Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ НАЧАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В ОДНОМ КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Данная работа продолжает исследования автора [1–3], посвященные классам типично вещественных функций. Как обычно, пусть T – класс функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n, \tag{1}$$

регулярных и типично вещественных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad z \in E, \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Пусть D_n – множество значений первых n коэффициентов в классе T:

$$D_n = \big\{(c_2, \dots, c_{n+1}) : f \in T\big\}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Это множество значений при любом $n \geqslant 1$ найдено Рогозинским в [4]. При $n = 1, 2$ оно имеет простой вид: D_1 – отрезок $-2 \leqslant c_2 \leqslant 2$,

$$D_2 = \big\{(c_2, c_3) : c_2^2 - 1 \leqslant c_3 \leqslant 3, \ -2 \leqslant c_2 \leqslant 2\big\}.$$

Пусть $D(f(z_1))$ – множество значений $f(z_1)$ на классе T при фиксированном $z_1 \in E$, $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. В [4] показано, что это множество есть круговая луночка:

$$D(f(z_1)) = \big\{\Delta_1 \cap \Delta_2\big\},$$

где

$$\Delta_1 = \left\{w : \left|w + \frac{i}{2 \operatorname{Im} \zeta_1}\right| \leqslant \frac{1}{2|\operatorname{Im} \zeta_1|}\right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{w : \frac{\operatorname{Im}\,[w(\zeta_1^2 - 4)]}{\operatorname{Im} \zeta_1} \geqslant 1\right\}.$$

Здесь и ниже полагаем
$$\zeta_1 = z_1 + \frac{1}{z_1}. \tag{2}$$

Пусть $D_n(f(z_1))$ – множество значений системы $(c_2, c_3, \dots, c_{n+1}, f(z_1))$ на классе T при фиксированном z_1, $n \geqslant 1$. Множество $D_1(f(z_1))$, т.е. множество значений системы $\{c_2, f(z_1)\}$ на классе T, впервые было найдено Ю. Е. Аленицыным [5]. В случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ оно представляет собой тело в $\mathbb{R}^3$, ограниченное двумя коническими поверхностями:
$$\left|f(z_1) - \frac{1}{\zeta_1 + 2\varepsilon_j}\right|^2 \operatorname{Im}\zeta_1 = (c_2 + 2\varepsilon_j)\operatorname{Im}\frac{\overline{f(z)}}{\zeta_1 + 2\varepsilon_j}, \quad \varepsilon_j = (-1)^j; \quad j = 1, 2.$$
Множество $D_n(f(z_1))$ при $n \geqslant 1$ было исследовано в [1].

§2. Обозначения и формулировка основных результатов

Пусть $T_1 \equiv T(z_1, w_1)$ – класс функций $f(z) \in T$, удовлетворяющих условию $f(z_1) = w_1$, где z_1 и w_1 фиксированы,
$$z_1 \in E, \quad \operatorname{Im} z_1 \neq 0, \quad w_1 \in \operatorname{Int} D(f(z_1)). \tag{3}$$

Пусть $D_n\{T_1\}$ – множество значений системы $(c_2, c_3, \dots, c_{n+1})$ на классе T_1, $n \geqslant 1$.

В данной работе найдены множества $D_1\{T_1\}$ и $D_2\{T_1\}$ и указаны все их граничные функции.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Множество $D_1\{T_1\}$ – отрезок вещественной оси:*
$$-2 - |1 - w_1(\zeta_1 + 2)|^2 \frac{\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1 + 2)]} \leqslant c_2 \leqslant$$
$$\leqslant 2 - |1 - w_1(\zeta_1 - 2)|^2 \frac{\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1 - 2)]}.$$
Концам указанного отрезка соответствуют только функции
$$f_j(z) = \frac{z(1 + a_j z + z^2)}{(1 - 2t_j z + z^2)(1 - 2\varepsilon_j z + z^2)}, \quad j = 1, 2,$$
где
$$\varepsilon_j = (-1)^j, \quad t_j = \frac{\operatorname{Im}[\zeta_1(w_1(\zeta_1 - 2\varepsilon_j) - 1)]}{2\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1 - 2\varepsilon_j)]},$$

$$a_j = -2t_j - \frac{|1 - w_1(\zeta_1 - 2\varepsilon_j)|^2 \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1 - 2\varepsilon_j)]}.$$

Теорема 2. *Множество* $D_2\{T_1\}$ *ограничено двумя параболическими дугами и определяется неравенствами*

$$-1 + \frac{|\zeta_1 w_1 - 1|^2 + c_2^2\left(-\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}\right) - 2c_2 \operatorname{Re}[\zeta_1|w_1|^2 - w_1]}{-\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1} - |w_1|^2} \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \leqslant 3 - \frac{|\zeta_1 + c_2 - w_1(\zeta_1^2 - 4)|^2 \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2 - 4)] - \operatorname{Im}\zeta_1}. \tag{4}$$

Пусть P_1 *и* P_2 *– граничные дуги множества* $D_2\{T_1\}$, *на которых достигается равенство соответственно в левом и правом неравенствах* (4). *Точкам на* P_j *соответствуют функции* $\widetilde{f}_j(z,t)$ $(j = 1, 2)$:

$$\widetilde{f}_1(z,t) = \frac{z(1 + a_1 z + z^2)}{(1 - 2tz + z^2)(1 - 2t_1 z + z^2)}, \quad t \in [-1, t_1(1)],$$

$$\widetilde{f}_2(z,t) = \frac{z(1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_1 z^3 + z^4)}{(1 - z^2)^2(1 - 2tz + z^2)}, \quad t \in [t_1(1), t_1(-1)],$$

где

$$a_1 \equiv a_1(t) = \frac{\operatorname{Im}[\zeta_1(\overline{\varkappa} - |\varkappa|^2)]}{\operatorname{Im}\varkappa},$$

$$t_1 \equiv t_1(t) = \frac{\operatorname{Im}[\zeta_1(\varkappa - 1)]}{2\operatorname{Im}\varkappa},$$

$$b_1 \equiv b_1(t) = \frac{\operatorname{Im}[(\zeta_1^2 - 4)\varkappa]}{\operatorname{Im}\zeta_1} - 2\operatorname{Re}\zeta_1,$$

$$b_2 \equiv b_2(t) = 2 + |\zeta_1|^2 - \frac{\operatorname{Im}[\overline{\zeta}_1(\zeta_1^2 - 4)\varkappa]}{\operatorname{Im}\zeta_1};$$

здесь

$$\varkappa \equiv \varkappa(t) = w_1(\zeta_1 - 2t).$$

§3. Доказательство теорем 1 и 2

3.1. Нам потребуются результаты работы [1], которые сформулируем в виде следующих трех теорем.

Теорема A. *При* $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ *множество* $D_1(f(z_1))$ *определяется системой трех неравенств:*

$$-2 \leqslant c_2 \leqslant 2,$$

$$\begin{vmatrix} 2-\varepsilon_j c_2 & (2-\varepsilon_j\overline{\zeta}_1)\overline{f(z_1)}+\varepsilon_j \\ (2-\varepsilon_j\zeta_1)f(z_1)+\varepsilon_j & -\dfrac{\operatorname{Im}[(2-\varepsilon_j\zeta_1)f(z_1)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad j=1,2, \quad (5)$$

где $\varepsilon_j = (-1)^j$.

Теорема B. *При* $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ *множество* $D_2(f(z_1))$ *определяется системой четырех неравенств:*

$$c_2^2 - 1 \leqslant c_3 \leqslant 3,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & c_2 & 2\overline{f(z_1)} \\ c_2 & (c_3+1)/2 & \overline{\zeta_1 f(z_1)}-1 \\ 2f(z_1) & \zeta_1 f(z_1)-1 & -2\operatorname{Im} f(z_1)/\operatorname{Im}\zeta_1 \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad (6)$$

$$\begin{vmatrix} 3-c_3 & c_2+\overline{\zeta}_1-(\overline{\zeta}_1^{\,2}-4)\overline{f(z_1)} \\ c_2+\zeta_1-(\zeta_1^2-4)f(z_1) & -1+\dfrac{\operatorname{Im}[(\zeta_1^2-4)f(z_1)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad (7)$$

Теорема C. *Каждой точке на границе множества* $D_n(f(z_1))$, $n \geqslant 1$, *соответствует только одна функция класса* T *и она имеет вид*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{\lambda_\nu z}{1-2t_\nu z+z^2}, \quad (8)$$

где

$$\lambda_\nu \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n+1}\lambda_\nu = 1, \quad t_\nu \in [-1,1], \quad t_\nu \neq t_k \quad \textit{при} \quad \nu \neq k,$$

$\nu,\ k = 1, 2, \ldots, n+1$.

3.2. Доказательство теорем 1 и 2. Первые утверждения теорем 1 и 2 получаем соответственно из теорем A и B посредством преобразований неравенств (5), (6) и (7).

Для нахождения функций класса T_1, соответствующих граничным точкам множеств $D_1\{T_1\}$ и $D_2\{T_1\}$, воспользуемся теоремой C. Нам требуется найти те функции вида (8), которые принадлежат классу T_1.

Функции

$$f_1(z,t) = \frac{z}{1-2tz+z^2}, \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1 \tag{9}$$

удовлетворяют условию $w_1 = f_1(z_1,t)$ только в случае

$$t = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\zeta_1 - \frac{1}{w_1}\right), \quad \operatorname{Im}\left(\zeta_1 - \frac{1}{w_1}\right) = 0.$$

В этом случае точка w_1 лежит на дуге окружности, принадлежащей границе множества $D(f(z_1))$.

Функции

$$f_2(z;\lambda) = \frac{\lambda z}{(1-z)^2} + \frac{(1-\lambda)z}{(1+z)^2}, \quad 0<\lambda<1, \tag{10}$$

удовлетворяют условию $w_1 = f_2(z_1;\lambda)$ только при

$$\lambda = \frac{w_1(\zeta_1+2)-1}{4}(\zeta_1-2), \quad \operatorname{Im}\zeta_1 = \operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2-4)].$$

В этом случае точка w_1 лежит на отрезке, принадлежащем границе множества $D(f(z_1))$.

Итак, при $w_1 \in \operatorname{Int} D(f(z_1))$ функции (9) и (10) не принадлежат классу T_1.

Функции

$$f_2^{(j)}(z,t;\lambda) = \frac{\lambda z}{1-2tz+z^2} + \frac{(1-\lambda)z}{1-2\varepsilon_j z+z^2}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_j = (-1)^j, \quad j=1,2, \quad 0<\lambda<1, \quad -1<t<1,$$

удовлетворяют условию $w_1 = f_2^{(j)}(z_1,t;\lambda)$ при $t=t_j$, $\lambda=\lambda_j$, где

$$t_j = \frac{\operatorname{Im}[w_1\zeta_1(\zeta_1-2\varepsilon_j)-\zeta_1]}{2\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1-2\varepsilon_j)]},$$

$$\lambda_j = \frac{|1-w_1(\zeta_1-2\varepsilon_j)|^2\operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[\zeta_1-w_1(\zeta_1-2\varepsilon_j)^2]}.$$

Следовательно, из функций (11) классу T_1 принадлежат только функции $f_2^{(j)}(z,t_j;\lambda_j)$. Эти функции соответствуют концам отрезка $D_1\{T_1\}$. Заметим, что для функции $f_2^{(j)}(z,t_j,\lambda_j)$

$$c_2 = 2\varepsilon_j - \frac{|1-w_1(\zeta_1-2\varepsilon_j)|^2 \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1-2\varepsilon_j)]}.$$

Теорема 1 доказана.

3.3. Рассмотрим теперь функции

$$f_3(z,t;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\lambda_1 z}{1-2tz+z^2} + \frac{\lambda_2 z}{(1-z)^2} + \frac{(1-\lambda_1-\lambda_2)z}{(1+z)^2}, \qquad (12)$$

где $0<\lambda_j<1$, $j=1,2$, $-1<t<1$.

Условие $f_3(z_1,t;\lambda_1,\lambda_2)=w_1$ выполняется только при $\lambda_1=\lambda_1(t)$, $\lambda_2=\lambda_2(t)$, где

$$\lambda_1(t) = \frac{|\zeta_1-2t|^2 \operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2-4)-\zeta_1]}{4(1-t^2)\operatorname{Im}\zeta_1},$$

$$\lambda_2(t) = \frac{|\zeta_1-2|^2 \operatorname{Im}[\zeta_1-w_1(\zeta_1+2)(\zeta_1-2t)]}{8(1-t)\operatorname{Im}\zeta_1}.$$

Итак, классу T принадлежит однопараметрическое семейство функций

$$f_3(z,t;\lambda_1(t),\lambda_2(t)) \equiv \widetilde{f}_2(z,t), \quad t\in\left[t_1(1),t_1(-1)\right], \qquad (13)$$

для которых

$$c_2 = 2t + \frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2-4)(\zeta_1-2t)]}{\operatorname{Im}\zeta_1} - 2\operatorname{Re}\zeta_1,$$

$$c_3 = 3 + |\zeta_1-2t|^2\left(1-\frac{\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1^2-4)]}{\operatorname{Im}\zeta_1}\right).$$

Нетрудно проверить, что функции (13) соответствуют точкам дуги P_2. Осталось найти функции, соответствующие дуге P_1.

Рассмотрим функции

$$f_2(z,t,t_1;\lambda) = \frac{\lambda z}{1-2t_1 z+z^2} + \frac{(1-\lambda)z}{1-2tz+z^2}, \qquad (14)$$

где $0 < \lambda < 1$, $-1 < t < 1$, $-1 < t_1 < 1$. Эти функции удовлетворяют условию $f_2(z_1, t, t_1; \lambda) = w_1$ при $t_1 = t_1(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, где

$$t_1(t) = \frac{\operatorname{Im}[w_1\zeta_1(\zeta_1 - 2t) - \zeta_1]}{2\operatorname{Im}[w_1(\zeta_1 - 2t)]},$$

$$\lambda(t) = \frac{|1 - w_1(\zeta_1 - 2t)|^2 \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}[\zeta_1 - w_1(\zeta_1 - 2t)^2]}.$$

Таким образом, классу T_1 принадлежит однопараметрическое семейство функций

$$f_2(z, t, t_1(t); \lambda(t)) \equiv \widetilde{f}_1(z, t), \quad t \in [t_1(-1), 1], \tag{15}$$

для которых

$$c_2 = 2t - \frac{|1 - \varkappa|^2 \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}\varkappa},$$

$$c_3 = -1 + 4t^2 - \frac{|1 - \varkappa|^2 \operatorname{Im}[\varkappa(\zeta_1 + 2t) - \zeta_1] \operatorname{Im}\zeta_1}{\operatorname{Im}^2 \varkappa}.$$

Функции (15) соответствуют точкам дуги P_1.

Теорема 2 доказана.

3.4. Следствие 1. *В классе $T(ir, ir)$, $0 < r < 1$, множеством значений коэффициента c_2 является отрезок*

$$-\frac{r^2(r^2+3)}{2} \leqslant c_2 \leqslant \frac{r^2(r^2+3)}{2}. \tag{16}$$

Множество значений системы (c_2, c_3) определяется неравенствами

$$-r^2 + \frac{c_2^2}{r^2} \leqslant c_3 \leqslant r^2(r^2+2) - \frac{1-r^2}{r^2(r^2+3)} c_2^2. \tag{17}$$

Концам отрезка (16) соответствуют только функции

$$f_j(z) = \frac{z\big(1 - \frac{1}{2}\varepsilon_j(1-r^2)(r^2+3)z + z^2\big)}{\big(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_j(1-r^2)z + z^2\big)(1 - 2\varepsilon_j z + z^2)}, \quad \varepsilon_j = (-1)^j, \quad j = 1, 2.$$

Равенство в левом и правом неравенствах (17) *достигается соответственно функциями* $\widetilde{f}_1(z,t)$ *и* $\widetilde{f}_2(z,t)$ *теоремы* 2*:*

$$\widetilde{f}_1(z,t) \quad \textit{при} \quad -1 \leqslant t \leqslant \frac{r^2-1}{4},$$
$$a_1 = \frac{(1-r^2)^2}{2t} - (1-r^2)2t, \quad t_1 = \frac{r^2-1}{4t},$$

$$\widetilde{f}_2(z,t) \quad \textit{при} \quad \frac{r^2-1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1-r^2}{4},$$
$$b_1 = \frac{(1+r^2)^2}{r^2-1}2t, \quad b_2 = -1+2r^2+r^4.$$

Доказательство. Следствие 1 вытекает из теорем 1 и 2, так как при $z_1 = w_1 = ir$ выполняются условия (3).

§4. О граничных функциях множеств значений $f'(z_1)$ и $f(z_2)$

Пусть

$$D'\{T_1\} = \big\{f'(z_1) : f \in T_1\big\}, \quad D\{T_1\} = \{f(z_2) : f \in T_1,$$
$$z_2 \ \text{ фиксировано}, \ \ \mathrm{Im}\, z_2 \neq 0\}.$$

Множества $D'\{T_1\}$ и $D\{T_1\}$ найдены в [3]. Следующая теорема дополняет результаты в [3].

Теорема 3. *Граничным точкам множеств* $D'\{T_1\}$ *и* $D\{T_1\}$ *соответствуют функции* $\widetilde{f}_1(z,t)$ *и* $\widetilde{f}_2(z,t)$ *теоремы* 2.

Доказательство. Заметим, что каждое из множеств $\partial D'\{T_1\}$ и $\partial D\{T_1\}$ состоит из двух круговых дуг. Теорема 3 следует из теорем 1 и 2 в [3] и рассуждений о функциях (8), приведенных в §§3.2 и 3.3 настоящей работы. Запишем функцию $\widetilde{f}_2(z,t)$ в виде

$$\widetilde{f}_2(z,t) = \frac{z^2}{(1-z^2)^2}\Bigg\{\overline{w}_1(\overline{\zeta}_1^2-4) + \left(z+\frac{1}{z}-\overline{\zeta}_1\right)\Bigg[z+\frac{1}{z}-\zeta_1+$$
$$+(\zeta_1-2t)\frac{\mathrm{Im}\,[w_1(\zeta_1^2-4)]}{\mathrm{Im}\,\zeta_1}\Bigg]\frac{z}{1-2tz+z^2}\Bigg\}.$$

Нетрудно заметить, что $\widetilde{f}_2(z,t)$ соответствует точкам дуги $\partial D_2(z_2) \cap \partial\Delta_1$, являющейся одной из двух круговых дуг, образующих $\partial D\{T_1\}$ (см. следствие 2 в [3]). Точкам второй круговой дуги соответствуют функции $\widetilde{f}_1(z,t)$.

В силу справедливости для функций $\widetilde{f}_j(z,t)$, $j=1,2$, равенств

$$\left|\frac{z_1^2}{1-z_1^2}\,\frac{\partial\widetilde{f}_1}{\partial z}\,(z_1,t)-\bigl(\widetilde{f}_1(z_1,t)\bigr)^2\right|=$$

$$=\left|\frac{4\lambda(t)(1-\lambda(t))(t-t_1(t))^2}{(\zeta_1-2t)^2(\zeta_1-2t_1(t))^2}\right|=\left|\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}+|w_1|^2\right|,$$

$$\left|\frac{z_1^2}{1-z_1^2}\,\frac{\partial\widetilde{f}_2}{\partial z}(z_1,t)-\frac{2\zeta_1\,\widetilde{f}_2(z_1,t)-1}{\zeta_1^2-4}\right|=$$

$$=\left|\frac{-4\lambda_1(t)(1-t^2)}{(\zeta_1-2t)^2(\zeta_1^2-4)}\right|=\frac{1}{|\zeta_1^2-4|}\left[\frac{\operatorname{Im}(w_1(\zeta_1^2-4))}{\operatorname{Im}\zeta_1}-1\right],$$

из следствия 1 в [3] получаем, что граничным точкам множества $D'\{T_1\}$, лежащим на окружности

$$\left|\frac{z_1^2}{1-z_1^2}w-O'_j\right|=R'_j,$$

соответствуют функции $\widetilde{f}_j(z,t)$, $j=1,2$.

Теорема 3 доказана.

Литература

1. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций,* Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
2. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений систсем $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ и $\{f(z_1), f(z_2)\}$ в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 65–75.
4. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen,* Math. Z. **35**, No. 1 (1932), 93–121.
5. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса,* Вестник ЛГУ No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 18 октября 1999 г.