Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким

ПРИВЕДЕННЫЕ МОДУЛИ И НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ

Неравенства для модулей полиномов и их производных имеют богатую историю и многочисленные приложения. Мы ограничимся здесь ссылкой на известную монографию [1] и дополнение к учебнику [2], где сформулированы нерешенные проблемы. Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы получить новые неравенства и, одновременно, обратить внимание специалистов на новый подход к доказательству такого рода неравенств. Данный метод сводится к оценке приведенных модулей вырождающихся конденсаторов [3], при этом мы ограничимся простейшими оценками приведенных модулей, не связанными, например, с симметризационными преобразованиями конденсаторов. В первом параграфе приводятся вспомогательные сведения о приведенных модулях. Во втором параграфе даны оценки для полиномов через приведенные модули некоторых множеств, вытекающие из одной теоремы об экстремальном разбиении сферы. В §3 доказываются неравенства, включающие модуль производной полинома и зависящие от расположения его нулей. Наши теоремы по постановке близки к классическим и современным утверждениям о полиномах, однако они отличны от известных (ср., например, [1, 4–6]). Наконец, в §4 даны неравенства, зависящие от образов критических точек полиномов. В частности, мы докажем теорему 5 работы [3]. В качестве экстремального полинома в §§3–4 выступает, как правило, полином вида $(a+bz)^n$.

§1. Приведенные модули

Пусть B – открытое множество на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$. Пусть z_l, $l=1,\dots,m$, – различные точки множества B; δ_l, $l=1,\dots,m$, – произвольные вещественные числа, не все равные нулю, и пусть μ_l, ν_l, $l=1,\dots,m$, – произвольные положительны

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 99-01-00443).

числа. Введем следующие обозначения: $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\psi_l\}$, $\psi_l = \psi_l(r) = \mu_l r^{\nu_l}$, $l = 1, \ldots, m$. Здесь и ниже, если не оговорено противное, символы $\{\}$, $\sum$ и $\prod$ означают соответственно совокупность, суммирование и произведение по всевозможным индексам, указанным в контексте, за исключением тех, при которых слагаемое в $\sum$ либо равно ∞, либо неопределено, а сомножитель в произведении равен либо нулю, либо ∞. Замкнутое множество $E(z_0, r)$ назовем почти кругом с центром в точке $z_0 \neq \infty$ радиуса r, если для достаточно малых $r > 0$ существуют непрерывные положительные функции $r_j(r)$, $j = 1, 2$ такие, что

$$\{z:\ |z - z_0| \leq r_1(r)\} \subset E(z_0, r) \subset \{z:\ |z - z_0| \leq r_2(r)\},\ r > 0$$

и $r_j(r) \sim r$, $r \to 0$, $j = 1, 2$. Почти круг с центром в бесконечности определим как $E(\infty, r) = \{z:\ 1/z \in E(0, r)\}$, где $E(0, r)$ – некоторый почти круг с центром в начале. При малых $r > 0$ рассмотрим обобщенный конденсатор

$$C(r; B, Z, \Delta, \Psi) = \{\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B, E(z_1, \psi_1(r)), \ldots, E(z_m, \psi_m(r))\}$$

с предписанными значениями соответственно $0, \delta_1, \ldots, \delta_m$ [3]. Модулем этого конденсатора называется величина

$$|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| = \sup \left\{ \iint\limits_{\mathbb{C}_z} |\nabla v|^2 dx\ dy \right\}^{-1},$$

где верхняя грань берется по всем допустимым функциям $v(z)$, т.е. вещественнозначным функциям $v(z)$, непрерывным на $\overline{\mathbb{C}}_z$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой конечной точки и таким, что $v(z) = 0$ в окрестности множества $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$ и $v(z) = \delta_l$ в окрестности $E(z_l, \psi_l(r))$, $l = 1, \ldots, m$ (здесь $z = x + iy$ и $1/0 = +\infty$). Приведенным модулем множества B относительно совокупностей Z, Δ и Ψ мы называем предел

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) = \lim_{r \to 0} \left(|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right),$$

где $\nu = (\sum \delta_l^2 \nu_l^{-1})^{-1}$. В случае, когда B – область, $m = 1$, $\delta_1 = 1$ и $\psi_1(r) \equiv r$ понятие приведенного модуля совпадает с классическим и восходит к работам Тейхмюллера и Грётша. Общий случай введен и изучен в [3, 7, 8] и других публикациях первого автора. В частности, в работе [7] показано, что если множество $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$

имеет положительную гармоническую меру, то для любых Z, Δ и Ψ приведенный модуль существует и справедлива формула

$$M(B,Z,\Delta,\Psi)=\frac{\nu^2}{2\pi}\left\{\sum\frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\frac{r(B,z_l)}{\mu_l}+\sum\frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}g_B(z_l,z_k)\right\},\qquad(1)$$

где $r(B,z)$ означает внутренний радиус связной компоненты множества B, содержащей точку z, а $g_B(z,\zeta)$ – функция Грина такой компоненты, доопределенная нулем в ее дополнении. Положив в (1) B, равному $B'=\{z:\ |z|<1\}$, либо $B'=\{z:\ |z|>1\}$ и $Z'=\{z_k\}_{k=1}^n$, $\Delta'=\{1,\dots,1\}$, $\Psi'=\{r,\dots,r\}$, после простых вычислений имеем

$$M(B',Z',\Delta',\Psi')=\frac{1}{2\pi n^2}\log\frac{\prod|1-z_k\overline{z}_l|}{\prod|z_k-z_l|}.\qquad(2)$$

Ситуация, когда множество $\overline{\mathbb{C}}_z\setminus B$ имеет гармоническую меру нуль, эквивалентна случаю $B=\overline{\mathbb{C}}_z$ и требует дополнительных ограничений на Δ и Ψ [3]. Именно, при дополнительном условии $\sum\delta_l\nu_l^{-1}=0$ приведенный модуль комплексной сферы существует, причем

$$M(\overline{\mathbb{C}}_z,Z,\Delta,\Psi)=\frac{\nu^2}{2\pi}\left(-\sum\frac{\delta_l^2}{\nu_l^2}\log\mu_l-\sum\frac{\delta_l\delta_k}{\nu_l\nu_k}\log|z_l-z_k|\right).\qquad(3)$$

Доказательство этой формулы приведено в работе [8].

§2. Экстремальные разбиения

Мы ограничимся частным случаем теоремы 2 работы [8], состоящим в следующем. Пусть B_1 и B_2 – открытые непересекающиеся множества на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, и пусть z_{kl}, $z_{kl}\in B_k$, $l=1,\dots,m_k$, – различные точки этих множеств, $Z_k=\{z_{kl}\}_{l=1}^{m_k}$, $k=1,2$. Предположим, что совокупности

$$\Delta_k=\{\delta_{kl}\}_{l=1}^{m_k}\quad\text{и}\quad\Psi_k=\{\mu_{kl}r^{\nu_{kl}}\}_{l=1}^{m_k}$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{l=1}^{m_k}\delta_{kl}^2\neq0,\quad k=1,\,2,$$

$$\sum\delta_{kl}/\nu_{kl}=0.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{m_k}\delta_{kl}^2/\nu_{kl}\right)^2 M(B_k,Z_k,\Delta_k,\Psi_k)\le$$
$$\le\left(\sum\delta_{kl}^2/\nu_{kl}\right)^2 M(\overline{\mathbb{C}}_z,Z,\Delta,\Psi), \qquad (4)$$

где $Z=\{z_{kl}\}$, $\Delta=\{\delta_{kl}\}$ и $\Psi=\{\mu_{kl}r^{\nu_{kl}}\}$. Отметим, что в терминах метода экстремальной метрики приведенное выше неравенство дает решение одной обобщенной задачи об экстремальном разбиении комплексной сферы. Действительно, положив в нем $m_1=m_2=\mu_{11}=\mu_{21}=\nu_{11}=\nu_{21}=\delta_{11}=-\delta_{21}=1$ и учитывая (1), (3), получим классический результат М. А. Лаврентьева:

$$r(B_1,z_{11})\cdot r(B_2,z_{21})\le|z_{11}-z_{21}|^2.$$

Покажем сейчас, что неравенство (4) можно интерпретировать как оценку для полиномов.

Теорема 1. *Пусть B_1 и B_2 – открытые непересекающиеся множества на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, и пусть $P(z)$, $Q(z)$ – два полинома степени n, причем нули полинома $P(z)$, $z_1,\dots,z_n$, попарно различны и лежат в B_1, а нули $Q(z)$, $\zeta_1,\dots,\zeta_n$, также различны и принадлежат множеству B_2. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{P'(z_k)\,Q'(\zeta_k)}{P(\zeta_k)\,Q(z_k)}\right|\le$$
$$\le\exp\left\{-2\pi n^2\left[M(B_1,Z_1,\Delta_1,\Psi_1)+M(B_2,Z_2,\Delta_2,\Psi_2)\right]\right\},$$

где $Z_1=\{z_k\}_{k=1}^n$, $Z_2=\{\zeta_k\}_{k=1}^n$, $\Delta_1=\Delta_2=\{1,\dots,1\}$, $\Psi_1=\Psi_2=\{r,\dots,r\}$.

Доказательство. Применяя последовательно неравенство (4) и формулу (3), получаем

$$M(B_1,Z_1,\Delta_1,\Psi_1)+M(B_2,Z_2,\Delta_2,\Psi_2)=$$
$$=M(B_1,Z_1,\Delta_1,\Psi_1)+M(B_2,Z_2,\{-1,\dots,-1\},\Psi_2)\le$$
$$\le\frac{1}{2\pi n^2}\log\prod|z_k-\zeta_l|^2|z_k-z_l|^{-1}|\zeta_k-\zeta_l|^{-1}.$$

Осталось заметить, что полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ имеют вид $P(z) = \alpha\prod(z-z_k)$, $Q(z) = \beta\prod(z-\zeta_k)$, поэтому

$$\Bigl|\prod P(\zeta_k)\Bigr| = |\alpha|^n \prod|\zeta_k - z_l|, \quad \Bigl|\prod Q(z_k)\Bigr| = |\beta|^n \prod|z_k - \zeta_l|,$$

$$\Bigl|\prod P'(z_k)\Bigr| = |\alpha|^n \prod|z_k - z_l|, \quad \Bigl|\prod Q'(\zeta_k)\Bigr| = |\beta|^n \prod|\zeta_k - \zeta_l|.$$

Теорема доказана.

Выбирая в теореме 1 различным образом множества B_1, B_2 и полиномы $P(z)$, $Q(z)$, имеем различные оценки для полиномов и их производных. Например, справедливы следующие утверждения.

Следствие 1. *Если нули полинома* $P(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)$ *отличны от начала координат и лежат в круге* $|z| < 1$, *а нули полинома* $Q(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}(z-\zeta_k)$ *лежат в области* $|z| > 1$, *то*

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k^n\, \zeta_k^n\, P(1/\overline{z}_k)\, Q(1/\overline{\zeta}_k)\right| \le \left|\prod_{k=1}^{n} P(\zeta_k)\, Q(z_k)\right|.$$

Знак равенства достигается для произвольных полиномов $P(z)$ *и* $Q(z)$ *с симметричными нулями:* $\zeta_k = 1/\overline{z}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Можно считать, что точки z_k и ζ_k попарно различны, $k = 1, \dots, n$. Из теоремы 1 и формулы (2) имеем

$$\left|\prod \frac{P'(z_k)\, Q'(\zeta_k)}{P(\zeta_k)\, Q(z_k)}\right| \le \frac{\prod|z_k - z_l|\, \prod|\zeta_k - \zeta_l|}{\prod|1 - z_k\overline{z}_l|\, \prod|1 - \zeta_k\overline{\zeta}_l|}.$$

Далее,

$$\prod|1 - z_k\overline{z}_l| = \prod_{k=1}^{n}\prod_{l=1}^{n}|z_k|\left|\frac{1}{\overline{z}_k} - z_l\right| = \left|\prod_{k=1}^{n} z_k^n\, P(1/\overline{z}_k)\right|.$$

Аналогично,

$$\prod|1 - \zeta_k\overline{\zeta}_l| = \left|\prod_{k=1}^{n} \zeta_k^n\, Q(1/\overline{\zeta}_k)\right|.$$

Осталось заметить, как и выше, что $\prod|z_k - z_l| = |\prod P'(z_k)|$ и $\prod|\zeta_k - \zeta_l| = |\prod Q'(\zeta_k)|$. Что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Если окружность $|z| = 1$ отделяет нули $z_1, \dots, z_n$ полинома $P(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_{n+1} z^{n+1}$, $c_{n+1} \neq 0$, отличные от начала, от нулей его производной $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, то*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} P(1/\overline{z}_k)\; P'(1/\overline{\zeta}_k) \right| \leq \left[(n+1)\; |c_{n+1}^2| \right]^{n+1} \left| \prod_{k=1}^{n} P(\zeta_k)\; P'(z_k) \right| .$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = z - \sqrt{1/(n+1)}\; z^{n+1}$.

Доказательство. К полиномам $P'(z)/(c_{n+1}(n+1))$ и $P(z)/(c_{n+1} z)$ применимо предыдущее утверждение, из которого вытекает требуемое неравенство. Знак равенства проверяется непосредственно.

Теорема 2. *Пусть B_1 и B_2 – открытые непересекающиеся множества на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, причем множество B_2 содержит бесконечно удаленную точку. Предположим, что все нули полинома $P(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)$ попарно различны и принадлежат множеству B_1. Тогда*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} P'(z_k) \right| \leq$$

$$\leq \exp \left\{ -2\pi n^2 \left[M(B_1, Z, \Delta, \Psi) + M(B_2, \{\infty\}, \{1\}, \{r^{1/n}\}) \right] \right\} ,$$

где $Z = \{z_k\}_{k=1}^{n}$, $\Delta = \{1, \dots, 1\}$, $\Psi = \{r, \dots, r\}$.

Доказательство. Неравенство (4) и формула (3) дают последовательно

$$M(B_1, Z, \Delta, \Psi) + M(B_2, \{\infty\}, \{1\}, \{r^{1/n}\}) =$$

$$= M(B_1, Z, \Delta, \Psi) + M(B_2, \{\infty\}, \{-1\}, \{r^{1/n}\}) \leq$$

$$\leq -\frac{1}{2\pi n^2} \log \prod |z_k - z_l| = -\frac{1}{2\pi n^2} \log \left| \prod P'(z_k) \right| .$$

Теорема доказана.

Следствие 3. *Если нули полинома $P(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)$ отличны от начала и лежат в круге $|z| < 1$, то*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} z_k^n\; P(1/\overline{z}_k) \right| \leq 1.$$

Данное неравенство неточное. Оно легко получается из теоремы 2 и формулы (2), если в качестве B_1 и B_2 взять множества, на которые окружность $|z| = 1$ разбивает сферу $\overline{\mathbb{C}}_z$. Точную оценку можно получить тем же путем, если окружность $|z| = 1$ заменить на лемнискату вида $|z^n - a| \leq R$. Однако мы не приводим эту оценку ввиду ее громоздкости.

§3. Ограничения на нули полинома

Всюду ниже под $P(z)$ понимается полином вида

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0. \tag{5}$$

Для произвольного невырожденного континуума γ открытой z-плоскости обозначим также через $F(z) \equiv F_\gamma(z) = d(\gamma)^{-1} z + a_0 + a_1/z + \ldots$ функцию Римана, конформно и однолистно отображающую связную компоненту множества $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \gamma$, содержащую бесконечность, на область $|\zeta| > 1$. Здесь $d(\gamma)$ – постоянная Чебышева компакта γ.

Теорема 3. *Пусть γ – некоторый невырожденный континуум в плоскости z, и пусть $\zeta = F(z)$ – соответствующая функция Римана. Предположим, что все нули полинома (5) лежат на γ. Тогда для любой точки z такой, что $|P(z)| > \max\limits_{\gamma} |P(z)| \overset{\text{def}}{=} M$ выполняется неравенство*

$$|P'(z)| \leq n\, d(\gamma)\; |c_n|^{1/n} |P(z)|^{1-1/n} |F'(z)| \,\frac{1 - |F(z)|^{-2}}{1 - |M/P(z)|^{2/n}}. \tag{6}$$

Доказательство. Фиксируем точку z_0 такую, что $|P(z_0)| > M$, и пусть $\zeta_0 = F(z_0)$. Введем следующие обозначения: $Z = \{0,\ 1/\overline{\zeta}_0,\ \zeta_0,\ \infty\}$, $\Delta = \{1, -1, -1, 1\}$, $\Psi = \{r,\ r/|\zeta_0|^2,\ r,\ r\}$, $u(\zeta)$ – потенциальная функция конденсатора $C(r; \overline{\mathbb{C}}_\zeta, Z, \Delta, \Psi)$, т.е.

$$|C(r; \overline{\mathbb{C}}_\zeta, Z, \Delta, \Psi)|^{-1} = I(u, \mathbb{C}_\zeta).$$

Здесь и всюду ниже принято обозначение

$$I(v, \sigma) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_\sigma |\nabla v|^2 d\sigma.$$

Мы считаем конденсатор $C(r; \overline{\mathbb{C}}_\zeta, Z, \Delta, \Psi)$ и, следовательно, функцию $u(\zeta)$ симметричными относительно окружности $|\zeta| = 1$.

Пусть $\omega = \varphi(\zeta)$ – одна из однозначных ветвей функции $\omega = \left\{P\left[F^{-1}(\zeta)\right]\right\}^{1/n}$ в односвязной области $|\zeta| > 1$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\widetilde{u}(\omega)$, заданную в плоскости $\overline{\mathbb{C}}_\omega$, симметричную относительно окружности $|\omega| = M^{1/n}$ и в точках $|\omega| \geq M^{1/n}$ равную

$$\widetilde{u}(\omega) = \min_{\varphi(\zeta)=\omega} u(\zeta).$$

Функция $\widetilde{u}(\omega)$ допустима для некоторого конденсатора вида $C(r; \overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega,\ \Delta, \widetilde{\Psi})$ с параметрами $\Omega = \{0, M^{2/n}\ \overline{P(z_o)}^{1/n},\ P(z_o)^{1/n}, \infty\}$, где $P(z_o)^{1/n}$ – одно из значений корня, и

$$\widetilde{\Psi} = \{M^{2/n} d(\gamma)^{-1} |c_n|^{-1/n} r,\ M^{2/n} |P(z_o)|^{-1-1/n} |P'(z_o)|\ |F'(z_o)|^{-1} n^{-1} r,$$
$$|P(z_o)|^{-1+1/n} |P'(z_o)|\ |F'(z_o)|^{-1} n^{-1} r,\ d(\gamma)^{-1} |c_n|^{-1/n} r\}.$$

По определению модуля конденсатора

$$I(\widetilde{u}, \mathbb{C}_\omega) \geq |C(r; \overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \Delta, \widetilde{\Psi})|^{-1}.$$

Далее, из соображений симметрии и конформной инвариантности интеграла Дирихле имеем

$$I(u, \mathbb{C}_\zeta) = 2I\left(u, \{\zeta : |\zeta| > 1\}\right) \geq 2I(\widetilde{u}, \{\omega : |\omega| > M^{1/n}\}) = I(\widetilde{u}, \mathbb{C}_\omega).$$

Суммируя выписанные соотношения и переходя к пределу при $r \to 0$, получаем

$$M(\overline{\mathbb{C}}_\zeta, Z, \Delta, \Psi) \leq M(\overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \Delta, \widetilde{\Psi}).$$

Формула (3) дает

$$\log|\zeta_o|^2 + 2\log\frac{|\zeta_o|}{|\zeta_o|^2 - 1} \leq -\log\frac{M^{4/n}|P'(z_o)|^2}{d(\gamma)^2\ \ |c_n|^{2/n} n^2 |P(z_o)|^2 |F'(z_o)|^2} +$$
$$+2\log\frac{M^{2/n}|P(z_o)|^{1/n}}{|P(z_o)|^{2/n} - M^{2/n}},$$

что равносильно неравенству (6) при $z = z_o$. Теорема доказана.

Можно показать, что верхняя оценка в (6) неточная в случаях γ отличных от круга или им эквивалентных. Для круга $\gamma = \{z : |z| \leq \rho\}$ имеем $d(\gamma) = \rho,\ F(z) = z/\rho$ и неравенство (6) принимает вид

$$|P'(z)| \leq n\ |c_n|^{1/n} |P(z)|^{1-1/n} \frac{1 - |\rho/z|^2}{1 - |M_\rho/P(z)|^{2/n}}, \qquad (7)$$

где $M_\rho = \max_{|z|=\rho} |P(z)|$. Знак равенства в (7) достигается для полинома $P(z) = c_n z^n$ и любых $z \neq 0$. Напомним, что (7) выполняется для всех полиномов (5) с нулями в круге $|z| < \rho$ и любых точек z, удовлетворяющих условию

$$|P(z)| > M_\rho \tag{8}$$

Понятно, что при больших $|z|$ условие (8) заведомо выполняется и, следовательно, интересно знать возможно лучшие нижние границы таких $|z|$. В связи с этим приведем следующее утверждение.

Теорема 4. *Если при некотором $\rho > 0$ все нули полинома* (5) *лежат в круге $|z| \leq \rho$, то для любых точек z с модулем $|z| > (3 + 2\sqrt{2})\rho$ выполняется неравенство* (8) *и, следовательно, неравенство* (7) *с равенством для $P(z) = c_n z^n$ и любых $z \neq 0$.*

Доказательство. Фиксируем точку z_o с модулем $|z_o| > (3+2\sqrt{2})\rho$. Используя конформное отображение

$$\zeta = \zeta(z) \equiv \frac{1}{4}\left[\frac{z\,|z_o|}{z_o\rho} + \frac{z_o\rho}{z\,|z_o|} - 2\right] M_\rho^{1/n},$$

убеждаемся, что модуль конденсатора $C = (\{z : |z| \leq \rho\}, \{tz_o,\ t \geq 1\})$ равен модулю конденсатора $\widetilde{C}$, первая пластина которого есть отрезок $[-M_\rho^{1/n}, 0]$, а вторая – луч по вещественной положительной полуоси от точки $\zeta(z_o) > M_\rho^{1/n}$ до бесконечности. Далее, мероморфная ветвь $\omega = \varphi(z)$ функции $\omega = P(z)^{1/n}$ в области $|z| > \rho$ отображает конденсатор C на конденсатор $\varphi(C)$. Первая пластина этого конденсатора есть связное множество, содержащее начало координат и по крайней мере одну точку на расстоянии $M_\rho^{1/n}$ от начала. Вторая пластина содержит некоторую замкнутую жорданову дугу γ, соединяющую точку с модулем $\max\{M_\rho^{1/n},\ |P(z_0)|^{1/n}\}$ с бесконечностью, причем каждой точке этой дуги γ при отображении $\omega = \varphi(z)$ соответствует только одна точка в плоскости z (заметим, что по теореме Лукаса [1, с. 18] нули производной $P(z)$ также лежат в круге $|z| < \rho$, так что риманова поверхность полинома $P(z)$ содержит n-листный круг над $|w| > M_\rho$). Обозначим через $\widetilde{\varphi(C)}$ конденсатор $\varphi(C)$, у которого вторая пластина заменена на γ. Если $u(z)$ – потенциальная функция конденсатора C, то функция $\widetilde{u}(\omega) = \max\{u(z) :\ \omega = \varphi(z)\}$

допустима для $\widetilde{\varphi(C)}$. Поэтому, модуль конденсатора C не превосходит модуля $\widetilde{\varphi(C)}$. Наконец, пусть $(\widetilde{\varphi(C)})^*$ – результат круговой симметризации конденсатора $\widetilde{\varphi(C)}$ относительно положительной полуоси. По теореме Полиа–Сеге [9],

$$|\widetilde{\varphi(C)}| \leq |(\widetilde{\varphi(C)})^*|.$$

Итак, $|\widetilde{C}| \leq |(\widetilde{\varphi(C)})^*|$, вместе с тем по построению первая пластина конденсатора $(\widetilde{\varphi(C)})^*$ содержит отрезок $[-M_\rho^{1/n},\ 0]$, а вторая содержит луч $\omega \geq \max\{M_\rho^{1/n},\ |P(z_o)|^{1/n}\}$. Из монотонности модуля необходимо следует $|P(z_o)| > M_\rho$, т.е. выполняется (8) и, следовательно, (7) для $z = z_o$. Теорема доказана.

В дополнение к неравенству (7) приведем следующий результат.

Теорема 5. *Если для полинома* (5) *в точке* $z_o \neq 0$ *выполняется* $|P(z_o)| = \max\limits_{|z|=|z_o|} |P(z)|$, *а все нули этого полинома лежат в круге* $|z| \leq |z_o|$, *то*

$$|P'(z_o)| \leq n\ |c_n|^{1/2n} |P(z_o)|^{1-1/2n}\ |z_o|^{-1/2}. \tag{9}$$

Знак равенства в (9) *достигается для полинома* $P(z) = c_n z^n$ *и любых* $z_o \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим симметричный относительно окружности $|z| = |z_o|$ конденсатор $C(r;\ \overline{\mathbb{C}}_z,\ Z,\ \Delta,\ \Psi)$ с параметрами $Z = \{z_o,\ 0,\ \infty\}$, $\Delta = \{-1, 1, 1\}$, $\Psi = \{\sqrt{r},\ |z_o|^2 r, r\}$. Пусть $u(z)$ – потенциальная функция этого конденсатора. Обозначим через $\omega = \varphi(z)$ одну из мероморфных ветвей функции $\omega = \sqrt{[n]}P(z)$ в замкнутой области $|z| \geq |z_o|$. Введем вспомогательную функцию $\widetilde{u}(\omega)$, симметричную относительно окружности $|\omega| = |P(z_o)|^{1/n}$ и в точках $|\omega| \geq |P(z_o)|^{1/n}$ равную $\widetilde{u}(\omega) = \min\{u(z) : \varphi(z) = \omega\}$. Функция $\widetilde{u}(\omega)$ допустима для некоторого конденсатора $C(r; \overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \Delta, \widetilde{\Psi})$ с параметрами $\Omega = \{P(z_o)^{1/n}, 0, \infty\}$, где $P(z_o)^{1/n}$ – одно из значений корня, Δ определяется также как и выше и $\widetilde{\Psi} = \{\frac{1}{n}\ |P(z_o)|^{1/n-1} \cdot\ |P'(z_o)|\ \sqrt{r},\ |P(z_o)|^{2/n} |c_n|^{-1/n} r,\ |c_n|^{-1/n} r\}$. Аналогично доказательству предыдущей теоремы, имеем

$$|C(r; \overline{\mathbb{C}}_z, Z, \Delta, \Psi)|^{-1} = I(u, \mathbb{C}_z) = 2I(u, \{z : |z| > |z_o|\}) \geq$$

$$\geq 2I(\widetilde{u}, \{\omega : |\omega| > |P(z_o)|^{1/n}\}) = I(\widetilde{u}, \mathbb{C}_\omega) \geq |C(r; \overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \Delta, \widetilde{\Psi})|^{-1}.$$

Следовательно

$$M(\overline{\mathbb{C}}_z, Z, \Delta, \Psi) \leq M(\overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \Delta, \widetilde{\Psi}).$$

Формула (3) дает

$$2\log|z_o| \leq -4\log\left(\frac{1}{n}\,|P(z_o)|^{1/n-1}|P'(z_o)|\right) - \log\left(|P(z_o)|^{2/n}|c_n|^{-1/n}\right) -$$
$$- \log|c_n|^{-1/n} + 4\log|P(z_o)|^{1/n}.$$

Отсюда получаем (9). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Перепишем неравенство (9) для $|z_o| = 1$ и, следовательно, для полиномов (5), имеющих все нули в круге $|z| \leq 1$, в виде

$$|P'(z_o)| \leq n \max_{|z|=1}|P(z)| \left[|c_n| / \max_{|z|=1}|P(z)|\right]^{1/2n}.$$

Заметим, что согласно неравенству Коши множитель в квадратной скобке не превосходит единицы. Для произвольных полиномов (5) без каких-либо ограничений на нули имеет место классическое неравенство Бернштейна

$$\max_{|z|=1}|P'(z)| \leq n \max_{|z|=1}|P(z)|.$$

К настоящему времени известны обобщения этого неравенства [6], а также его усиления в случае полиномов, имеющих все нули в области $|z| \geq 1$ [7]. Что касается полиномов, имеющих все свои нули в круге $|z| \leq 1$, то для них известны неравенства вида

$$\max_{|z|=1}|P'(z)| \geq C \max_{|z|=1}|P(z)|.$$

полученные Тураном, Маликом, Говилом и другими математиками. Одно из последних обобщений этих неравенств дано в недавней работе [8].

§4. Ограничения на точки ветвления

Полином (5) отображает открытую плоскость $\mathbb{C}_z$ на некоторую риманову поверхность, лежащую над w-плоскостью. Точки ветвления этой поверхности будем называть точками ветвления полинома (5).

Теорема 6. *Предположим, что все точки ветвления полинома (5) лежат над некоторым континуумом $\gamma \subset \mathbb{C}_w$, и пусть точка z такова, что ее образ $P(z)$ принадлежит связной компоненте $\overline{\mathbb{C}}_w \backslash \gamma$, содержащей бесконечность. Тогда выполняется неравенство*

$$|P'(z)| \leq n\ |c_n/d(\gamma)|^{1/n} \frac{|F(P(z))/F'(P(z))|}{|F(P(z))|^{1/n} - |F(P(z))|^{-1/n}}, \qquad (10)$$

где $\zeta = F(w)$ – функция Римана, соответствующая континууму γ, а $d(\gamma)$ – постоянная Чебышева.

Доказательство. Фиксируем точку z_o, удовлетворяющую условию теоремы и рассмотрим симметричный относительно окружности $|z - z_o| = 1$ конденсатор $C(r; \overline{\mathbb{C}}_z, Z, \Delta, \Psi)$ с параметрами $Z = \{z_o, \infty\}$, $\Delta = \{-1, 1\}$, $\Psi = \{r, r\}$. Пусть $u(z)$ – потенциальная функция этого конденсатора. Обозначим через $\omega = \varphi(z)$ одну из мероморфных ветвей функции $\omega = (F(P(z)))^{1/n}$ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$. Наконец, введем вспомогательную функцию $\widetilde{u}(\omega)$, заданную на $\overline{\mathbb{C}}_\omega$, симметричную относительно окружности $|\omega| = 1$ и в точках множества $|\omega| \geq 1$ равную $\widetilde{u}(\omega) = \min\{u(z) : \varphi(z) = \omega\}$. Функция $\widetilde{u}(\omega)$ допустима для некоторого конденсатора вида $C(r; \overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Psi})$ с параметрами

$$\Omega = \{0,\ \overline{F(P(z_o))}^{-1/n},\ \ F(P(z_o))^{1/n},\ \infty\},\ \widetilde{\Delta} = \{1, -1, -1,\ 1\},$$

$$\widetilde{\Psi} = \{|d(\gamma)/c_n|^{1/n} r, \frac{1}{n}\ |F(P(z_o))|^{-1/n-1} \cdot |F'(P(z_o))\ P'(z_o)|\ r,$$

$$\frac{1}{n}\ |F(P(z_o))|^{1/n-1} \cdot |F'(P(z_o))\ P'(z_o)|\ r,\ |d(\gamma)/c_n|^{1/n} r\}.$$

Здесь $F(P(z_o))^{1/n}$ – одно из значений корня. Следующая цепочка неравенств не требует пояснений

$$|C(r; \overline{\mathbb{C}}_z, Z, \Delta, \Psi)|^{-1} = I(u, \mathbb{C}_z) \geq \frac{1}{2}\ I\left(\widetilde{u}, \{\omega : |\omega| > 1\}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \left| C(r; \overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Psi}) \right|^{-1}.$$

Отсюда

$$M(\overline{\mathbb{C}}_z, Z, \Delta, \Psi) \leq 2\ M(\overline{\mathbb{C}}_\omega, \Omega, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\Psi}).$$

Вновь применяя формулу (3), имеем

$$0 \leq -\log \frac{d(\gamma)^{2/n} |F'(P(z_o))\ P'(z_o)|^2}{|c_n|^{2/n} n^2 |F(P(z_o))|^2} + 2\log \frac{|F(P(z_o))|^{1/n}}{|F(P(z_o))|^{2/n} - 1},$$

что совпадает с (10) для $z = z_o$. Теорема доказана.

Отметим частный случай теоремы 6, когда все точки ветвления полинома (5) лежат над некоторым кругом $|w - w_o| \leq R$. В этом случае для любой точки z выполняется

$$|P'(z)|\ \left[|P(z) - w_o|^{1/n} - |P(z) - w_o|^{-1/n} R^{2/n}\right] \leq$$

$$\leq n\ |c_n|^{1/n} |P(z) - w_o|. \qquad (11)$$

Действительно, при $|P(z) - w_o| \leq R$ неравенство (11) очевидно, а в случае $|P(z) - w_o| > R$ оно вытекает из теоремы 6, где необходимо положить $\gamma = \{w : |w - w_o| \leq R\}$, $F(w) = (w - w_o)/R$ и $d(\gamma) = R$. Равенство в (11) достигается для полиномов вида $P(z) = w_o + c_n(z - z_o)^n$, $R = 0$ и любых точек z.

Следующий результат был анонсирован в работе [3].

Теорема 7. *Если $P(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, $n \geq 2$, $c_n \neq 0$, то существует по крайней мере одна критическая точка a, $P'(a) = 0$, такая, что*

$$|P(a)|^{2/n} \geq 1 - n|c_n|^{1/n}/|c_1|.$$

Равенство достигается для полинома $P(z) = (1 + tz)^n$, где t – произвольное комплексное число, отличное от нуля.

Доказательство. Положим $w_o = 0$, $R = \max\{|P(z)| : P'(z) = 0\}$ и применим неравенство (11) к полиному вида $P(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$ в точке $z = 0$. В результате получим

$$|c_1|\ \left[1 - R^{2/n}\right] \leq n\ |c_n|^{1/n},$$

что и требовалось доказать.

Первый автор этой статьи выражает благодарность факультету математики Хельсинского университета и лично профессору М. Вуоринену за организацию его визита в Финляндию и гостеприимство, без которых данная публикация была бы невозможной.

Литература

1. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities,* New York, 1995.
2. А. И. Кострикин, *Введение в алгебру. Основы алгебры,* М., 1994.
3. В. Н. Дубинин, *Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций,* Докл. РАН **363**, No. 6 (1998), 731–734.
4. A. Aziz, N. A. Rather, *L^p inequalities for polynomials,* Glasnik Mat. **32(52)** (1997), 39–43.
5. V. K. Jain, *Generalization of certain well known inequalities for polynomials,* Glasnik Mat. **32(52)** (1997), 45–51.
6. A. Aziz, N. A. Rather, *A refinement of a theorem of Paul Turan concerning polynomials,* Math. Inequal. Appl. **1**, No. 2 (1998), 231–238.
7. В. Н. Дубинин, *Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 56–73.
8. В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, *Приведенный модуль комплексной сферы,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 76–94.
9. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике,* М., 1962.

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток

Поступило 27 августа 1999 г.