Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Е. П. Голубева

СПЕКТР КОНСТАНТ ЛЕВИ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

1. Введение. Пусть ξ – вещественная квадратичная иррациональность и

$$\xi = [n_1, \dots, n_k, \overline{t_1, \dots, t_l}] \tag{1}$$

– ее разложение в обыкновенную непрерывную периодическую дробь.

Пусть Pn/Qn – последовательность подходящих дробей для разложения в непрерывную дробь вещественного числа x. Константой Леви для x называется число

$$\beta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log Q_n.$$

Теорема Леви (см. [1]) утверждает, что для почти всех (по мере Лебега) x константа Леви равна $\pi^2/12\log 2$.

Легко показать (см., например, [2]), что для квадратичной иррациональности константа Леви существует. Положительная иррациональность ξ называется приведенной, если разложение (1) является чисто периодическим. Пусть d – определитель целочисленной неопределенной бинарной квадратичной формы, корнем которой является ξ.

Для приведенного ξ имеют место соотношения

$$\beta(\xi) = \sum_{i=1}^{l} (\log \xi_i)/l = (\log \varepsilon(d))/l, \tag{2}$$

где суммирование распространено на все приведенные положительные иррациональности, целочисленно эквивалентные ξ (собственно или несобственно), l – длина разложения (1), $\varepsilon(d)$ – основная единица того порядка (не обязательно максимального) в кольце целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, которому принадлежит ξ.

Из условий приведения (см., например, [3]) вытекает, что $\xi_i \leqslant n + \sqrt{d}$, где $n = [\sqrt{d}]$. Таким образом,

$$\log \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \beta(\xi) \leqslant \log(n + \sqrt{d}).$$

Обе последние оценки являются, вообще говоря, неулучшаемыми. Нижняя граница достигается в случае, когда $\xi = (1+\sqrt{5})/2$, а верхняя – когда $d = n^2+1$ и $\xi = \sqrt{d}$.

В работе [4] было показано, что множество всех значений $\beta(\xi)$ всюду плотно на промежутке $[\log((1+\sqrt{5})/2), \infty)$. Иначе ведут себя значения $\beta(\xi)$ при усреднениях по иррациональностям фиксированного дискриминанта. Есть все основания предполагать, что при $d \to \infty$

$$\sum_{\xi} \beta(\xi)/R(d) = \frac{\pi^2}{12\log 2} + o(1), \tag{3}$$

где суммирование идет по всем приведенным положительным иррациональностям определителя d, а $R(d)$ – количество таких иррациональностей.

Это равенство заведомо имеет место, если целые точки на однополостном гиперболоиде

$$\begin{aligned} &b^2 - ac = d\ , \quad \text{если} \quad d \equiv 2,3 \pmod 4, \\ &b^2 - 4ac = d, \quad \text{если} \quad d \equiv 1 \pmod 4 \end{aligned} \tag{4}$$

распределены по мере $dadb/|a|$. Доказательство этого факта приведено в теореме 2 настоящей работы, а равномерная распределенность целых точек была впервые доказана Б. Ф. Скубенко в работе [5] при дополнительных условиях на число d.

Аналогичный результат для произвольного d был доказан в работе [6] при условии, что расширенная гипотеза Римана справедлива для всех L-функций Дирихле с квадратичными характерами $\left(\frac{\pm d}{\cdot}\right)$. Точнее, предполагалось, что эти L-функции не имеют нулей в некотором прямоугольнике в окрестности 1. (Более подробно об этом говорится ниже.)

Обозначим через $h(d)$ число класов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, тогда в равенстве (3) число $R(d) = l$, а

$$\sum_{\xi} \beta(\xi) = l\beta(\xi),$$

где ξ – любая иррациональность определителя d. Таким образом, при условии справедливости расширенной гипотезы Римана мы имеем для этого случая асимптотическое равенство при $d \to \infty$

$$\beta(\xi) = \frac{\pi^2}{12\log 2} + o(1), \tag{5}$$

то есть $\beta(\xi)$ ведет себя так же, как для почти всех вещественных чисел.

Все целые алгебраические квадратичные иррациональности определителя d эквивалентны $\omega = \sqrt{d}\,m$, если $d \equiv 2,3 \pmod 4$ и $\omega = (1+\sqrt{d}\,m)/2$, если $d \equiv 1 \pmod 4$. Обозначим через B множество $\{\beta(\omega), d \neq t^2\}$. Вопрос о структуре множества B представляется крайне сложным.

В настоящей работе доказано (без использования расширенной гипотезы Римана или следствий из нее), что число $\pi^2/12\log 2$ является точкой сгущения множества B.

С нашей точки зрения представляются крайне интересными следующие вопросы:

могут ли значения $\beta(\omega)$ совпадать при разных ω;

имеет ли B другие точки сгущения;

существует ли промежуток такой, что пересечение B с этим промежутком состоит из изолированных точек;

в частности, является ли самая левая точка B т.е. $\log((1+\sqrt{5})/2)$, изолированной?

Поскольку логарифмы чисел из разных квадратичных полей не могут отличаться на рациональный множитель, то $\beta(\sqrt{d_1}) \neq \beta(\sqrt{d_2})$, если $d_1 \neq d_2 m^2$. Если же $d_1 = d_2 m^2$, то случаи, когда $\beta(\sqrt{d_1}) = \beta(\sqrt{d_2})$, априори нельзя исключить, хотя они должны быть достаточно редкими.

Вполне вероятно, что множество B устроено так же, как спектр Маркова последовательных минимумов бинарных неопределенных квадратичных форм с вещественными коэффициентами: существует промежуток вида $[\log((1+\sqrt{5})/2), A]$ такой, что пересечение этого промежутка с B состоит из изолированных точек, а далее на промежутке (A,∞) множество B всюду плотно.

Некоторое подтверждение тому факту, что точка $\log((1+\sqrt{5})/2)$ является изолированной, содержится в работе [7], где было показано, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих условию $p \equiv 3 \pmod 4$, $\beta(\sqrt{p}) > \log\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1, в которой расширяется класс дискриминантов, для которых $\beta(\sqrt{d})$ отделено от $\log((1+\sqrt{5})/2)$.

Обозначим через F_k – k-ое число Фиббоначи и через P – множество простых чисел p таких, что $F_k \not\equiv 0 \pmod p$ при $1 \leqslant k \leqslant p$.

Теорема 1. *Пусть $p \in P$ и какая-либо бинарная форма дискриминанта $4d$ при $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ или d при $d \equiv 1 \pmod 4$, принадлежащая главному классу, представляет число $\pm p$. Тогда при $d > p^{pc}$, где c – произвольная достаточно большая постоянная, имеем*

$$\beta(\sqrt{d}) > \log((1+\sqrt{5})/2) + \frac{1}{2p}\log\frac{7}{6} + \frac{1}{pc}\log\frac{6}{7}. \tag{6}$$

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Заметим, что множество P не пусто. Легко проверить, что оно содержит числа $2, 3, 7, 23, 43, 67, \ldots$. Таким образом, например, для чисел d вида $d = r^2 \pm 3$, $d = r^2 \pm 7$, $d = 9r^2 + 8r + 1$ константа $\beta(\sqrt{d})$ удовлетворяет неравенству (6) при $p = 3$ для первого случая и при $p = 7$ для остальных двух (см. следствие 1 ниже).

В работе [8] было показано, что если $p \equiv 3 \pmod 4$, то $p \in P$ тогда и только тогда, когда $h(5p^2) = 2$.

Последнее равенство имеет место в том и только том случае, когда $(1+\sqrt{5})/2$ является первообразным корнем по модулю p.

Если предположить, что расширенная гипотеза Римана справедлива для всех ζ-функций некоторого набора алгебраических полей, то можно показать, что множество P имеет положительную плотность во множестве всех простых чисел (подробности см. в работе [8]).

Еще одно следствие из теоремы 1 прямо вытекает из равенства (2): для таких d

$$|l \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \log\varepsilon(d)| > \left(\frac{1}{2p}\log\frac{7}{6}\right) l + \frac{1}{2}\log\frac{6}{7}.$$

Это неравенство не вытекает из известных оценок линейных форм от логарифмов алгебраических чисел (см. следствие 2 из теоремы 1 ниже).

Доказательство теоремы 1 основано на том факте, что в этом случае в разложении

$$\sqrt{d} = [n, \overline{t_1, \ldots, t_l}] \tag{7}$$

элементы t_i достаточно часто отличны от 1.

Напрашиваются аналогии между теоремой 1 и классической теоремой Бореля из теории непрерывных дробей и первыми шагами в теореме Маркова о минимумах неопределенных бинарных квадратичных форм.

Следует однако заметить, что здесь речь идет, скорее, о среднем арифметическом значений бинарной квадратичной формы, которые совпадают с первыми коэффициентами всех приведенных форм фиксированного дискриминанта из главного класса, а не о минимальных значениях, поэтому доказать дискретность этих средних гораздо труднее.

2. Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы нам понадобятся несколько лемм.

Для любого $a \not\equiv 0 \pmod p$ через a' обозначим обратный элемент $\pmod p) : aa' \equiv 1 \pmod p$.

Лемма 1. *Пусть $p \in P$, тогда множество $F_k F'_{k+1}$ пробегает полную систему вычетов по модулю p.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что из того, что $p \in P$, следует, что $p \equiv 3 \pmod 4$ или $p = 2$. Как известно, множество вычетов $F_k \pmod p$ периодично с периодом $p+1$.

Таким образом, если утверждение леммы неверно, то для каких-либо k и m, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant k \leqslant p+1$ и $1 \leqslant m \leqslant p+1$, имеет место сравнение

$$F_k F'_{k+1} \equiv F_m F'_{m+1} \pmod p. \tag{8}$$

Очевидно, его можно переписать в виде

$$F_k F_{m+1} - F_m F_{k+1} \equiv 0 \pmod p.$$

В силу известных свойств чисел Фиббоначи, $F_k F_{m+1} - F_m F_{k+1} = \pm F_{|k-m|}$. Поэтому из последнего сравнения вытекает, что $F_r \equiv 0 \pmod p$ при некотором $r \leqslant p$. Так как $p \in P$, то последнее сравнение и вместе с ним сравнение (8) не могут иметь место.

Лемма 2. *Пусть Q_0 и Q_1 – произвольные целые числа и последовательность $\{Q_k, k \geqslant 2\}$ задана с помощью рекуррентного равенства $Q_k = Q_{k-1} + Q_{k-2}$. Пусть $p \in P$. Тогда существует k такое, что $0 \leqslant k \leqslant p$ и $Q_k \equiv 0 \pmod p$.*

Доказательство. Легко видеть, что при $k \geqslant 2$ мы имеем

$$Q_k = Q_1 F_k + Q_0 F_{k-1}. \tag{9}$$

Если $Q_0 \not\equiv 0 \pmod p$, то в силу утверждения леммы 1 можно выбрать номер k так, что $1 \leqslant k \leqslant p$ и $F'_k F_{k-1} \equiv -Q'_0 Q_1 \pmod p$. Тогда из равенства (9) следует, что $Q_k \equiv 0 \pmod p$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть вещественное число α_r задано с помощью равенства*

$$\alpha_r = [\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, 2, \ldots].$$

Тогда при четном r число $\alpha_r > (1+\sqrt{5})/2$.

Доказательство. Докажем утверждение леммы по индукции. При $r = 0$, очевидно, $\alpha_0 > 2 > (1+\sqrt{5})/2$. Так как

$$\alpha_{2r+2} = 1 + \frac{1}{\alpha_{2r+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_{2r}}} = \frac{2\alpha_{2r}+1}{\alpha_{2r}+1},$$

и правая часть равенства монотонно возрастает вместе с α_{2r}, то при $\alpha_{2r} > (1+\sqrt{5})/2$ имеем

$$\alpha_{2r+2} > \frac{2\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = \frac{2+\sqrt{5}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

и лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть, для определенности, $d \equiv 2, 3 \pmod 4$. Как уже говорилось во введении, в работе [7] при $p = 2$ для $\beta(\sqrt{d})$ уже была получена более сильная оценка. Таким образом, мы можем считать, что $p \geqslant 3$. Рассмотрим разложение $\sqrt{d}$ в непрерывную дробь,

$$\sqrt{d} = [n, \overline{a_1, \ldots, a_l}]. \tag{10}$$

Получим прежде всего оценку снизу для l. Поскольку главный класс представляет число p или $-p$, то все числа вида p^k или $(-p)^k$ соответственно так же представляются главным классом. Таким образом, в главном классе существует форма $ax^2 + 2bxy + cy^2$ такая, что $a = \pm p^k$. Если $|a| < \sqrt{d}$, то коэффициент b можно подобрать так, что $\sqrt{d} - |a| < b < \sqrt{d}$. Таким образом, можно считать, что последняя форма является приведенной (по поводу условий приведения см., например, [3]). Это означает, что в равенстве (2) при $\xi = \sqrt{d}$ одно из ξ_i имеет вид $\xi_i = (b+\sqrt{d})/p^k$. Из условия $p^k < \sqrt{d}$ имеем оценку $k < \frac{1}{2}\log d/\log p$. Поскольку $d > p^{pc}$, получаем отсюда неравенство

$$l > \frac{1}{2}\,\frac{\log d}{\log p} > \frac{1}{2}\,pc. \tag{11}$$

Покажем, что в разложении (10) любому набору последовательных элементов, состоящему только из $a_i = 1$ и имеющему длину $p-1$, отвечает по меньшей мере один элемент, который больше 1.

Поскольку число $\pm p$ представляется главным классом и $p < \sqrt{d}$, то существует иррациональность вида $(b+\sqrt{d})/p$, эквивалентная $\sqrt{d}$. Следовательно, ее разложение в непрерывную дробь так же содержит этот набор из 1, поскольку оно получается из (10) круговой перестановкой элементов.

Пусть

$$\frac{b+\sqrt{d}}{p} = [\overline{t_1, \dots, t_l}]$$

и $t_r = \dots = t_{r+p-2} = 1$. Тогда

$$\left|\frac{b+\sqrt{d}}{p} - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i(Q_i\xi_i + Q_{i-1})}, \tag{12}$$

где P_i/Q_i – подходящая дробь и для $i \geqslant r$ $[\xi_i] = t_i = 1$. Знаменатели этих подходящих дробей при $r \leqslant i \leqslant r+p-2$ удовлетворяют соотношениям $Q_i = Q_{i-1} + Q_{i-2}$. В силу утверждения леммы 2, найдется номер k такой, что $r \leqslant k \leqslant r+p-2$ и $Q_k \equiv 0 \pmod{p}$.

Положим $Q_k = pN_k$, тогда равенство (12) можно переписать в виде

$$\left|\frac{b+\sqrt{d}}{p} - \frac{P_k}{pN_k}\right| = \frac{1}{pN_k(pN_k\xi_k + Q_{k-1})}. \tag{13}$$

Отсюда следует, что

$$\left|b+\sqrt{d} - \frac{P_k}{N_k}\right| < \frac{1}{pN_k^2}.$$

Значит, P_k/N_k является подходящей дробью к $b+\sqrt{d}$, а $(P_k+n-b)/N_k$ является подходящей дробью к $n+\sqrt{d}$. Из равенства (13) мы имеем

$$\left|n+\sqrt{d} - \frac{P_k+n-b}{N_k}\right| = \frac{1}{N_k(pN_k\xi_k + Q_{k-1})}.$$

Поскольку $(P_k+n-b)/N_k$ является подходящей дробью к $n+\sqrt{d}$, то

$$\left|n+\sqrt{d} - \frac{P_k+n-b}{N_k}\right| = \frac{1}{N_k(N_k\alpha + N_{k-1})} > \frac{1}{N_k^2(\alpha+1)},$$

где α – соответствующее полное частное и N_{k-1} – знаменатель предыдущей подходящей дроби. Сравнивая правые части двух последних соотношений, получаем

$$N_k(\alpha+1) > pN_k\xi_k + Q_{k-1} > pN_k\xi_k.$$

Отсюда следует, что $\alpha > p\xi_k - 1$. Так как $p \geqslant 3$ и $\xi_k > 1$, то $\alpha > 2$.

Таким образом, каждому набору из 1 длины $p-1$ в разложении (10) действительно отвечает по крайней мере один элемент a_i этого разложения, удовлетворяющий условию $a_i \geqslant 2$.

Поскольку таким непересекающимся наборам соответствуют различные подходящие дроби P_k/Q_k, то среди элементов a_i разложения (10) найдется по крайней мере $[l/p]/2$ элементов, удовлетворяющих условию $a_i \geqslant 2$. Количество неединичных элементов обозначим через N.

Так как $\beta(\sqrt{d})$ является монотонно возрастающей функцией от любого элемента a_i, то мы можем считать, что в разложении (10) все элементы совпадают с 1 или 2.

Таким образом, каждая из иррациональностей ξ_i, входящих в сумму (2), имеет вид $\xi_i = [\overline{\underbrace{1,\ldots,1}_{r_i},2,\ldots,t}]$, где $t=1$ или $t=2$. Разобьем множество всех ξ_i на два подмножества X_1 и X_2 следующим образом: к X_1 мы отнесем те ξ, для которых $\xi=[2,\ldots]$ или $\xi=[1,2,\ldots]$, к X_2 – все остальные.

Количество иррациональностей, входящих в X_1, первого типа равно N. Обозначим через M количество иррациональностей второго типа в X_1. Ясно, что $M \leqslant N$.

В первом случае $\xi > 2 + \frac{1}{2+1} = 7/3$. Во втором случае $\xi > 1 + 1/3 = 4/3$. Таким образом,

$$\prod_{\xi\in X_1}\xi > \left(\frac{7}{3}\right)^N \left(\frac{4}{3}\right)^M. \tag{14}$$

После простых преобразований для правой части имеем

$$\left(\frac{7}{3}\right)^N \left(\frac{4}{3}\right)^M = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N+M} \left(\frac{14}{3(1+\sqrt{5})}\right)^N \left(\frac{8}{3(1+\sqrt{5})}\right)^M =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N+M} \left(\frac{7(\sqrt{5}-1)}{6}\right)^{N-M} \left(\frac{14(3-\sqrt{5})}{9}\right)^M.$$

Поскольку $7(\sqrt{5}-1)/6 > 14(3-\sqrt{5})/9$ и $3-\sqrt{5} > 3/4$, для левой части (14) получаем оценку

$$\prod_{\xi\in X_1}\xi > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N+M}\left(\frac{14(3-\sqrt{5})}{9}\right)^{N} > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N+M}\left(\frac{7}{6}\right)^{N}.$$

Так как $N \geqslant [l/p]/2$, то окончательно имеем

$$\prod_{\xi\in X_1}\xi > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{N+M}\left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{l-p}{2p}}. \tag{15}$$

Если $\xi \in X_2$, то разложение ξ в непрерывную дробь имеет вид $\xi = [\underbrace{1,\ldots,1}_{r},2,\ldots]$, где $r \geqslant 2$. Рассмотрим произвольный интервал из элементов (10), состоящий из 1, длины $m \geqslant 2$. Пусть $\xi_i,\ldots,\xi_{i+m-2}$ – соответствующие этому интервалу иррациональности: $\xi_i = [\underbrace{1,\ldots,1}_{m},2,\ldots],\ldots,\xi_{i+m-2} = [1,1,2,\ldots]$.

Поскольку $\xi_w = 1+1/\xi_{w-1}$, то $\xi_w\xi_{w-1} = \xi_{w-1}+1$.

Если $w-1$ четно, то в силу результата леммы 3 $\xi_{w-1} > (1+\sqrt{5})/2$. Следовательно,

$$\xi_w\xi_{w-1} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}+1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}.$$

Если m нечетно, то из последнего неравенства вытекает, что

$$\prod_{k=i}^{i+m-2}\xi_k > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}. \tag{16}$$

Пусть m четно, тогда, снова используя лемму 3, в силу которой $\xi_i > (1+\sqrt{5})/2$, и последнее неравенство, получаем

$$\prod_{k=i}^{i+m-2}\xi_k > \xi_i\prod_{k=i+1}^{i+m-2}\xi_k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}.$$

Таким образом, неравенство (16) имеет место в любом случае.

Так как $\#(X_2) = l - N - M$, то перемножая неравенства (16), соответствующие всем интервалам элементов разложения (10), состоящим из единиц, получаем

$$\prod_{\xi \in X_2} \xi > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{l-N-M}.$$

Объединяя последнее неравенство с оценкой (15), получаем

$$\varepsilon = \prod_{\xi \in X_1 \cup X_2} \xi > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{l} \left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{l-p}{2p}}.$$

Следовательно,

$$\log \varepsilon > l \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{l}{2p} \log \frac{7}{6} + \frac{1}{2} \log \frac{6}{7}$$

и

$$\beta(\sqrt{d}) > \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2p} \log \frac{7}{6} + \frac{1}{2l} \log \frac{6}{7}.$$

В силу неравенства (11)

$$\beta(\sqrt{d}) > \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2p} \log \frac{7}{6} + \frac{1}{pc} \log \frac{6}{7} \tag{17}$$

и теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $d = n^2 \pm 3$ и $d > 3^9$, тогда*

$$\beta(\sqrt{d}) > \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{18} \log \frac{7}{6}.$$

Пусть $d = n^2 \pm 7$ или $d = 9n^2 + 8n + 1$ и $d > 7^{21}$, тогда

$$\beta(\sqrt{d}) > \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{42} \log \frac{7}{6}.$$

Пусть $d = n^2 \pm 43$ или $d = (3n+7)^2 + 2n$ или $d = (7n+3)^2 + 2n$ или $d = (21n+1)^2 + 2n$ и $d > 43^{129}$, тогда

$$\beta(\sqrt{d}) > \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{258} \log \frac{7}{6}.$$

Доказательство. Число 3 принадлежит множеству P. Поэтому, если главный класс форм определителя d представляет число ± 3 и $d > 3^9$, то из неравенства (17) получаем

$$\beta(\sqrt{d}) > \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{6}\log\frac{7}{6} + \frac{1}{9}\log\frac{6}{7} = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{18}\log\frac{7}{6}.$$

Если $d = n^2 + 3$, то начало разложения числа $n + \sqrt{d}$ в непрерывную дробь имеет вид $n+\sqrt{d} = [2n, (n+\sqrt{d})/3]$, так что главный класс представляет число 3.

Аналогично, если $d = n^2 - 3$, то $n - 1 + \sqrt{d} = [2(n-1), 1, (n-3+\sqrt{d})/3]$ и в этом случае главный класс представляет число -3.

Поскольку $7 \in P$, то из неравенства (17) имеем

$$\beta(\sqrt{d}) > \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{14}\log\frac{7}{6} + \frac{1}{21}\log\frac{6}{7} = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{42}\log\frac{7}{6},$$

если $d > 7^{21}$ и главный класс форм представляет число ± 7.

Если $d = n^2 + 7$, то $n + \sqrt{d} = [2n, (n+\sqrt{d})/7]$. Следовательно, главный класс представляет число 7.

Аналогично, если $d = n^2 - 7$, то $n - 1 + \sqrt{d} = [2(n-1), 1, (n-7+\sqrt{d})/7]$ и главный класс представляет число -7. Точно так же, если $d = 9n^2 + 8n + 1$, то $3n + 1 + \sqrt{d} = [6n+2, 3, (3n-1+\sqrt{d})/7]$ и главный класс представляет число -7.

Поскольку $43 \in P$, то из неравенства (17) имеем при $d > 43^{129}$

$$\beta(\sqrt{d}) > \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{86}\log\frac{7}{6} + \frac{1}{129}\log\frac{6}{7} = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{258}\log\frac{7}{6},$$

если главный класс форм представляет число ± 43.

Если $d = n^2 + 43$, то $n + \sqrt{d} = [2n, (n+\sqrt{d})/43]$. Следовательно, главный класс представляет число 43.

Аналогично, если $d = n^2 - 43$, то $n - 1 + \sqrt{d} = [2(n-1), 1, (n-43+\sqrt{d})/43]$ и главный класс представляет число -43.

Если $d = (3n+7)^2+2n$, то $3n+7+\sqrt{d} = [2(3n+7), 3, (3n-7+\sqrt{d})/43]$ и главный класс представляет число -43.

Если $d = (7n+3)^2+2n$, то $7n+3+\sqrt{d} = [2(7n+3), 7, (7n-3+\sqrt{d})/43]$ и главный класс представляет число -43.

Наконец, если $d = (21n+1)^2 + 2n$, то $21n + 1 + \sqrt{d} = [2(21n+1), 21, (21n-1+\sqrt{d})/43]$ и главный класс так же представляет число -43.

Следствие 2. *Если главный класс форм определителя d представляет число $\pm p$, где p из множества P, то для всех d*

$$\left| l \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \log \varepsilon \right| > c_0 l,$$

где $c_0 = c_0(p)$ – положительная, эффективно вычисляемая постоянная.

Доказательство. Если $d > p^{4p}$, то из неравенства (17) имеем

$$\log \varepsilon > l \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + l \frac{1}{4p} \log \frac{7}{6}.$$

Пусть $d < p^{4p}$. Поскольку в разложении (10) не все элементы a_i равны 1, то

$$\log \varepsilon > l \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c(d) l,$$

где $c(d) > 0$. Таким образом,

$$\log \varepsilon - l \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} > c_0 l,$$

где $c_0 = \min(1/4p \log(7/6), \min_{d<p^{4p}} c(d)$.

3. Константы Леви и равномерное распределение целых точек на однополостном гиперболоиде. В этом параграфе мы докажем, что постоянная $\pi^2/12 \log 2$ является точкой сгущения множества B.

Теорема 2. *Пусть Ω – замкнутая выпуклая область на гиперболоиде $b_1^2 - a_1 c_1 = 1$ и $\mu(\Omega)$ – площадь Лобачевского этой области:*

$$\mu(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \frac{da\,db}{|a|}.$$

Обозначим через $R(\Omega) = R(\Omega, d)$ число целых точек, лежащих на гиперболоиде (4) и таких, что $(a/\sqrt{d}, b/\sqrt{d}, c/\sqrt{d}) \in \Omega$, если $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ и $(2a/\sqrt{d}, b/\sqrt{d}, 2c/\sqrt{d}) \in \Omega$, если $d \equiv 1 \pmod 4$.

Пусть обе L-функции с квадратичными характерами $\left(\frac{\pm d}{\cdot}\right)$, которые мы обозначим через $L_{\pm d}(s)$, не имеют нулей в прямоугольнике

$$1 - \frac{1}{\log^{\nu} d} < \operatorname{Re} s < 1, \quad |\operatorname{Im} s| < 1, \tag{18}$$

где $\nu > 0$ – произвольная постоянная.

Тогда при $d \to \infty$

$$R(\Omega) = \mu(\Omega)\frac{6}{\pi^2}\sqrt{d}\,L_D(1)(1+O(\log^{-\eta} d)),$$

где $D = d$, если $d \equiv 1 \pmod 4$, $D = 4d$, если $d \equiv 2, 3 \pmod 4$, постоянная $\eta = \eta(\nu) > 0$.

Доказательство это теоремы см в [6].

Следствие 1. *Пусть $h(d) = 1$, тогда в условиях теоремы 2 имеем*

$$\beta(d) = \frac{\pi^2}{12\log 2} + O(\log^{-\eta} d).$$

Доказательство. Если $h(d) = 1$, то все целые точки в области приведения эквивалентны. Следовательно, $l = R(\Omega_0)$, где Ω_0 – область, которая задается условиями $0 < b_1 < 1$, $a_1 + b_1 > 1$, $b_1 > a_1 - 1$, $a_1 > 0$. Легко видеть, что

$$\mu(\Omega_0) = \int_0^1 da_1 + \int_1^2 \frac{2-a_1}{a_1}\,da_1 = 2\log 2.$$

Таким образом,

$$l = \frac{12\log 2}{\pi^2}\sqrt{d}\,L_D(1)(1+O(\log^{-\eta} d)).$$

С другой стороны, из формулы Дирихле для числа классов следует, что $\log\varepsilon = \sqrt{d}\,L_D(1)$.

Следствие 2. *Число $\pi^2/12\log 2$ является точкой сгущения для множества B.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность чисел вида $d = 5^{2k+1}$, где $k \geqslant 0$. Как известно, $h(d) = 1$. Кроме того, L-функции с характерами $\left(\frac{\pm d}{\cdot}\right)$, очевидно, не имеют нулей в прямоугольнике (18). В силу предыдущего следствия, утверждение доказано.

Литература

1. P. Lévy, *Sur les lois de probabilités dont dépendent les quotients complets et imcomplets d'une fraction continue,* Bull. Soc. Math. France **57** (1929), 178–194.
2. C. Faivre, *Distribution of Lévy constants for quadratic numbers,* Acta Arithm. **61**, No. 1 (1992), 13–34.
3. Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел,* М.-Л. (1937).
4. Е. П. Голубева, *О длине периода квадратичной иррациональности,* Мат. сб. **123**, No. 1 (1984), 120–129.
5. Б. Ф. Скубенко, *Асимптотическое распределение целых точек на однополостном гиперболоиде и эргодические теоремы,* Изв. АН СССР, сер. матем., **26**, No. 5 (1962), 721–752.
6. Е. П. Голубева, *Представление больших чисел тернарными квадратичными формами,* Мат. сб. **129**, No. 1 (1986), 40–54.
7. Е. П. Голубева, *Оценка константы Леви для $\sqrt{p}$ и критерий одноклассности для $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 21–30.
8. Е. П. Голубева, *О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **160** (1997), 72–81.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 9 сентября 1999 г.