Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Е. П. Голубева

ПРОБЛЕМА ВАРИНГА ДЛЯ ШЕСТИ КУБОВ И ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

1. Метод сведения уравнения Варинга, содержащего сумму кубов, к задаче о представлении целых чисел тернарной квадратичной формой ранее использовался рядом авторов (см., например, [1, 2, 3]).

В работе [4] был предложен вариант этого подхода к задачам такого типа, реализованный на примере уравнения

$$n = x^2 + y^2 + z^3 + u^3 + v^4 + w^{14}. \tag{1}$$

При этом наша схема позволяет рассматривать задачи, в которых участвует любое количество дополнительных слагаемых степеней выше третьей. За счет этих слагаемых уменьшаются коэффициенты возникающей тернарной квадратичной формы, а затем мы используем результаты работ [5, 6]. Таким образом, наши результаты существенно зависят от продвижений в проблеме об оценке коэффициентов Фурье параболических форм полуцелого веса.

В настоящей работе мы рассматриваем уравнение

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + u^4 + v^9, \tag{2}$$

которое так же подпадает под действие нашей схемы.

До этого в статьях [7, 8] изучалось уравнение

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + u^4 + v^4. \tag{3}$$

Кроме доказательства разрешимости последнего уравнения в них содержатся и оценки снизу для количества решений, правильные по порядку (в работе [7] была даже получена асимптотическая формула для количества решений, правда, при предположении о справедливости гипотезы Римана для некоторой L-функции Хассе–Вейля).

В отличие от этих работ, оценка снизу для количества решений уравнений (2), которая может быть получена нашим методом, имеет вид $C_\varepsilon\, n^{1/3-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ – произвольно мало), в то время как гипотетический правильный порядок этой оценки – $n^{49/36}$.

Кроме того, этот метод имеет еще один недостаток – уравнения (1) и (2) решаются только для случая, когда n удовлетворяет дополнительным конгруэнциальным условиям по постоянному модулю. Этот модуль может быть заменен на любое другое постоянное число или на число, слабо растущее вместе с n. Для того, чтобы исключить это условие из формулировки основного результата, приходится добавлять в уравнение еще одно слагаемое сколь угодно высокой степени, после чего уравнение приобретает стандартный вид.

Тем же методом можно доказывать и разрешимость уравнений

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + u_1^{k_1} + \dots + u_r^{k_r},$$

где показатели $k_1, \dots, k_r$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{k_r} + \left(1 - \frac{1}{k_r}\right)\frac{1}{k_{r-1}} + \dots + \left(1 - \frac{1}{k_r}\right)\left(1 - \frac{1}{k_{r-1}}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{k_2}\right)\frac{1}{k_1} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Как уже упоминалось выше, результат настоящей работы зависит от оценки коэффициентов Фурье параболичесиких форм веса $3/2$, полученной в работе [6]. Улучшения этой оценки существенно повлияли бы на результаты относительно уравнений типа (1), которые содержат два квадрата и два куба. В случае достижения предельных оценок могла бы идти речь о решении уравнения

$$n = x^2 + y^2 + u^3 + v^3.$$

В гораздо меньшей степени это повлияло бы на результаты, касающиеся уравнений, содержащих шесть кубов. Пределом при таком подходе представляется уравнение

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + u^4.$$

2. Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть n четно, $n \equiv 1 \pmod 5$. Тогда, если n достаточно велико, то уравнение (2) имеет решения, для которых x_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$, u и v неотрицательны.*

Следствие. *Уравнение*

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 + u^4 + v^9 + w^{2k+1}$$

имеет неотрицательные решения для любых достаточно больших n и любого k.

Доказательство. Утверждение следствия мгновенно следует из теоремы, поскольку $w^{2k+1} \equiv w \pmod 5$ и, выбирая w так, что $1 \leqslant w \leqslant 10$, мы можем добиться выполнения двух условий: $n \equiv w^{2k+1} \pmod 5$ и $n - w^{2k+1}$ – четное число.

Для доказательства теоремы нам нужен следующий вспомогательный факт о представлении больших чисел тернарными квадратичными формами.

Лемма. *Пусть $p_i\,(1 \leqslant i \leqslant 3)$ – различные простые числа, $p_i \equiv 1 \pmod 5$, $p_i \equiv 1 \pmod 4$. Обозначим через $Q(m)$ количество решений уравнения*

$$m = p_1^2 y_1^2 + p_2^2 y_2^2 + p_3^2 y_3^2.$$

Пусть $m \equiv 3 \pmod 5$ и $m \equiv 3 \pmod 8$. Тогда существует постоянная $\delta > 0$ такая, что, если $p_i < m^\delta$, то для достаточно больших m справедлива оценка $Q(m) \underset{\varepsilon}{\gg} m^{1/2-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – произвольно мало.

Доказательство. В силу результата работы [6] нам достаточно проверить, что $m \neq at^2$, где $a \,\big|\, (p_1p_2p_3)^2$, и что сравнения

$$m = p_1^2 y_1^2 + p_2^2 y_2^2 + p_3^2 y_3^2 \pmod d \tag{4}$$

имеют решения для $d = 8$ и для $d = p_i^r$, где $1 \leqslant i \leqslant 3$, r – любое.

Поскольку $p_i \equiv 1 \pmod 5$, то число $a \equiv 1 \pmod 5$. Так как $t^2 \equiv 0 \pmod 5$, $t^2 \equiv 1 \pmod 5$ или $t^2 \equiv 4 \pmod 5$, то at^2 удовлетворяет одному из этих сравнений. Поскольку $m \equiv 3 \pmod 5$, то равенство $m = at^2$ не может иметь место.

Ввиду того, что $m \equiv 3 \pmod 8$, сравнение (4), очевидно, имеет решения $\pmod 8$.

Так как $p_i \equiv 1 \pmod 4$ и p_i – различные простые, то сравнение (4) по модулю p_i^r имеет примитивные решения при любом r независимо от того, выполняется условие $(m, p_i) = 1$ или нет.

Доказательство теоремы. Мы будем действовать по схеме, приведенной в работе [4].

Пусть

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 2A_1, \quad && x_3 + x_4 = 2A_2, \quad && x_5 + x_6 = 2A_3, \\ &y_1 = A_1 - x_1, && y_2 = A_2 - x_3, && y_3 = A_3 - x_5. \end{aligned} \tag{5}$$

В этих обозначениях уравнение (2) приобретает следующий вид:

$$n = 6A_1y_1^2 + 6A_2y_2^2 + 6A_3y_3^2 + 2A_1^3 + 2A_2^3 + 2A_3^3 + u^4 + v^9.$$

Так как $n \equiv 1 \pmod 5$, то сравнение $n \equiv v_0^9 \pmod{5^{4\alpha}}$ имеет решение при любом α. Положим $v = v_0 + 5^{4\alpha}t$, где $n^{1/9-\nu_1} < 5^{4\alpha} < n^{1/9-\nu_2}$, $\nu_1 > \nu_2 > 0$ – постоянные, которые мы выберем позднее, $1 \leqslant v_0 \leqslant 5^{4\alpha}$, $0 \leqslant t \leqslant 240$. Тогда $n - v^9 = 5^{4\alpha}k$. Очевидно,

$$k = \frac{n}{5^{4\alpha}} + O\big(5^{32\alpha}\big) = \frac{n}{5^{4\alpha}} + O\big(k^{1-\xi}\big), \tag{6}$$

где $\xi > 0$.

Поскольку $5^{4\alpha} \equiv 1 \pmod 3$, $v^9 \equiv v \pmod 3$, то за счет выбора t можно добиться того, что $k \equiv 1 \pmod 3$. Кроме того, при надлежащем выборе t число $k \equiv 1 \pmod 5$. Наконец, так как n четно, а для любого нечетного v выполнено условие $v^9 \equiv v \pmod{16}$ и $5^{4\alpha} \equiv 1 \pmod{16}$, то t можно подобрать так, что $k \equiv 9 \pmod{16}$.

Положим $A_1 = 5^{4\alpha}B_1$, $A_2 = 5^{4\alpha}B_2$, $A_3 = 5^{4\alpha}B_3$, $u = 5^{\alpha}u_1$. После очевидных упрощений имеем

$$k = 6B_1y_1^2 + 6B_2y_2^2 + 6B_3y_3^2 + 2\cdot 5^{8\alpha}B_1^3 + 2\cdot 5^{8\alpha}B_2^3 + 2\cdot 5^{8\alpha}B_3^3 + u_1^4.$$

С помощью такого же приема уменьшим коэффициенты квадратичной формы еще раз. Поскольку $k \equiv 1 \pmod 5$, то сравнение $k \equiv u_0^4 \pmod{5^{4\beta}}$ имеет решение для любого β. Положим $u_1 = u_0 + 5^{4\beta}w$, где $n^{2/9-\mu_1} < 5^{4\beta} < n^{2/9-\mu_2}$, $\mu_1 > \mu_2 > 0$ – постоянные, которые мы выберем позднее, $1 \leqslant u_0 \leqslant 5^{4\beta}$, $0 \leqslant w \leqslant 240$. Тогда $k - u_1^4 = 5^{4\beta}l$. Очевидно,

$$l = \frac{k}{5^{4\beta}} + O\big(5^{12\beta}\big) = \frac{k}{5^{4\beta}} + O\big(l^{1-\eta}\big),$$

где $\eta > 0$. Учитывая равенство (6), имеем отсюда

$$l = \frac{n}{5^{4\alpha+4\beta}} + O\big(l^{1-\nu}\big), \tag{7}$$

где $\nu > 0$.

Поскольку $k \equiv 1 \pmod 3$ и для $u_1 \not\equiv 0 \pmod 3$ $u_1^4 \equiv 1 \pmod 3$, то число w можно выбрать так, что $l \equiv 0 \pmod 3$. Кроме того, поскольку $k \equiv 9 \pmod{16}$ и $5^{4\beta} \equiv 1 \pmod{16}$ и для нечетного u_1 имеем сравнение $u_1^4 \equiv 1 \pmod{16}$, то w можно выбрать так, что $l \equiv 8 \pmod{16}$. Наконец, выбирая значение w должным образом $\pmod 5$, мы можем добиться, чтобы выполнялись условия $l \equiv 3 \pmod 5$.

Положим $B_1 = 5^{4\beta}C_1$, $B_2 = 5^{4\beta}C_2$, $B_3 = 5^{4\beta}C_3$. После упрощений получим уравнение

$$l = 6C_1y_1^2+6C_2y_2^2+6C_3y_3^2+2\cdot 5^{8\alpha+8\beta}C_1^3+2\cdot 5^{8\alpha+8\beta}C_2^3+2\cdot 5^{8\alpha+8\beta}C_3^3. \quad (8)$$

Наложим на $C_i\,(1 \leqslant i \leqslant 3)$ следующие ограничения: $C_i \equiv 1 \pmod 3$, $C_i \equiv 1 \pmod 8$. Тогда $C_1^3+C_2^3+C_3^3 \equiv 0 \pmod 3$ и $C_1^3+C_2^3+C_3^3 \equiv 3 \pmod 8$. Пусть число m задано с помощью равенства

$$m = \frac{l - 2\cdot 5^{8\alpha+8\beta}(C_1^3+C_2^3+C_3^3)}{6}.$$

Поскольку $l \equiv 0 \pmod 6$, то m является целым. Так как $l/6 \equiv 4 \pmod 8$ и $5^{8\alpha+8\beta} \equiv 1 \pmod 8$, то $m \equiv 3 \pmod 8$. Наконец, поскольку $l \equiv 3 \pmod 5$, то $l/6 \equiv m \equiv 3 \pmod 5$.

В этих обозначениях уравнение (8) запишется в виде

$$m = C_1y_1^2 + C_2y_2^2 + C_3y_3^2. \quad (9)$$

Потребуем дополнительно, чтобы параметры C_i удовлетворяли неравенствам

$$\frac{n}{12\cdot 5^{12\alpha+12\beta}} < C_i^3 < \frac{n}{8\cdot 5^{12\alpha+12\beta}}. \quad (10)$$

В силу условий, наложенных на α и β, имеет место оценка $n/5^{12\alpha+12\beta} \gg n^{\lambda_2+\nu_2}$. Таким образом, с учетом (7) имеем

$$\frac{n}{2\cdot 5^{4\alpha+4\beta}} < 2\cdot 5^{8\alpha+8\beta}(C_1^3+C_2^3+C_3^3) < \frac{3}{4}\frac{n}{5^{4\alpha+4\beta}} = \frac{3}{4}l + O(l^{1-\gamma}),$$

где $\gamma > 0$. Следовательно,

$$\frac{n}{24\cdot 5^{4\alpha+4\beta}} + O(m^{1-\gamma}) < m < \frac{n}{12\cdot 5^{4\alpha+4\beta}} + O(m^{1-\gamma}). \quad (11)$$

Выберем постоянные ν_1 и μ_1 настолько малыми, что выполнено условие $\nu_1+\mu_1 < \delta$, где δ – постоянная из леммы, тогда $C_i < m^{2\delta}$.

Для $1 \leqslant i \leqslant 3$ положим $C_i = p_i^2$, где p_i – различные простые, $p_i \equiv 1 (\operatorname{mod} 5)$, $p_i \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$ и p_i таково, что справедливы неравенства (10). При таком выборе коэффициентов C_i выполнены все условия леммы и, следовательно, уравнение (9) имеет решения.

Нам осталось показать, что эти решения таковы, что соответствующие переменные в исходном уравнении неотрицательны. Очевидно, $C_i y_i^2 \leqslant m$. С учетом правой части неравенства (11) и левой части неравенства (10) имеем отсюда оценки

$$C_i y_i^2 < \frac{n}{12 \cdot 5^{4\alpha+4\beta}} < 5^{8\alpha+8\beta} C_i^3.$$

Таким образом, $y_i^2 < 5^{8\alpha+8\beta} C_i^2 = A_i^2$ и $0 \leqslant y_i < A_i$. Следовательно, ввиду соотношений (5) имеем $A_1 > x_1 = A_1 - y_1 > 0$ и $x_2 = 2A_1 - x_1 > 0$. Аналогичные неравенства справедливы и для остальных переменных и теорема доказана.

Литература

1. Ю. В. Линник, *О разложении больших чисел на семь кубов,* Мат. сб. **12**, No. 2 (1943), 218–224.
2. Yu. V. Linnik, *Additive problems involving squares, cubes and almost primes,* Acta Arithm. **21** (1972), 413–422.
3. G. L. Watson, *On sums of a square and five cubes,* J. London Math. Soc. (2), **5**, No. 2 (1972), 215–218.
4. Е. П. Голубева, *О неоднородных уравнениях Варинга,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 65–68.
5. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight,* Invent. math. **87** (1987), 385–401.
6. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms,* Invent. math. **92** (1988), 73–90.
7. C. Hooley, *On Waring's problem,* Acta Math. **157** (1986), 49–97.
8. Brüdern, *On Waring's problem for cubes and biquadrates. II,* Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. **104** (1988), 199–206.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 23 августа 1999 г.