Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Е. Г. Емельянов

ЗАДАЧИ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ В ПРОСТРАНСТВАХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§0. Введение. Задачи I и II

0.1. Первый общий результат об экстремальном разбиении римановой поверхности принадлежит Дж. Дженкинсу [1]. В [1] дано решение следующей задачи.

Пусть $\mathfrak{R}$ – конечная риманова поверхность, $\mathbf{A}$ – множество отмеченных точек на $\mathfrak{R}$ (возможно, $\mathbf{A} = \varnothing$), и пусть $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \mathbf{A}$. Пусть $\mathcal{D}$ – семейство всех систем $\mathbf{D}$ неналегающих двусвязных областей $D_1, \dots, D_n$ на $\mathfrak{R}'$; предполагается, что семейство $\mathcal{D}$ ассоциировано с заданным семейством $\mathcal{H}$ гомотопических классов $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ замкнутых жордановых кривых на $\mathfrak{R}'$. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – заданная система положительных чисел. Через $M(D)$ здесь и ниже обозначаем модуль двусвязной области D относительно класса кривых в D, разделяющих ее граничные компоненты.

Задача I. Найти максимум функционала

$$\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 M(D_j) \tag{0.1}$$

в семействе $\mathcal{D}$.

В [1] показано, что максимум $\mathcal{M}^*$ функционала (0.1) реализуется единственной системой $\mathbf{D}^*$ областей $D_1^*, \dots, D_n^*$ семейства $\mathcal{D}$ и $\mathbf{D}^*$ представляет собой систему кольцевых областей квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ на $\mathfrak{R}$ (ассоциированного квадратичного дифференциала задачи I), однозначно определяемого топологическими и метрическими условиями задачи I (см. [1]); при этом возможен случай, когда некоторые из областей D_j^* оказываются вырожденными: $D_j^* = \varnothing$, тогда $M(D_j^*) = 0$. Отметим,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 97-01-00259.

что дифференциал $Q(z)dz^2$ имеет простые полюсы в точках множества $\mathbf{A}$ (возможно, не во всех из этих точек) и регулярен в остальных точках $\mathfrak{R}$.

0.2. Более общей задачей об экстремальном разбиении римановой поверхности является формулируемая ниже задача II, поставленная и решенная в [2]. В этой задаче рассматривается семейство систем неналегающих областей различных типов, при этом существенную роль играет понятие приведенного модуля двуугольника специального вида.

Пусть на конечной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ заданы множества отмеченных точек

$$\mathbf{A} = \{a_j\}_{j=1}^n, \quad \mathbf{B}^{(0)} = \{b_i^{(0)}\}_{i=1}^m, \quad \mathbf{B} = \{b_k\}_{k=1}^p$$

и пусть

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}, \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \mathbf{P}.$$

Пусть $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^p$ – система заданных чисел, $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. Пусть $\mathcal{D}$ – семейство систем неналегающих областей

$$\mathbf{D}^{(1)} = \{D_j^{(1)}\}_{j=1}^{n_1}, \quad \mathbf{D}^{(2)} = \{D_j^{(2)}\}_{j=1}^{m}, \quad \text{и} \quad \mathbf{D}^{(3)} = \{D_j^{(3)}\}_{j=1}^{n_3},$$

на $\mathfrak{R}' \cup \mathbf{A}$ следующих трех типов: $D_j^{(1)}$ – двусвязная область, $D_j^{(2)}$ – односвязная область, $b_j^{(0)} \in D_j^{(0)}$, $D_j^{(3)}$ – двуугольник с вершинами в точках b_k, $k = k'(j)$, $k''(j)$, множества B, граничные дуги двуугольника $D_j^{(3)}$ ведут себя в окрестностях его вершин асимптотически подобно логарифмическим спиралям наклонов β_k, $k = k'(j)$, $k''(j)$. Предполагается, что семейство $\mathcal{D}$ ассициировано с заданным семейством $\mathcal{H}$ систем

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{\mathcal{H}^{(1)}\}_{j=1}^{n_1}, \quad \mathcal{H}^{(2)} = \{\mathcal{H}^{(2)}\}_{j=1}^{m} \quad \text{и} \quad \mathcal{H}^{(3)} = \{\mathcal{H}^{(3)}\}_{j=1}^{n_3}$$

гомотопических классов жордановых кривых на $\mathfrak{R}'$ соответствующих трех типов (см. [2]). Пусть $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j\}_{j=1}^{n_1+m}$ и $\mathbf{h} = \{h_j\}_{j=1}^{n_3}$ – заданные системы положительных чисел. Пусть также задана система $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$ двуугольников из $\mathbf{D}^{(3)}$, рассматриваемая в качестве исходной.

Задача II. Найти максимум функционала

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j^2 M\left(D_j^{(1)}\right) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{n_1+j}^2 M\left(D_j^{(2)}, b_j^{(0)}\right) - \\ - \sum_{j=1}^{n_3} h_j^2 M\left(D_j^{(3)}, b_{k'(j)}, b_{k''(j)}; \mathring{\mathbf{D}}_j^{(3)}\right)\end{aligned} \tag{0.3}$$

в семействе $\mathcal{D}$.

Здесь $M(D_j^{(2)}, b_j^{(0)})$ – приведенный модуль области $D_j^{(2)}$ относительно точки $b_j^{(0)} \in D_j^{(2)}$, $M(D_j^{(3)}, b_{k'(j)}, b_{k''(j)}; \mathring{D}_j^{(3)})$ – приведенный модуль двуугольника $D_j^{(3)}$ относительно его вершин $b_{k'(j)}$, $b_{k''(j)}$ и области $\mathring{D}_j^{(3)}$ (см. [2]).

Теорема 1 в [2] показывает, что при любом выборе множества $\mathbf{P}$, семейства гомотопических классов $\mathcal{H}$, систем чисел $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{h}$ и $\boldsymbol{\beta}$, исходной системы двуугольников $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$ и локальных параметров в точках множества $\mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$ существует единственная система областей $\mathbf{D}^*$, реализующая максимум $\mathcal{M}^*$ функционала (0.3) в семействе $\mathcal{D}$. Система $\mathbf{D}^*$ состоит из кольцевых, круговых и полосообразных областей ассоциированного квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$ задачи II, который однозначно определяется условиями этой задачи. Дифференциал $Q(z)dz^2$ имеет простые полюсы в точках множества $\mathbf{A}$ (возможно, не во всех из этих точек), полюсы второго порядка в каждой из точек множества $\mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$ и регулярен в остальных точках $\mathfrak{R}$. Если каждое из множеств $\mathbf{B}^{(0)}$ и $\mathbf{B}$ не пусто и среди чисел β_k системы $\boldsymbol{\beta}$ имеются как равные нулю, так и отличные от нуля, то $Q(z)dz^2$ имеет полюсы второго порядка каждого из возможных типов.

0.3. В §1 настоящей работы мы распространяем задачу II, определенную для одной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ с множеством отмеченных точек $\mathbf{P} \subset \mathfrak{R}$, на пространство Тейхмюллера $T_{\mathfrak{R}'}$ таких поверхностей. При этом возникает функция $\mathcal{M}^*(x)$, выражающая зависимость экстремального значения функционала $\mathcal{M}$ от точки $x \in T_{\mathfrak{R}'}$, и поле квадратичных дифференциалов $Q(x)$. В §2 получены формулы дифференцирования для $\mathcal{M}^*(x)$, обобщающие результат в [3]. В §3 для задачи I доказано, что в случае, когда число n областей экстремального разбиения является максимально возможным: $n = 3g - 3 + N$, где g – род поверхности $\mathfrak{R}$, а N – число отмеченных точек на $\mathfrak{R}$, то $Q(x)$ голоморфно зависит от x и $\mathcal{M}^*(x)$ – плюригармоническая функция в окрестности исходной точки x_0.

0.4. В дальнейшем $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{H}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\Delta_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$. Если $\mathfrak{R}$ – риманова поверхность, Ω – ее универсальная накрывающая, G – дискретная группа дробно-линейных преобразований на Ω и $\pi : \Omega \to \Omega/G = \mathfrak{R}$ – голоморфное накрытие, то $\mathbb{B}_{\mathfrak{R}}$ обозначает пространство дифференциалов Бельтрами μ на $\mathfrak{R}$; $\widehat{\mu}$ – дифференциал Бельтрами на Ω относительно G, являющийся поднятием μ : $\widehat{\mu} \circ g \cdot \overline{g'}/g' = \widehat{\mu}$ для всех $g \in G$; $\mathbb{B}(G)$ – пространство всех таких дифференциалов; $\mathbb{Q}_{\mathfrak{R}}$ обозначает пространство квадратичных дифференциалов Q на $\mathfrak{R}$, $\widehat{Q}$ – квадратичный дифференциал на Ω относительно G, являющийся поднятием Q : $\widehat{Q} \circ g \cdot {g'}^2 = \widehat{Q}$ для всех $g \in G$; $\mathbb{Q}(G)$, $\mathbb{Q}_1(G)$, $\mathbb{Q}_2(G)$ – пространства всех таких дифференциалов, соответственно регулярных, с полюсами только первого порядка и с полюсами не выше второго порядка.

Ниже для квадратичного дифференциала, уравнения Бельтрами и квазиконформного гомеоморфизма используются сокращения “к.д.”, “у.Б.” “кв.г”.

§1. Распространение задачи об экстремальном разбиении римановой поверхности $\mathfrak{R}$ на пространство Тейхмюллера $T_{\mathfrak{R}'}$

1.1. Везде ниже, если не говорится противное, рассматриваются компактные римановы поверхности.

Начнем с задачи I. В этом случае указанное распространение строится очевидным образом. Пусть $\mathfrak{R}$ – компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 0$, Ω – ее универсальная накрывающая: $\Omega = \mathfrak{R} = \overline{\mathbb{C}}$ при $g = 0$, $\Omega = \mathbb{C}$ при $g = 1$ и $\Omega = \mathbb{H}$ при $g \geqslant 2$. Пусть G – дискретная группа дробно-линейных преобразований такая, что $\mathfrak{R} = \Omega \setminus G$ (в случае $g = 0$ группа G тривиальна). Дифференциалу Бельтрами $\mu \in \mathbb{B}_{\mathfrak{R}}$ соответствует $\widehat{\mu} \in \mathbb{B}(G)$ – его поднятие на Ω (в случае $g = 0$ μ и $\widehat{\mu}$ совпадают). Пусть для $g = 0, 1$ $f_{\mathfrak{R}}$ – гомеоморфное решение у.Б. на $\overline{\mathbb{C}}$ с коэффициентом, равным $\widehat{\mu}(z)$, нормированное условиями

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(\infty) = \infty, \tag{1.1}$$

а для $g \geqslant 2$ $f_{\widehat{\mu}}$ – гомеоморфное решение у.Б. на $\overline{\mathbb{C}}$ с коэффициентом, равным $\widehat{\mu}(z)$ на $\mathbb{H}$ и 0 на $\mathbb{H}_-$, с той же нормировкой. Пусть $G_\mu = f_{\widehat{\mu}} \circ G \circ f_{\widehat{\mu}}^{-1}$ – группа дробно-линейных преобразований: G_μ тривиальна при $g = 0$, G_μ – группа сдвигов при $g = 1$ и G_μ – фуксоидная группа при $g \geqslant 2$. Пусть $\Omega_\mu = f_\mu(\Omega)$, $\mathfrak{R}_\mu = \Omega_\mu / G_\mu$. Квазиконформный гомеоморфизм (кв.г.) $f_{\widehat{\mu}} : \Omega \to \Omega_\mu$ накрывает кв.г. $f_\mu : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_\mu$. Для $\mu, \nu \in \mathbb{B}_{\mathfrak{R}}$ будем говорить, что $\widehat{\mu}$ и $\widehat{\nu}$ эквивалентны ($\widehat{\mu} \underset{\mathbf{P}}{\sim} \widehat{\nu}$), если $G_\mu = G_\nu$ (следовательно, и $\Omega_\mu = \Omega_\nu$, $\mathfrak{R}_\mu = \mathfrak{R}_\nu$),

$$f_\mu(p_j) = f_\nu(p_j), \quad j = 1, \dots, N, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} f_\mu^{-1} \circ f_\nu \quad &\text{гомотопно тождественному} \\ &\text{отображению на} \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \mathbf{P}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Класс эквивалентности $[\mu]_{\mathbf{P}}$ по этому отношению определяет точку x в пространстве Тейхмюллера $T_{\mathfrak{R}'}$. Исходной точке x_0 соответствует класс $[0]_{\mathbf{P}}$.

Для $\mu \in [\mu]_{\mathbf{P}}$ положим

$$\begin{gathered} \mathbf{P}_\mu = \{f_\mu(p_j),\ p_j \in \mathbf{P}\}, \quad \mathcal{H}_{j,\mu} = \{f_\mu(\gamma) : \gamma \in \mathcal{H}_j\}, \\ \mathcal{H}_\mu = \{\mathcal{H}_{j,\mu}\}_{j=1}^n, \quad j = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Если $\nu \underset{\mathbf{P}}{\sim} \mu$, то в силу (1.2) $\mathbf{P}_\mu = \mathbf{P}_\nu$, а в силу (1.3) $f_\mu(\gamma)$ и $f_\nu(\gamma)$ гомотопны на $\mathfrak{R}'_\mu$ $(= \mathfrak{R}'_\nu)$. Поэтому мы будем использовать обозначения $\mathbf{P}_x$, $\mathcal{H}_x$, $\mathfrak{R}_x$.

Задание множества точек $\mathbf{P}_x$, семейства гомотопических классов кривых $\mathcal{H}_x$ и системы весов $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ определяет задачу I на поверхности $\mathfrak{R}_x$.

По теореме Дженкинса [1] существует единственный ассоциированный к.д. $Q(x)$ на $\mathfrak{R}_x$ и экстремальное значение $\mathcal{M}^*(x)$ функционала $\mathcal{M}$ указанной задачи.

1.2. Перейдем к задаче II. В случае задачи II кроме естественного переноса исходных данных на поверхность $\mathfrak{R}_\mu$, определенного в п. 1.1, нужно еще выбрать фиксированные локальные параметры в окрестностях точек $\widehat{p}_j = f_\mu(p_j)$, $i = 1, \dots, N$, а также, если $\mathbf{B} \neq \varnothing$, то нужно выбрать исходную систему двуугольников $\mathring{\mathbf{D}}_\mu^{(3)}$. И то и другое должно быть сделано с учетом выбора локальных параметров и исходной системы двуугольников $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$ на поверхности $\mathfrak{R}$. Нам потребуется

Лемма А. *Пусть f_μ – гомеоморфное решение уравнения Бельтрами на $\overline{\mathbb{C}}$ с коэффициентом $\mu(z)$, $\|\mu\|_\infty = \kappa < 1$, с нормировкой $f_\mu(0) = 0$, f_μ $(\overline{\mathbb{C}}) = 1$, $f_\mu(\infty) = \infty$, $\mathbf{P} = \{z_1, \dots, z_N\} \subset \mathbb{C}$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется гомеоморфизм $\overset{\circ}{f}$, удовлетворяющий следующим условиям:*

$$\overset{\circ}{f} \ \textit{регулярен в} \ \ \Delta_\varepsilon(x_k), \quad \overset{\circ}{f}(z_k) = f(z_k), \quad \overset{\circ}{f}{}'(z_k) = 1, \quad \overset{\circ}{f}(z) = f(z)$$

$$\textit{для} \quad z \notin \bigcup_{k=1}^{N} \Delta_{3\varepsilon}(z_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad \textit{и} \quad \|\overset{\circ}{\mu}\|_\infty \leqslant c\kappa, \tag{1.5}$$

где $\overset{\circ}{\mu}(z) = \overset{\circ}{f}{}'_{\overline{z}} \setminus \overset{\circ}{f}{}'_z$, c – константа, не зависящая от f_μ.

Доказательство. а) Докажем, что утверждение леммы А справедливо для $N = 1$. Отсюда по индукции следует его справедливость при любом N. Везде далее через c обозначаются константы, не зависящие от f_μ. Пусть $\varepsilon > 0$, f_ε – гомеоморфное решение у.Б. на $\overline{\mathbb{C}}$ с коэффициентом

$$\mu_\varepsilon(z) = \begin{cases} \mu(z), & |z - z_1| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \varepsilon < |z - z_1| \leqslant 2\varepsilon; \\ \overline{\mu(z^*)} \cdot \dfrac{(z - z_1)^2}{\overline{(z - z_1)}^{\,2}}, & |z - z_1| \geqslant 2\varepsilon, \end{cases}$$

где

$$z^* - z_1 = 4\varepsilon^2 / (\overline{z - z_1}),$$

и с нормировкой

$$f_\varepsilon(z_1) = z_1, \quad f_\varepsilon(z_1 + 2\varepsilon) = z_1 + 2\varepsilon, \quad f_\varepsilon(\infty) = \infty.$$

Тогда кв.г. $f_\varepsilon(z)$ регулярен в кольце $\varepsilon < |z - z_1| < 4\varepsilon$ и отображает окружность $|z - z_1| = 2\varepsilon$ на себя. Отсюда, в частности, следует, что

$$|f'_\varepsilon(z) - 1| \leqslant c\kappa, \quad |f_\varepsilon(z) - z| \leqslant c\kappa \quad \text{для} \quad |z - z_1| = 2\varepsilon. \tag{1.6}$$

Построим кв.г. $\widetilde{f}_\varepsilon$, удовлетворяющий условиям:

$$\widetilde{f}_\varepsilon(z) = f_\varepsilon(z) \quad \text{для} \quad |z - z_1| \leqslant \varepsilon,$$
$$\widetilde{f}_\varepsilon(z) = z \quad \text{для} \quad |z - z_1| \geqslant 3\varepsilon, \qquad \|\widetilde{\mu}_\varepsilon\|_\infty \leqslant c\kappa,$$

где
$$\widetilde{\mu}_\varepsilon = \left(\widetilde{f}_\varepsilon\right)'_{\overline{z}} / \left(\widetilde{f}_\varepsilon\right)'_z .$$

Тогда для $F(z) = f_\mu \circ \widetilde{f}_\varepsilon^{-1}$ выполнены все условия леммы A, кроме одного: $F'(z_1) \neq 1$. Но из регулярности F в окрестности z_1 и условия нормировки следует:

$$|F'(z_1) - 1| \leqslant c\kappa. \tag{1.7}$$

Положим
$$a = F'(z_1), \quad \overset{\circ}{f}(z) = F \circ \Psi(z - z_1),$$

где
$$\Psi(w) = \begin{cases} a^{-1} w \quad \text{для} \quad |w| \leqslant \varepsilon; \\ a^{\delta(w)}\, w, \quad \text{для} \quad \delta(w) = \Big(\dfrac{|w|^2}{\varepsilon^2} - 9\Big)\Big/8, \quad \text{для} \quad \varepsilon < |w| \leqslant 3\varepsilon; \\ w \quad \text{для} \quad |w| > 3\varepsilon. \end{cases}$$

Прямой подсчет показывает, что

$$\mu_\Psi(w) = \Psi'_{\overline{w}} / \Psi'_w = \frac{w^2}{8\varepsilon^2} \frac{\ln a}{1 + \frac{|w|^2}{8\varepsilon^2} \ln a} \quad \text{для} \quad \varepsilon < |w| \leqslant 3\varepsilon,$$

и по (1.7) имеем $\|\mu_\Psi\|_\infty \leqslant c\kappa$, что и требуется.

в) Построим $\widetilde{f}_\varepsilon$. Для $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $z = re^{i\varphi}$, $2\varepsilon \leqslant r \leqslant 3\varepsilon$, положим

$$\gamma(\varphi) = \arg f_\varepsilon\left(2\varepsilon e^{i\varphi}\right), \quad H(z) = r \exp \frac{i}{\varepsilon}\left((3\varepsilon - r)\gamma(\varphi) + (r - 2\varepsilon)\varphi\right).$$

Очевидно, $H(z) = f_\varepsilon(z)$ для $|z| = 2\varepsilon$, $H(z) = z$ для $|z| = 3\varepsilon$. При этом
$$\mu_H(z) = H'_{\overline{z}}/H'_z = e^{2i\varphi} \frac{r\frac{\partial}{\partial r}H(z) + i\frac{\partial}{\partial\varphi}H(z)}{r\frac{\partial}{\partial r}H(z) - i\frac{\partial}{\partial\varphi}H(z)} =$$
$$= e^{2i\varphi} \frac{i(\varphi - \gamma(\varphi)) + (3\varepsilon - r)(1 - \gamma'(\varphi))}{1 + \varepsilon + i(\varphi - \gamma(\varphi)) + (3\varepsilon - r)(\gamma'(r) - 1)}.$$

Для $|z| = 2\varepsilon$ имеем

$$|\gamma'(\varphi) - 1| = \left|\frac{rf'_\varepsilon(z)}{f_\varepsilon(z)} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}\big|f_\varepsilon(z) - z\big| + \big|f'_\varepsilon(z) - 1\big|,$$

$$\left|e^{i(\gamma(\varphi)-\varphi)}-1\right|=\frac{1}{2\varepsilon}\left|f(z)-z\right|,$$

в силу (1.6) отсюда получаем $|\gamma'(\varphi)-1|\leqslant c\kappa$, $|\gamma(\varphi)-\varphi|\leqslant c\kappa$, следовательно, $\|\mu_H\|_\infty\leqslant c\kappa$. Положим

$$\widetilde{f}_\varepsilon(z)=\begin{cases} f_\varepsilon(z) & \text{для} \quad |z-z_1|\leqslant 2\varepsilon;\\ H(z) & \text{для} \quad 2\varepsilon<|z-z_1|\leqslant 3\varepsilon;\\ z & \text{для} \quad |z-z_1|\geqslant 3\varepsilon. \end{cases}$$

Легко проверить, что построенный таким образом кв.г. $\widetilde{f}_\varepsilon$ удовлетворяет всем перечисленным выше условиям, что завершает доказательство леммы A.

С помощью леммы A в §1 мы распространяем задачу II, первоначально рассматриваемую на одной римановой поверхности $\mathfrak{R}$, на пространство $T_{\mathfrak{R}'}$. При этом случаи $g=0$, $g=1$ и $g\geqslant 2$ для удобства рассматриваются отдельно.

1.3. Случай $g=0$ (т.е. $\mathfrak{R}=\overline{\mathbb{C}}$). Пусть $\mathbf{P}=\{z_1,\dots,z_{N+3}\}$ – множество отмеченных точек на $\overline{\mathbb{C}}$, $N\geqslant 1$. Положим $z_{N+1}=0$, $z_{N+2}=1$, $z_{N+3}=\infty$, и обозначим $\overline{\mathbb{C}}'=\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbf{P}$. Пусть $x\in T_{\mathbb{C}'}$ и точка x соответствует классу $[\mu]_{\mathbf{P}}$. Пусть f_μ – гомеоморфное решение у.Б. на $\overline{\mathbb{C}}$ с коэффициентом μ, $\|\mu\|_\infty=\kappa<1$, нормированное условиями $f_\mu(0)=0$, $f_\mu(1)=1$, $f_\mu(\infty)=\infty$. Пусть $\mathring{f}$ – кв.г. леммы A, построенный для f_μ, $\mathring{\mu}=(\mathring{f})'_{\bar z}/(\mathring{f})'_z$. Тогда $\mathring{\mu}\underset{\mathbf{P}}{\sim}\mu$. Определим $\mathring{\mathbf{D}}_x^{(3)}$ как множество $\mathring{f}$-образов двуугольников из $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$. Задание множества точек $\mathbf{P}_x$, семейства гомотопических классов кривых $\mathcal{H}_x$, множеств весов $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{h}$, углов $\boldsymbol{\beta}$ и исходной системы двуугольников $\mathring{\mathbf{D}}_x^{(3)}$ определяет задачу II на $\overline{\mathbb{C}}$.

По теореме 1 в [2], существует единственный кв.д. $Q(x)$ на $\overline{\mathbb{C}}$, ассоциированный с данной задачей, и экстремальное значение $\mathcal{M}^*(x)$ функционала $\mathcal{M}$ этой задачи. Заметим, что для точек x, близких к исходной точке x_0, можно считать, что

$$\mathcal{M}^*(x)=\mathcal{M}^*\left(\widehat{z}_1,\dots,\widehat{z}_N\right),\quad \text{где}\quad \widehat{z}_k=f_\mu(z_k), \tag{1.8}$$

так как, если нормы $\|\mu\|_\infty$ и $\|\nu\|_\infty$ достаточно малы, то условие (1.3) следует из (1.2).

1.4. Случай $g = 1$. Пусть $\mathbf{P} = \{p_1, \ldots, p_{N+1}\}$ – множество отмеченных точек в задаче II, $N \geqslant 1$. Пусть G – группа сдвигов плоскости $\mathbb{C}$, порождаемая сдвигами

$$z \to z+1, \quad z \to z+\tau, \quad \operatorname{Im}\tau > 0,$$

и пусть $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/G = \mathfrak{R}$ – голоморфное накрытие. Пусть $\omega \subset \mathbb{C}$ – фундаментальная область группы G, $0 \in \omega$, $z_k \in \omega : \pi(z_k) = p_k$, $k = 1, \ldots, N$, $\pi(0) = p_{N+1}$. В качестве параметра на $\mathfrak{R}$ выберем π^{-1} со значениями в ω.

Пусть точка $x \in T_{\mathfrak{R}'}$ соответствует классу $[\mu]_{\mathbf{P}}$,

$$f_{\widehat{\mu}} : \omega \to \widehat{\omega}, \quad \widehat{p}_j = f_\mu(p_j) \in \mathfrak{R}_\mu, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1.9}$$

Будем считать, что норма $\kappa = \|\mu\|_\infty$ настолько мала, что $\widehat{z}_j = f_{\widehat{\mu}}(z_j) \in \omega$. Если $\pi_\mu : \mathbb{C}/G_\mu = \mathfrak{R}_\mu$ – голоморфное накрытие, то в качестве параметра на $\mathfrak{R}_\mu$ выберем ветвь π_μ^{-1} со значениями в ω. По лемме A, для $f_{\widehat{\mu}}$ найдется кв.г. $\mathring{f} : \omega \to \widehat{\omega}$, удовлетворяющий условиям (1.5). Продолжим кв.г. $\mathring{f} : \omega \to \widehat{\omega}$ до гомеоморфизма римановой сферы, полагая

$$\mathring{f}(z+g) = \mathring{f}(z) + g_\mu, \quad g_\mu \in G_\mu,$$

и пусть $\widehat{\mathring{\mu}}$ – соответствующий коэффициент Бельтрами. Очевидно, $\widehat{\mathring{\mu}} \underset{\mathbf{P}}{\sim} \widehat{\mu}$. $\mathring{f}$ накрывает кв.г. $f(\mathring{\mu}) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_\mu$. Определим систему двуугольников $\mathring{\mathbf{D}}_x^{(3)}$ как набор $f(\mathring{\mu})$-образов двуугольников из $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$. Как и в п. 1.3, задание систем $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{H}_x$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\beta}$ и исходной системы $\mathring{\mathbf{D}}_x^{(3)}$, а также описанный выше выбор локальных параметров в точках $\widehat{p}_j$ распространяет задачу II на поверхность $\mathfrak{R}_x$. Таким образом, определены экстремальное значение $\mathcal{M}^*(x)$ функционала $\mathcal{M}$ этой задачи и ассоциированный к.д. $Q(x)$ на $\mathfrak{R}_x$.

1.5. Случай $g \geqslant 2$. Пусть $\mathbf{P} = \{p_1, \ldots, p_N\}$ – множество отмеченных точек на $\mathfrak{R}$. Пусть $\omega \subset \mathbb{H}$ – фундаментальная область группы G, $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/G = \mathfrak{R}$ – голоморфное накрытие, $z_j \in \omega$ для $j = 1, \ldots, N$ и $\pi(z_j) = p_j$. В качестве параметра для точки $p \in \mathfrak{R}$ выберем ветвь π^{-1} со значениями в ω. Чтобы подчеркнуть зависимость функционала в задаче II от выбора области ω, будем использовать обозначение $\mathcal{M}_\omega$ (соответственно, $\mathcal{M}_\omega^*$ для экстремального значения указанного функционала). Пусть $x \in T_{\mathfrak{R}'}$ соответствует классу $[\mu]_{\mathbf{P}}$ и выполнено условие (1.9). Как и в п. 1.4, будем считать, что $\widehat{z}_j = f_{\widehat{\mu}}(z_j) \in \omega$. Если $\pi_\mu : \Omega_\mu \to \Omega_\mu / G_\mu = \mathfrak{R}_\mu$ – голоморфное накрытие, то в качестве параметра для точек $\widehat{p} \in \mathfrak{R}_\mu$ выберем ветвь π_μ^{-1} со значениями в $\widehat{\omega}$. По лемме A, для $f_{\widehat{\mu}}$ существует кв.г. $\mathring{f}$, удовлетворяющий условиям (1.5). Продолжим гомеоморфизм $\mathring{f} : \omega \to \widehat{\omega}$ до гомеоморфизма $\widehat{\mathring{f}} : \mathbb{H} \to \Omega_\mu$, полагая

$$\widehat{\mathring{f}}(g(z)) = g_\mu \circ \mathring{f}(z), \quad g_\mu \in G_\mu,$$

и пусть $\widehat{\mathring{\mu}}$ – соответствующий коэффициент Бельтрами. Тогда $\widehat{\mathring{\mu}} \underset{\mathbf{P}}{\sim} \widehat{\mu}$. $\widehat{\mathring{f}}$ накрывает кв.г. $f(\mathring{\mu}) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_\mu$. Определим $\mathring{\mathbf{D}}_x^{(3)}$, как набор $f(\mathring{\mu})$-образов двуугольников из $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$. Задание систем $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{H}_x$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\beta}$, исходной системы двуугольников $\mathring{\mathbf{D}}_x^{(3)}$, и описанный выше выбор параметров в точках $\widehat{p}_j$ распространяет задачу II на $\mathfrak{R}_x$. Значит, определены функция $\mathcal{M}_\omega^*(x)$ и ассоциированный к.д. $Q(x)$ на $\mathfrak{R}_x$.

§2. Формулы дифференцирования для функции $\mathcal{M}^*(x)$ в случаях $g = 0$, $g = 1$ и $g \geqslant 2$

2.1. Основой для вывода полученных ниже формул служит

Лемма B. *Пусть $f_t : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_t$, $0 \leqslant t$, – квазиконформные гомеоморфизмы конечной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}_t$, μ_t – дифференциал Бельтрами на $\mathfrak{R}$, соответствующий f_t,*

$$\mu_t(z) = t\mu(z) + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Пусть $p_k(t) = f_t(p_k)$ для $p_k \in \mathbf{P}$, z_k – локальный параметр в окрестности точки $p_k \in \mathring{\mathbf{B}} \cup \mathbf{B}$, $z_k(p_k) = u_k$; $z_k(t)$ – локальный параметр в окрестности точки $p_k(t) \in \mathfrak{R}_t$, причем в терминах параметров z_k и $z_k(t)$

$$f_t'(u_k) = 1. \tag{2.1}$$

Пусть $x(t)$ – точка в пространстве $T_{\mathfrak{R}'}$, соответствующая классу

$[\mu_t]_{\mathbf{P}}$, $x(0)$ – *исходная точка. Тогда*

$$\mathcal{M}^*(x(t)) - \mathcal{M}^*(x(0)) = -t \cdot 2\,\mathrm{Re} \iint\limits_{\mathfrak{R}} \mu(z)Q(z)d\sigma_z + o(t), \qquad (2.2)$$

где Q – *квадратичный дифференциал, ассоциированный с задачей* II *на* $\mathfrak{R}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{D}^*$ – экстремальная система областей в задаче II на $\mathfrak{R}$. Обозначим через $\mathbf{D}'$ систему f_t-образов областей из $\mathbf{D}^*$. Используя оценки искажения модулей и приведенных модулей рассматриваемых областей при отображении f_t [2, формула (38)], получаем неравенства

$$2\,\mathrm{Re} \iint\limits_{D_j^{*(1)}} \mu_t(z)Q(z)d\sigma_z \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_j^2 M(D_j^{*(1)}) - \alpha_j^2 M(D_j'^{(1)}) + O(t^2), \quad j = 1, \dots, n_1;$$

$$2\,\mathrm{Re} \iint\limits_{D_j^{*(2)}} \mu_t(z)Q(z)d\sigma_z \geqslant \alpha_{n_1+j}^2 M\left(D_j^{*(2)}, \mathring{b}_j\right) -$$

$$-\alpha_{n_1+j}^2 M\left(D_j'^{(1)}, \mathring{b}_j(t)\right) + O(t^2), \quad j = 1, \dots, m; \qquad (2.3)$$

$$2\,\mathrm{Re} \iint\limits_{D_j^{*(3)}} \mu_t(z)Q(z)d\sigma_z \geqslant -h_j^2 M\left(D_j^{*(3)}, b_{k'(j)}, b_{k''(j)}\right) +$$

$$+h_j^2 M\left(D_j'^{(3)}, b_{k'(j)}(t), b_{k''(j)}(t)\right) + O(t^2), \quad j = 1, \dots, n_3.$$

Пусть $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$ – исходная система двуугольников в задаче II на $\mathfrak{R}$. Напомним, что по нашему определению система $\mathring{\mathbf{D}}'^{(3)}$, состоящая из f_t-образов двуугольников из $\mathring{\mathbf{D}}^{(3)}$, выбирается в качестве исходной системы в задаче II на $\mathfrak{R}_t$, что соответствует условию (2.1).

По определению приведенного модуля двуугольника D относительно двуугольника $\mathring{D}$ (см. [2]), имеем:

$$M\left(D_j^{*(3)}, b_{k'(j)}, b_{k''(j)}; \mathring{\mathbf{D}}_j^{(3)}\right) = M\left(D_j^{*(3)}, b_{k'(j)}, b_{k''(j)}\right) +$$

$$+\frac{1}{\psi_{k'}}\omega_{k'}\left(\overset{\circ}{D}{}_j^{(3)};D_j^{*(3)}\right)\sin 2\beta_{k'}+\frac{1}{\psi_{k''}}\omega_{k''}\left(\overset{\circ}{D}{}_j^{(3)};D_j^{*(3)}\right)\sin 2\beta_{k''}, \quad (2.4)$$

где $\omega_{k'}(\overset{\circ}{D}{}_j^{(3)};D_j^{*(3)})$ и $\omega_{k''}(\overset{\circ}{D}{}_j^{(3)};D_j^{*(3)})$ – углы поворота при допустимой гомотопии $\overset{\circ}{D}{}_j^{(3)}$ в двуугольник $D_j^{*(3)}$ соответственно в вершинах $b_{k'}$ и $b_{k''}$, а $\psi_{k'}$ и $\psi_{k''}$ – внутренние угловые характеристики этих двуугольников. Точно так же

$$M\left(D_j'^{(3)},b_{k'(j)},b_{k''(j)};\overset{\circ}{\mathbf{D}}{}_j'^{(3)}\right)=M\left(D_j'^{(3)},b_{k'(j)},b_{k''(j)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\psi_{k'}}\omega_{k'}\left(\overset{\circ}{D}{}_j'^{(3)};D_j'^{(3)}\right)\sin 2\beta_{k'}+\frac{1}{\psi_{k''}}\omega_{k''}\left(\overset{\circ}{D}{}_j^{(3)};D_j'^{(3)}\right)\sin 2\beta_{k''}. \quad (2.5)$$

В силу (2.1), соответствующие углы поворота в (2.4) и (2.5) равны. Поэтому последнее неравенство в (2.3) можно заменить на

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{D_j^{*(3)}}\mu_t(z)Q(z)d\sigma_z\geqslant -h_j^2M\left(D_j^{*(3)},b_{k'(j)},b_{k''(j)};\overset{\circ}{D}{}_j^{(3)}\right)+$$

$$+h_j^2M\left(D_j'^{(3)},b_{k'(j)}(t),b_{k''(j)}(t);D_j'^{(3)}\right)+O(t^2). \quad (2.6)$$

Теперь из (2.4), (2.6) и определения величины $\mathcal{M}^*(x(t))$ получаем

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathfrak{R}}\mu(z)Q(z)d\sigma_z\geqslant \mathcal{M}^*(x(0))-\mathcal{M}^*(x(t))+o(t). \quad (2.7)$$

Применяя те же рассуждения к отображению f_t^{-1}, получаем симметрично

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathfrak{R}}\mu_{f^{-1}}(w)Q(w)d\sigma_w\geqslant \mathcal{M}^*(x(t))-\mathcal{M}^*(x(0))+o(t). \quad (2.8)$$

Учитывая, что для $w=f_t(z)$

$$\mu_t^{-1}(w)=-t\mu(z)\frac{(f_t)'_z}{\overline{(f_t)'_z}},\qquad d\sigma_w=\left|(f_t)'_z\right|^2d\sigma_z+O(t^2),$$

имеем

$$2\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathfrak{R}}\mu_{f_t^{-1}}(w)Q(w)d\sigma_w=-2t\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathfrak{R}}\mu(z)Q_t(f_t(z))\cdot(f_t)_z'^2\,d\sigma_z+O(t^2)=$$

$$= -2t\,\mathrm{Re}\iint\limits_{\mathfrak{R}} \mu(z)Q(z)d\sigma_z + o(t). \tag{2.9}$$

Используя (2.9), из (2.7) и (2.8) получаем утверждение леммы B.

Рассматривая распространение задачи II на случай пространства $T_{\mathfrak{R}'}$, мы имеем дело с тремя существенно различными случаями.

2.2. Случай $g = 0$. Пусть $\mathcal{M}^*(u_1, \dots, u_N)$ – функция, определенная в окрестности точки $(z_1, \dots, z_N)$ в (1.8). Известна следующая

Теорема 1 [5]. *В точке* $(z_z, \dots, z_N)$

$$\frac{\partial}{\partial u_k}\mathcal{M}^*(u_1, \dots, u_N) = \pi\lambda_k,$$

где

$$Q(z) = \frac{A_k}{(z-z_k)^2} + \frac{\lambda_k}{z-z_k} + \dots \tag{2.10}$$

– разложение ассоциированного квадратичного дифференциала в точке $z = z_k$.

Доказательство. Приведем здесь доказательство, несколько отличающееся от данного в [5]. Положим

$$K(u,z) = \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u} - \frac{z}{u(u-1)} = \frac{z(z-1)}{u(u-1)(u-z)}. \tag{2.11}$$

Тогда

$$K'_z(u,z) = \frac{1}{(u-z)^2} - \frac{1}{u(u-1)} = \Omega(u,z). \tag{2.12}$$

Далее используем обозначения п. 1.3. Как известно [4],

$$f_{\mathring{\mu}}(z) - z = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)K(u,z)d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|^2_\infty\right). \tag{2.13}$$

Из условия (1.5) получаем также

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)\Omega(u,z_j)d\sigma_u = O\left(\|\mathring{\mu}\|^2_\infty\right), \quad j = 1, \dots, N,$$

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)\Omega(s,0)d\sigma_u = O\left(\|\mathring{\mu}\|^2_\infty\right),$$

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)\Omega(u.1)d\sigma_u = O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right), \tag{2.14}$$

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)\frac{d\sigma_u}{u(u-1)} = O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right).$$

Из определения (2.10) коэффициентов разложения Q в точках $0, 1, \infty$ и z_j, $j = 1, \ldots, N$, и определения функций $K(u, z)$, $\Omega(u, z)$ следует

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{N} (A_j\Omega(u, z_j) + \lambda_j K(u, z_j)) +$$

$$+A_0\Omega(u, 0) + A_1\Omega(u, 1) + A_\infty \frac{1}{u(u-1)}. \tag{2.15}$$

Отсюда и из (2.14) получаем

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)Q(u)d\sigma_u = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)K(u, z_j)d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right). \tag{2.16}$$

В силу (2.13), это дает

$$\mathcal{M}^*(\widehat{z}_1, \ldots, \widehat{z}_N) - \mathcal{M}^*(z_1, \ldots, z_N) =$$

$$= -2\,\mathrm{Re} \iint\limits_{\mathbb{C}} \mathring{\mu}(u)Q(u)d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right) =$$

$$= +2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \pi(\widehat{z}_j - z_j) + o\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right).$$

Поскольку нормы $\|\mu\|_\infty$ и $\|\mathring{\mu}\|_\infty$ имеют один и тот же порядок малости, то теорема 1 доказана.

2.3. Случай $g = 1$. Используем обозначения из п. 1.4. Пусть точка $x \in T_{\mathfrak{R}'}$ соответствует классу $[\mu]_{\mathbf{P}}$. Имеет место

Теорема 2. *Для функции $\mathcal{M}^*(x)$, определенной в п. 3.1, имеем равенство:*

$$\mathcal{M}^*(x) - \mathcal{M}^*(x_0) = 2\,\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{N} \pi\lambda_j(\widehat{z}_j - z_j) +$$

$$+\operatorname{Im}\Big(\Big(\frac{1}{2}B-\Big(\sum_{j=1}^{N}A_j+A_0\Big)\cdot\zeta\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big)\,(\tau(x)-\tau)\Big)+o\,(\|\mu\|_\infty)\,, \quad (2.17)$$

где $\widehat{z}_j=f_{\widehat{\mu}}(z_j)$, $\tau(x)$ *определено равенством*

$$f_{\widehat{\mu}}(z+\tau)=f_{\widehat{\mu}}(z)+\tau(x),$$

числа B, A_0, A_j *и* λ_j, $j=1,\ldots,N$, *определяются из представления ассоциированного квадратичного дифференциала* Q:

$$\widehat{Q}(u)=\sum_{j=1}^{N}\Big(A_j\mathfrak{P}(u-z_j)+\lambda_j\widehat{\mathcal{K}}_{z_j}(u)\Big)+A_0\mathfrak{P}(u)+B, \qquad (2.18)$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_z(u)=\zeta(u-z)-\zeta(u)+z\cdot\zeta\left(\frac{1}{2}\right), \qquad (2.19)$$

$\zeta(u)$ *и* $\mathfrak{P}(u)$ – *соответственно дзета-функция и функция Вейерштрасса, построенные по периодам* 1, τ.

Доказательство. Используем определение функций $K(u,z)$ и $\Omega(u,z)$ в (2.11), (2.12) и положим

$$\widehat{\mathcal{K}}_z(u)=\sum_{g\in G}K(u+g,z)=\zeta(u-z)-\zeta(u)-z\,(\zeta(u-1)-\zeta(u))=$$

$$=\zeta(u-z)-\zeta(u)+z\cdot 2\zeta\left(\frac{1}{2}\right),$$

поскольку

$$\zeta(u+1)-\zeta(u)=\eta_1=2\zeta\left(\frac{1}{2}\right).$$

Тогда

$$\widehat{\mathcal{K}}_z(u+g)=\widehat{\mathcal{K}}_z(u)\ \text{ для }\ g\in G,\quad \widehat{\mathcal{K}}_{z+\tau}(u)=\widehat{\mathcal{K}}_z(u)+2\pi i \qquad (2.20)$$

и

$$\sum_{g\in G}\Omega(u+g,z)=\mathfrak{P}(u-z)+2\zeta\left(\frac{1}{2}\right). \qquad (2.21)$$

Второе равенство в (2.20) следует из известных соотношений

$$\zeta(u+\tau)-\zeta(u)=\eta_2=2\zeta\left(\frac{\tau}{2}\right)\quad\text{и}\quad \eta_1\tau-\eta_2=2\pi i.$$

По формуле (2.13) в случае $g = 1$ имеем:

$$f_{\hat{\mathring{\mu}}}(z) - z = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \hat{\mathring{\mu}}(u) K(u, z) d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\omega} \hat{\mathring{\mu}}(u) \widehat{\mathcal{K}}_z(u) d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right). \qquad (2.22)$$

Условие (1.5) для точек $p_j \in \mathbf{B}^{(0)} \cup \mathbf{B}$ тогда дает

$$\iint\limits_{\omega} \hat{\mathring{\mu}}(u) \mathfrak{P}(u - z_j) d\sigma_u + \eta_1 \iint\limits_{\omega} \hat{\mathring{\mu}}(u) d\sigma_u = O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right), \qquad (2.23)$$

а также

$$\iint\limits_{\omega} \hat{\mathring{\mu}}(u) \mathfrak{P}(u) d\sigma_u + \eta_1 \iint\limits_{\omega} \hat{\mathring{\mu}}(u) d\sigma_u = O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right), \qquad (2.24)$$

если в точке $z = 0$ к.д. $\widehat{Q}$ имеет двойной полюс. Для к.д. $\widehat{Q}$ на $\mathbb{C}$ имеем представление (2.18), где A_j и λ_j – коэффициенты лорановского разложения $\widehat{Q}$ в точке z_j. Из (2.17) и (2.20) имеем

$$f_{\widehat{\mu}}(z) + \tau(x) = f_{\widehat{\mu}}(z + \tau) = z + \tau - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) \widehat{\mathcal{K}}_{z+\tau} d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right) =$$

$$= z - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) \widehat{\mathcal{K}}_z d\sigma_u + \tau - 2i \cdot \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right) = \qquad (2.25)$$

$$= f_{\widehat{\mu}}(z) + \tau - 2i \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right),$$

откуда

$$\tau(x) - \tau = -2i \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right). \qquad (2.26)$$

Так как $\mathring{\mu} \underset{\mathbf{P}}{\sim} \mu$, то аналогичным образом получаем

$$\tau(x) - \tau = -2i \iint\limits_{\omega} \hat{\mathring{\mu}}(u) d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right).$$

Отсюда

$$\iint\limits_{\omega} \widehat{\mathring{\mu}}(u) d\sigma_u = \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) d\sigma_u + O\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty^2\right), \tag{2.27}$$

поскольку, по лемме A, $\|\widehat{\mathring{\mu}}\|_\infty \leqslant c\|\mu\|_\infty$.

Теперь по лемме B, используя последовательно (2.23), (2.22) и (2.26), находим

$$\mathcal{M}^*(x) - \mathcal{M}^*(x_0) = -2\operatorname{Re} \iint\limits_{\omega} \widehat{\mathring{\mu}}(u) \widehat{Q}(u) d\sigma_u + o\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty\right) =$$

$$= 2\operatorname{Re}\Big(-\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \iint\limits_{\omega} \widehat{\mathring{\mu}}(u) \widehat{\mathcal{K}}_{z_j}(u) d\sigma_u + \Big(\Big(\sum_{j=1}^{N} A_j + A_0\Big)\eta_1 - B\Big) \times$$

$$\times \iint\limits_{\omega} \mathring{\mu}(u) d\sigma_u\Big) + o\left(\|\mathring{\mu}\|_\infty\right) = 2\operatorname{Re}\Big(+\sum_{j=1}^{N} \pi\lambda_j \left(f_{\widehat{\mathring{\mu}}}(z_j) - z_j\right) -$$

$$-\Big(\Big(\sum_{j=1}^{N} A_j + A_0\Big)\eta_1 - B\Big) \frac{\tau(x) - \tau}{2i}\Big) + \left(\|\mathring{\mu}\|_\infty\right),$$

что доказывает теорему 2.

2.4. Случай $g \geqslant 2$. Используем обозначения п. 1.4. Пусть для $u, z \in \mathbb{H}$

$$\widehat{\mathcal{K}}_z(u) = \sum_{g \in G} K(g(u), z) \cdot g'^2(u) \in \mathbb{Q}_1(G),$$

$$\widehat{\Omega}_z(u) = \sum_{g \in G} \Omega(g(u), z) \cdot g'^2(u) \in \mathbb{Q}_2(G).$$

Проколотую поверхность $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus \mathbf{P}$ мы можем также представить, как фактор $\pi_{\mathbf{P}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/G_{\mathbf{P}} = \mathfrak{R}'$, где $G_{\mathbf{P}}$ – дискретная группа дробно-линейных преобразований, имеющая среди своих образующих N параболических образующих, соответствующих проколам $\mathfrak{R}$. Положим

$$\widehat{\mathcal{K}}_z^{\mathbf{P}}(u) = \sum_{g \in G} K(g(u), z) \cdot g'^2(u) \in \mathbb{Q}(G_{\mathbf{P}}).$$

Из формулы (2.13) в случае $g \geqslant 2$ получаем

$$f_{\overset{\circ}{\mu}}(z) - x = z - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{H}} \widehat{\mu}(u) K(u,z) d\sigma_u + O\left(\|\overset{\circ}{\mu}\|_\infty^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) \widehat{\mathcal{K}}_z(u) d\sigma_u + O\left(\|\overset{\circ}{\mu}\|_\infty^2\right). \tag{2.28}$$

Условие (1.5) дает

$$\iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) \widehat{\Omega}_{z_j} d\sigma_u = O\left(\|\overset{\circ}{\mu}\|_\infty^2\right). \tag{2.29}$$

Для ассоциированного к.д. Q имеем:

$$\widehat{Q} = \sum_{j=1}^{N} \left(A_j \widehat{\Omega}_{z_j} + \lambda_j^{\omega} \widehat{\mathcal{K}}_{z_j}\right) + \widehat{B}_\omega, \tag{2.30}$$

где $\widehat{B}_\omega \in \mathbb{Q}(G)$ и при $j = 1, \ldots, N$ коэффициенты A_j, λ_j определены разложением

$$\widehat{Q}(u) = \frac{A_j}{(u - z_j)^2} + \frac{\lambda_j}{u - z_j} + \cdots$$

в окрестности точки z_j.

Поскольку $\overset{\circ}{\mu} \underset{\mathbf{P}}{\sim} \mu$, то нетрудно видеть, что

$$\iint\limits_{\omega} \widehat{\overset{\circ}{\mu}}(u) \widehat{B}_\omega(u) d\sigma_u - \iint\limits_{\omega} \widehat{\mu}(u) \widehat{B}_\omega(u) d\sigma_u = o(\|\mu\|_\infty). \tag{2.31}$$

Теперь по лемме В, последовательно применяя (2.30), (2.29) и (2.28), получаем

$$\mathcal{M}_\omega^*(x) - \mathcal{M}_\omega^*(x_0) = -2\,\mathrm{Re} \iint\limits_{\omega} \widehat{\overset{\circ}{\mu}}(u) \widehat{Q}(u) d\sigma_u + o\left(\|\overset{\circ}{\mu}\|_\infty\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\Big(-\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{\omega} \iint\limits_{\omega} \widehat{\overset{\circ}{\mu}}(u) \widehat{\mathcal{K}}_{z_j}(u) d\sigma_u - \iint\limits_{\omega} \widehat{\overset{\circ}{\mu}}(u) \widehat{B}_\omega(u) d\sigma_u\Big) + o\left(\|\overset{\circ}{\mu}\|_\infty\right) =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{N} \pi \lambda_j^{\omega} (z_j - z_j) - \iint\limits_{\omega} \widehat{\overset{\circ}{\mu}}(u) \widehat{B}_\omega(u) d\sigma_u\Big) + o\left(\|\mu\|_\infty\right), \tag{2.32}$$

где $\widehat{z}_j = f_{\widehat{\mu}}(z_j)$, $j = 1, \dots, N$.

На $T_{\mathfrak{R}'}$ естественно использовать координаты, согласованные с комплексной структурой на этом пространстве. Пусть $\widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_s$ – комплексный базис в пространстве $\mathbb{Q}(G)$, $s = 3g - 3$. Пусть $q_1, \dots, q_s$ – соответствующие к.д. из $\mathbb{Q}_{\mathfrak{R}}$ и $\widehat{q}_1^{\mathbf{P}}, \widehat{q}_2^{\mathbf{P}}, \dots, \widehat{g}_s^{\mathbf{P}}$ – поднятия этих дифференциалов на $\mathbb{H}$, соответствующие накрытию $\pi_{\mathbf{P}}: \mathbb{H} \to \mathbb{H}/G_{\mathbf{P}} = \mathfrak{R}'$. Тогда набор $\{q_1^{\mathbf{P}}, \dots, \widehat{g}_s^{\mathbf{P}}, \widehat{\mathcal{K}}_{z_1}^{\mathbf{P}}, \dots, \widehat{\mathcal{K}}_{z_N}^{\mathbf{P}}\}$ образует комплексный базис в пространстве $\mathbb{Q}(G_{\mathbf{P}})$. Пусть $\{\widehat{\mathbf{n}}_1^{\mathbf{P}}, \dots, \widehat{\mathbf{n}}_s^{\mathbf{P}}, \widehat{\mathbf{m}}_1^{\mathbf{P}}, \dots, \widehat{\mathbf{m}}_N^{\mathbf{P}}\}$ – двойственный базис в пространстве $\mathbb{B}(G_{\mathbf{P}}) \backslash N$, где N – пространство локально-тривиальных дифференциалов Бельтрами относительно $G_{\mathbf{P}}$ (см. [6, §3]), $\{\widehat{n}_1^{\mathbf{P}}, \dots, \widehat{n}_s^{\mathbf{P}}, \widehat{m}_1^{\mathbf{P}}, \dots, \widehat{m}_N^{\mathbf{P}}\}$ – набор представителей своих классов. Двойственность базиса означает, что

$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} n_i(u)\mathcal{K}_{z_j}(u)d\sigma_u = 0, \qquad \iint\limits_{\mathfrak{R}} n_i(u)q_k(u)d\sigma_u = \delta_{i,k},$$
$$\iint\limits_{\mathfrak{R}} m_i(u)q_j(u)d\sigma_u = 0, \qquad \iint\limits_{\mathfrak{R}} m_i(u)\mathcal{K}_{z_l}(u)d\sigma_u = \delta_{j,l},$$
$$1 \leqslant i,\ k \leqslant s, \quad 1 \leqslant j,\ l \leqslant N.$$

Соответствие

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to [\widehat{\mu}]_{\mathbf{P}},$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$, $\widehat{\mu} = u_1\widehat{n}_1 + \ldots + u_s\widehat{n}_s + v_1\widehat{m}_1 + \ldots + v_N\widehat{m}_N$, задает локальные координаты в пространстве $T_{\mathfrak{R}'}$ в окрестности исходной точки, которой соответствует $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (см. [6]). Записав формулу (2.32) в этих координатах, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Для функции $\mathcal{M}_\omega^*(x)$, определенной в п. 1.4, в терминах координат u, v имеем:*

$$\mathcal{M}_\omega^*(u,v) - \mathcal{M}_\omega^*(0,0) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^\omega v_j - \sum_{i=1}^{s} u_i b_i^\omega\right) + o\left(|u| + |v|\right),$$

где

$$\widehat{B}_\omega = \sum_{i=1}^{s} b_i^\omega \widehat{q}_i.$$

§3. Случай максимального числа областей экстремального разбиения

Рассмотрим на компактной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ рода $g \geqslant 0$ задачу I с системой N отмеченных точек $\mathbf{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$. Как известно [5, с. 192], $n = 3g-3+N$ – максимально возможное число областей разбиения в этой задаче. Предположим, что выполнены следующие условия:

1. число невырожденных областей экстремального разбиения $\mathbf{D}^*$ равно $n = 3g - 3 + N$;

2. каждая отмеченная точка $p_j \in \mathbf{P}$ служит простым полюсом ассоциированного к.д.

Комплексному вектору $K = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ сопоставим дифференциал Бельтрами $\mu_K \in \mathbb{B}_{\mathfrak{R}}$, определяемый равенствами

$$\mu_K(u) = \kappa \cdot \frac{|Q(u)|}{Q(u)} \quad \text{для} \quad u \in \mathcal{D}_j^*.$$

Соответствие

$$K \to [\mu_K]_{\mathbf{P}}$$

задает локальные координаты в пространстве $T_{\mathfrak{R}'}$ в окрестности начальной точки x_0.

В этих координатах [7]

$$\mathcal{M}^*(K) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} \frac{1-\kappa_j}{1+\kappa_j} \alpha_j^2 M(\mathcal{D}_j^*), \tag{3.1}$$

$$Q_K(f_K(u)) \cdot (f_K)_u'^2(u) = \frac{Q(u)}{(1+k_j)}, \quad u \in \mathcal{D}_j^*.$$

Из сравнения равенств (3.1) и (2.25) видно, что координаты $(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ и $(u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_N)$ биголоморфно выражаются друг через друга. Как известно [4], при фиксированном $u \in \mathcal{D}_j^*$ $f_K(u)$ и $(f_K(u))_u'$ голоморфно зависят от K. Поэтому справедлива

Теорема 4. *Пусть для задачи I выполнены условия 1 и 2. Тогда $\mathcal{M}^*(u, v)$ – плюригармоническая функция, а ассоциированный квадратичный дифференциал $Q(u, v)$ голоморфно зависит от u и v в окрестности точки $(0, 0)$.*

В частном случае $\mathfrak{R} = \overline{\mathbb{C}}$ и $N = 5$ теорема 4 доказана в [8].

Литература

1. J. A. Jenkins, *On the existence of certain general metrics,* Ann. Math. **66**, No. 3 (1957), 440–453.
2. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействе систем областей различных типов,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
3. Е. Г. Емельянов, *Зависимость функционала в задаче об экстремальном разбиении римановой поверхности от параметров,* ПОМИ Препринт–25/1997, 1–10.
4. С. Л. Крушкаль, Р. Кюнау, *Квазиконформные отображения – новые методы и приложения,* Новосибирск, 1984.
5. F. Gardiner, *Teichmüller theory and quadratic differentials,* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1987.
6. Л. Берс, *Пространства римановы поверхностей,* В кн.: Л. Альфорс, Л. Берс, Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, 80–90, М., 1961.
7. Е. Г. Емельянов, *Экстремальные разбиения римановой поверхности и квазиконформные отображения специального вида,* Зап. научн. семин. ПОМИ **254** (1998), 108–115.
8. А. Ю. Васильев, *Инвариантные метрики и гармонические функционалы на пространстве Тейхмюллера,* Алгебра и анализ **9**, вып. 1 (1997), 49–71.

С.-Петербургский университет
экономики и финансов

Поступило 10 ноября 1999 г.