \beta_{j+1} < 2\}.$

Очевидно, $\#(B_4) \leqslant \#(B_3)$, $\#(B_5) \leqslant \#(B_1) = r_1$.

Если $\beta_j \in B_6$, то в силу (15)

$$\beta_j > 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{z_{j+2}}} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Поэтому мы имеем

$$\prod_{\beta_j \in B_3} \beta_j \prod_{\beta_j \in B_6} \beta_j > \left(\frac{3}{2}\right)^t,$$

где $t = \#(B_3) + \#(B_6)$. Сравнивая с неравенством (14), получаем отсюда оценку

$$t < \frac{\log 2N}{\log \frac{3}{2}} l_1.$$

Таким образом, для l_2 имеем

$$l_2 = r_1 + \#(B_2) = r_1 + \#(B_3) + \#(B_4) + \#(B_5) + \#(B_6) \leqslant$$

$$\leqslant r_1 + 2\#(B_3) + r_1 + \#(B_6) < 2l_1 + 2t < 2l_1 + \frac{4 \log N}{\log \frac{3}{2}} <$$

$$< \frac{8 \log N}{\log \frac{3}{2}} < 20 \log N,$$

и правая часть неравенства (6) доказана.

Левую часть этого неравенства можно доказать аналогично. Пусть P_i/Q_i – подходящая дробь к ξ_2, тогда

$$\left|\xi_2 - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i(Q_i\beta_i + Q_{i-1})},$$

где Q_{i-1} – знаменатель предыдущей подходящей дроби. Если $\beta_i > 2N$, то

$$\left|b + \sqrt{d} - \frac{NP_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i(Q_i\frac{\beta_i}{N} + \frac{Q_{i-1}}{N})} < \frac{1}{2Q_i^2}.$$

Таким образом, в этом случае NP_i/Q_i является подходящей дробью к иррациональности $b + \sqrt{d}$. Соответственно, при $R_i = NP_i + (n-b)Q_i$ дробь R_i/Q_i является подходящей к $\xi_1 = n + \sqrt{d}$

(возможно, сократимой). Следовательно, если $T_i/S_i = R_i/Q_i$ – соответствующая несократимая дробь, то

$$\left|\xi_1 - \frac{T_i}{S_i}\right| = \frac{1}{S_i(S_i\alpha_j^{(i)} + W_i)},$$

где W_i – знаменатель предыдущей подходящей дроби.

Таким образом, каждой иррациональности β_i, удовлетворяющей условию $\beta_i > 2N$, однозначно соответствует $\alpha_i^{(j)}$. Далее, повторяя доказательство неравенства (14), мы получаем второе утверждение теоремы.

Перейдем к доказательству третьего утверждения. Для определенности мы рассмотрим случай, когда k является четным.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{l_1}$ – все приведенные положительные иррациональности, эквивалентные $\xi_1 = n + \sqrt{d}$, и $P_i/Q_i (1 \leqslant i \leqslant l_1)$ – подходящие дроби к ξ_1. Тогда

$$n + \sqrt{d} - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{(-1)^{i+1}}{Q_i(Q_i\alpha_i + Q_{i-1})}.$$

Отсюда сразу же следует, что

$$\left|\frac{n+\sqrt{d}}{2} - \frac{P_i}{2Q_i}\right| = \frac{1}{2Q_i(Q_i\alpha_i + Q_{i-1})}. \tag{16}$$

Докажем, что каждым трем последовательным дробям P_i/Q_i отвечает хотя бы одна подходящая дробь к $(n+\sqrt{d})/2$. Рассмотрим тройки последовательных иррациональностей $\{\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}\}$, где $2 \leqslant i \leqslant l_1 - 1$. Если хотя бы одно из α_j $(i-1 \leqslant j \leqslant i+1)$ удовлетворяет условию $\alpha_j > 4$, то в силу (16)

$$\left|\frac{n+\sqrt{d}}{2} - \frac{P_i}{2Q_i}\right| \leqslant \frac{1}{8Q_i^2}.$$

Таким образом, в этом случае $P_i/2Q_i$ является подходящей дробью к $(n+\sqrt{d})/2$ (возможно, сократимой).

Пусть теперь $\alpha_j < 4$ $(i-1 \leqslant j \leqslant i+1)$ и хотя бы одно из соответствующих P_j является четным, $P_j = 2P$, тогда в силу (16)

$$\left|\frac{n+\sqrt{d}}{2} - \frac{P}{2Q_i}\right| < \frac{1}{2Q_j^2}.$$

Таким образом, в этом случае искомой подходящей дробью к $(n+\sqrt{d})/2$ является P/Q. Как известно, $P_{i+1} = z_iP_i + P_{i-1}$, где $z_i = [\alpha_i]$. Если P_{i-1} и P_i оба являются нечетными и $z_i = 1$ или $z_i = 3$, то P_{i+1} – четное число.

Таким образом, чтобы доказать неравенство (7), нам осталось рассмотреть случай, когда P_{i-1} и P_i – нечетные числа и $z_i = 2$.

Как известно,

$$P_iQ_{i-1} - P_{i-1}Q_i = (-1)^i. \tag{17}$$

Пусть P и Q – наибольшие решения уравнения

$$P_iQ - 2PQ_i = (-1)^i$$

при фиксированных P_i и Q_i такие, что $Q < 2Q_i$. Из двух последних равенств, очевидно, имеем

$$P_i(Q - Q_{i-1}) = Q_i(2P - P_{i-1}).$$

Поскольку $(P_i, Q_i) = 1$, то

$$Q - Q_{i-1} = Q_it$$

и

$$2P - P_{i-1} = P_it.$$

Так как $Q < 2Q_i$, то $t = 0$ или $t = 1$. Если $t = 0$, то $P_{i-1} = 2P$. Этот случай невозможен, поскольку P_{i-1} является нечетным числом. Таким образом,

$$t = 1, \quad Q = Q_i + Q_{i-1} \quad \text{и} \quad P = (P_i + P_{i-1})/2.$$

Покажем, что в этом случае P/Q является подходящей дробью к $(n+\sqrt{d})/2$. Действительно,

$$\left|\frac{n+\sqrt{d}}{2} - \frac{P_i + P_{i-1}}{2(Q_i + Q_{i-1})}\right|$$

$$= \left(\frac{n+\sqrt{d}}{2} - \frac{P_i}{2Q_i}\right) + \left(\frac{P_i}{2Q_i} - \frac{P_i + P_{i-1}}{2(Q_i + Q_{i-1})}\right).$$

В силу равенств (16) и (17) последнее выражение преобразуется к виду

$$\frac{(-1)^{i+1}}{2Q_i(Q_i\alpha_i + Q_{i-1})} + \frac{(-1)^i}{2Q_i(Q_i + Q_{i-1})}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{n+\sqrt{d}}{2}-\frac{P}{Q}\right|=\frac{\alpha_i-1}{2(Q_i+Q_{i-1})(Q_i\alpha_i+Q_{i-1})}.$$

Покажем, что правая часть последнего равенства меньше, чем $1/(2Q^2)$. Предположим, что

$$\frac{\alpha_i-1}{2(Q_i+Q_{i-1})(Q_i\alpha_i+Q_{i-1})}\geqslant\frac{1}{2(Q_i+Q_{i-1})^2},$$

тогда

$$(\alpha_i-1)(Q_i+Q_{i-1})\geqslant Q_i\alpha_i+Q_{i-1}\quad\text{и}\quad \alpha_iQ_{i-1}\geqslant Q_i+2Q_{i-1}.$$

Последнее неравенство не может быть справедливым, поскольку $Q_i>Q_{i-1}$, а, так как $[\alpha_i]=2$, то $\alpha_i<3$.

Таким образом, каждой тройке $\{P_{i-1}/Q_{i-1}, P_i/Q_i, P_{i+1}/Q_{i+1}\}$ последовательных подходящих дробей к $n+\sqrt{d}$ отвечает как минимум одна подходящая дробь P/Q к $(n+\sqrt{d})/2$. При этом $Q=Q_j$ или $Q=2\,Q_j(i-1\leqslant j\leqslant i+1)$ или $Q=Q_i+Q_{i-1}$. Дроби, соответствующие двум непересекающимся тройкам, различны, поскольку $(Q_{i+2},Q_{i+1})=1$ и $Q_{i+2}>Q_i+Q_{i-1}$. Тем самым неравенство (7) доказано.

Неравенство (8) можно доказать аналогично. Пусть

$$\frac{n+\sqrt{d}}{2}-\frac{P_i}{Q_i}=\frac{(-1)^{i+1}}{Q_i\alpha_i+Q_{i-1}},$$

тогда

$$n+\sqrt{d}-\frac{2P_i}{Q_i}=\frac{(-1)^{i+1}}{Q_i(Q_i\frac{\alpha_i}{2}+\frac{Q_{i-1}}{2})}.$$

Если $\alpha_i>4$, то $2P_i/Q_i$ является подходящей дробью к $n+\sqrt{d}$ (возможно, сократимой). Если $Q_i=2Q$, то P_i/Q является подходящей дробью к $n+\sqrt{d}$. Если $[\alpha_i]=2$ и оба знаменателя Q_{i-1} и Q_i – нечетные числа, то $2(P_i+P_{i-1})/(Q_i+Q_{i-1})$ является подходящей дробью к $n+\sqrt{d}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Как уже говорилось во введении, неравенство (5) в общем случае может быть улучшено разве что на постоянный множитель.

Доказательство. Для доказательства этого замечания достаточно рассмотреть последовательность вида $d = n^2 - 2$. Пусть $\xi_1 = n - 1 + \sqrt{d}$, тогда разложение ξ_1 в непрерывную дробь имеет вид $\xi_1 = [\overline{2(n-1), 1, (n-2), 1}]$ и $l(\xi_1) = 4$.

С другой стороны, в работе [6] было показано, что для всех достаточно больших d имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{h(d)} l(\xi_i) > \frac{7}{\pi^2}\sqrt{d}\,L_d(1) + O_\eta(d^{\frac{1}{2}-\eta}), \tag{18}$$

где $h(d)$ – число классов бинарных квадратичных форм дискриминанта $4d$, суммирование распространено на все неэквивалентные положительные приведенные квадратичные иррациональности этого дискриминанта, $\eta > 0$ – произвольная постоянная, $L_d(s)$ – L-ряд Дирихле с квадратичным характером $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$.

Множество положительных приведенных иррациональностей, принадлежащих к главному классу, имеет вид $\{n-1+\sqrt{d}, (n-1+\sqrt{d})/(2n-3), (n-2+\sqrt{d})/2, (n-2+\sqrt{d})/(2n-3)\}$. Следовательно, по формуле Смита для основной единицы ε поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ имеем

$$\varepsilon = (n-1+\sqrt{d})\frac{n-1+\sqrt{d}}{2n-3}\,\frac{n-2+\sqrt{d}}{2}\,\frac{n-2+\sqrt{d}}{2n-3} = 2d + O(\sqrt{d}).$$

Поэтому $h(d) = 2\sqrt{d}L_d(1)/\log\varepsilon = 2\sqrt{d}L_d(1)/\log d + O(1)$. Таким образом, для достаточно больших d из неравенства (18) следует, что существует иррациональность ξ такая, что

$$l(\xi) > \frac{7}{2\pi^2}\log d + O(1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{l(\xi)}{l(\xi_1)} > \frac{7}{8\pi^2}\,\log d + O(1).$$

Замечание 2. Константа 3 в неравенстве (7) является неулучшаемой.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения можно рассмотреть последовательность вида $d = (F_n^2+1)\ (5F_n^2+1)/4$, где $\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, ...,\}$ – последовательность Фибоначчи, $n \not\equiv 2 \pmod 3$, вследствие чего F_n – нечетное число. В работе [9] показано, что при четном n разложение $\sqrt{d}$ в непрерывную дробь имеет вид

$$\sqrt{d} = [r, \overline{\underbrace{1, \ldots, 1}_{2n+1}, 2r}],$$

где $r = [\sqrt{d}]$. Можно показать, что $r = (2F_nF_{n+1} - F_n^2 + 1)/2$. Если $F_n \equiv F_{n+1} \equiv 1 \pmod 2$, то r является нечетным. Поскольку d так же нечетно, то $d = r^2 + 2k$. Следовательно,

$$\frac{r+\sqrt{d}}{2k} = [\overline{\underbrace{1, \ldots, 1}_{2n+1}, 2r}].$$

Отсюда вытекает, что

$$\left| \frac{r+\sqrt{d}}{2k} - \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \right| = \frac{1}{F_{2n}(F_{2n}(r+\sqrt{d}) + F_{2n-1})}. \qquad (19)$$

Найдем разложение в непрерывную дробь иррациональности $(r+\sqrt{d})/2$. На первом шаге имеем

$$\frac{r+\sqrt{d}}{2} = r + \frac{1}{\frac{r+\sqrt{d}}{k}}.$$

Далее, в силу (19), имеем

$$\left| \frac{r+\sqrt{d}}{k} - \frac{2F_{2n+1}}{F_{2n}} \right| = \frac{1}{F_{2n}(F_{2n}\frac{r+\sqrt{d}}{2} + \frac{F_{2n-1}}{2})} < \frac{1}{2F_{2n}^2}.$$

Таким образом, $2F_{2n+1}/F_{2n}$ является подходящей дробью к $(r+\sqrt{d})/k$ и разложения в непрерывные дроби совпадают до тех пор пока разложение $2F_{2n+1}/F_{2n}$ не закончится. Найдем разложение $2F_{2n+1}/F_{2n}$. Поскольку n четно и F_n, F_{n+1} являются нечетными, то $n = 6t$. Так как $3F_{12t} < 2F_{12t+1} < 4F_{12t}$, то

$$\frac{12F_{12t+1}}{F_{12t}} = 3 + \frac{1}{\frac{F_{12t}}{2F_{12t-1} - F_{12t}}} = 3 + \frac{1}{\frac{F_{12t}}{F_{12t-3}}}.$$

Легко показать, что $F_{12t}/F_{12t-3} = [\underbrace{4, \ldots, 4}_{4t}, 3]$. Таким образом,

$$\frac{r+\sqrt{d}}{k} = [3, \underbrace{4, \ldots, 4}_{4t}, 3, (r+\sqrt{d})/2]$$

и $(r+\sqrt{d})/2 = [\overline{r, 3, \underbrace{4, \dots, 4}_{4t}, 3}]$. Следовательно, $l((r+\sqrt{d})/2) = 4t+3$.
Поскольку $l(r+\sqrt{d}) = 2n+2 = 12t+2$, то $l(r+\sqrt{d}) = 3l((r+\sqrt{d})/2)-7$, и замечание 2 доказано.

Литература

1. Б. Ф. Скубенко, *Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы,* Изв. АН СССР, сер. матем. **26**, No. 5 (1962), 721–752.
2. Ю. В. Линник, *Эргодические свойства алгебраических полей,* Л. 1967.
3. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight,* Invent. Math. **87** (1987), 385–401.
4. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms,* Invent. Math. **92** (1988), 73–90.
5. Е. П. Голубева, *Геодезические на верхней полуплоскости и распределение квадратичных иррациональностей,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 28–55.
6. Е. П. Голубева, *О длине периода квадратичной иррациональности,* Мат. сб. **123**, No. 1 (1984), 120–129.
7. Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел,*. М.-Л. 1937.
8. А. С. Пен, Б. Ф. Скубенко, *Оценка сверху периода квадратичной иррациональности,* Мат. заметки **5**, No. 4 (1969), 413–417.
9. Е. П. Голубева, *Квадратичные иррациональности с фиксированной длиной периода разложения в непрерывную дробь,* Зап. научн. семин. ПОМИ **196** (1991), 5–30.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 9 сентября 1999 г.