Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

Д. С. Катаев

О НЕКОТОРЫХ МЕТАПЛЕКТИЧЕСКИХ РЯДАХ ЭЙЗЕНШТЕЙНА

0. Введение

Основной целью данной работы является изучение кубических метаплектических рядов Эйзенштейна на симплектической группе $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, являющихся кубическими метаплектическими формами относительно конгруэнц–подгруппы $\Gamma(\mathfrak{q})$ группы $\mathrm{Sp}_4(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Кубические метаплектические ряды Эйзенштейна были исследованы Н. В. Проскуриным в работах [1, 2], но Н. В. Проскурин исследовал ряды Эйзенштейна, связанные с максимальной параболической подгруппой Зигеля группы $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$. Мы же рассматриваем ряды Эйзенштейна, связанные с подгруппой Якоби симплектической группы и используем т.н. технику "$sl(2)$-троек" (см. [1, 2]) для вычисления коэффициентов Фурье данных рядов.

Работа состоит из четырех параграфов. Первый параграф содержит обозначения, определения и вспомогательное утверждение. Во втором параграфе подробно изучается группа $\Gamma(\mathfrak{q})$ и ее подгруппы. Наиболее важные утверждения этого параграфа собраны в предложении 2.4 и предложении 2.5. В начале третьего параграфа даются необходимые определения, связанные с метаплектическими формами на $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})/\mathrm{Sp}_4$, рядами Эйзенштейна и их коэффициентами Фурье. Далее в теореме 1 формулируется основной результат данной работы. Остаток третьего параграфа посвящен доказательству этой теоремы. В четвертом параграфе изучаются ряды $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,\nu}$, полученные в теореме 1, в частном случае системы мультипликаторов Басса–Милнора–Серра.

1. Предварительные сведения

Симплектическая группа $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ есть группа матриц $\gamma \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00099).

таких, что выполняется соотношение $\gamma\sigma^t\gamma = \sigma$, где

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Каждая матрица $\gamma \in \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ будет записываться в виде $\gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$, где

$$\begin{gathered} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{1.2}$$

являются матрицами размерности 2×2. Также будет использоваться обозначение e_n для единичной матрицы размерности $n \times n$. В таких обозначениях условие $\gamma\sigma^t\gamma = \sigma$ эквивалентно набору соотношений

$$\mathcal{A}^t\mathcal{B} = \mathcal{B}^t\mathcal{A}, \quad \mathcal{C}^t\mathcal{D} = \mathcal{D}^t\mathcal{C}, \quad \mathcal{A}^t\mathcal{D} - \mathcal{B}^t\mathcal{C} = \mathcal{D}^t\mathcal{A} - \mathcal{C}^t\mathcal{B} = e_2. \tag{1.3}$$

Тогда для $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ выполняется равенство $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t\mathcal{D} & -{}^t\mathcal{B} \\ -{}^t\mathcal{C} & {}^t\mathcal{A} \end{pmatrix}$. Снова применив соотношение $\gamma\sigma^t\gamma = \sigma$ к матрице $\gamma^{-1} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, получаем следующие равенства:

$${}^t\mathcal{B}\mathcal{D} = {}^t\mathcal{D}\mathcal{B}, \quad {}^t\mathcal{C}\mathcal{A} = {}^t\mathcal{A}\mathcal{C}, \quad {}^t\mathcal{A}\mathcal{D} - {}^t\mathcal{C}\mathcal{B} = {}^t\mathcal{D}\mathcal{A} - {}^t\mathcal{B}\mathcal{C} = e_2. \tag{1.4}$$

Для симплектической группы существует известное разложение Ивасавы $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) = NAK$, где

$$N = \{n(l) | l = (l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{C}^4\},$$

$$n(l) = \begin{pmatrix} 1 & l_1 & l_2 - l_1 l_4 & l_4 \\ 0 & 1 & l_4 - l_1 l_3 & l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -l_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

A является группой всех матриц

$$\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}), \ t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*, \tag{1.6}$$

$$
\begin{gathered}
K = \mathrm{Sp}_4 = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SU}_4 \\
\text{– максимальная компактная подгруппа в } \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})
\end{gathered} \tag{1.7}
$$

и отображение $N \times A \times K \to NAK$ есть аналитический диффеоморфизм.

Для $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ полагаем

$$
\begin{gathered}
h_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}, \quad h_2(\gamma) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}, \\
h_3(\gamma) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_4(\gamma) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{1.8}
$$

Очевидно, что h_i – групповые мономорфизмы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$.

Обозначим через T подгруппу всех диагональных матриц в $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ и положим $B = NT = TN$. Тогда B является минимальной параболической подгруппой $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ и для нее выполняется разложение Брюа

$$
\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C}) = \bigcup_{r \in S} BrB, \tag{1.9}
$$

причем можно считать, что $S = \{e_4,\ p,\ \widetilde{p},\ p\widetilde{p},\ \widetilde{p}p,\ p\widetilde{p}p,\ \widetilde{p}p\widetilde{p},\ \sigma\}$, где

$$
p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.10}
$$

и σ есть матрица (1.1). Отметим как очевидный факт, что $\sigma = (p\widetilde{p})^2$.

Пусть $\widetilde{P}$ обозначает группу всех матриц в $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ вида

$$
\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{1.11}
$$

Группа $\widetilde{P}$ является максимальной параболической подгруппой $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ и называется подгруппой Якоби.

Следующее предложение является вспомогательным и использует обозначения (1.2), (1.5).

Предложение 1.1. *Пусть* $\gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, $d_1 \neq 0$, $d_1 d_4 - d_2 d_3 \neq 0$ *и* σ – *матрица* (1.1). *Тогда имеет место разложение*

$$\gamma\sigma = n(l)\ \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1})\ \sigma n(l'), \tag{1.12}$$

где $l = (l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{C}^4$, $l' = (l'_1, l'_2, l'_3, l'_4) \in \mathbb{C}^4$ *и*

$$\begin{gathered} t_1 = \frac{1}{d_1}, \quad t_2 = \frac{d_1}{d_1 d_4 - d_2 d_3}, \quad l'_1 = \frac{d_2}{d_1}, \\ l'_3 = \frac{c_2 d_3 - c_4 d_1}{d_1 d_4 - d_2 d_3}, \quad l_3 = \frac{b_4 d_1 - b_3 d_2}{d_1 d_4 - d_2 d_3}. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Доказательство. Используя разложение Брюа в (1.8), можно несложно (хотя и очень громоздко) доказать, что матрица $\gamma\sigma$ лежит в $B\sigma B$. Отсюда мы получаем разложение (1.12). Формулы в (1.13) являются результатом сравнения соответствующих элементов матриц $\gamma\sigma$ и $n(l)\ \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1})\ \sigma n(l')$. •

2. Дискретные подгруппы

Пусть $\mathfrak{q} \subset (3)$ – идеал кольца целых чисел $\mathcal{O}$ поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ и $\Gamma_n(\mathfrak{q})$ является конгруэнц-подгруппой mod $\mathfrak{q}$ группы $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$. Точнее, $\Gamma_n(\mathfrak{q})$ – группа, состоящая из матриц $(a_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ таких, что

$$\begin{aligned} &a_{ii} \equiv 1 \pmod 3, \quad i = 1, \dots, n; \\ &a_{ij} \in \mathfrak{q}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначим через $\Gamma(\mathfrak{q})$ группу $\Gamma(\mathfrak{q}) = \Gamma_4(\mathfrak{q}) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ и положим $\Delta = \{n(l) | l \in \mathfrak{q}^4\}$, $\widetilde{\Delta}_\times = \Gamma(\mathfrak{q}) \cap \widetilde{P}$.

Предложение 2.1. *Каждая матрица* $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Delta}_\times$ *может быть представлена единственным образом в виде* $\widetilde{\gamma} = \gamma'\gamma''$, *где* $\gamma' = n(*, *, 0, *) \in \Delta$, $\gamma'' = h_1(\lambda)$, $\lambda \in \Gamma_2(\mathfrak{q})$ *и* $\widetilde{\Delta}_\times = \Delta h_1(\Gamma_2(\mathfrak{q}))$.

Доказательство. Очевидно, что верхний левый элемент матрицы $\widetilde{\gamma}$ равняется единице. Из условий (1.3) вытекает, что

$$\widetilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & a & * & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & * & d \end{pmatrix}.$$

Снова в силу (1.3) матрица $\widetilde{\gamma}$ может быть представлена в виде $\widetilde{\gamma} = \gamma' h_1(\lambda)$, где

$$\gamma' = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & * & 1 \end{pmatrix} = n(*, *, 0, *) \in \Delta, \quad \lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_2(\mathfrak{q})$$

и h_1 – мономорфизм из (1.8). Тогда формула $\widetilde{\Delta}_\times = \Delta h_1(\Gamma_2(\mathfrak{q}))$ является очевидной, так как Δ и $h_1(\Gamma_2(\mathfrak{q}))$ – подгруппы $\widetilde{\Delta}_\times$. $\bullet$

Для заданных $m \in \mathfrak{q}$, $n \in \mathcal{O}$, $t \in \mathcal{O}$, где $(t, \mathfrak{q}) = 1$, $n \equiv 1 \pmod 3$, m и n взаимно просты, мы выбираем матрицу $\lambda_{m,n}^{(t)} \in \Gamma(\mathfrak{q})$ таким образом, что

$$\begin{aligned} &(1)\ \lambda_{m,n}^{(t)} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}, \text{ причем } l \text{ и } t \text{ взаимно просты;} \\ &(2)\ \text{если } m' \in \mathfrak{q},\ \lambda_{m',n}^{(t)} = \begin{pmatrix} k' & l' \\ m' & n \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{q}) \ \text{ и} \\ &\qquad m' \equiv m \pmod n, \quad \text{то } l' = l. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Легко проверить, что такой выбор возможен (хотя и не является единственным). Мы фиксируем наш выбор $\lambda_{m,n}^{(t)}$ и для упрощения обозначений будем писать $\lambda_{m,n}$ вместо $\lambda_{m,n}^{(1)}$.

Пусть $\widetilde{c} = (m_2, n_2, m_3, n_3, m_4, n_4)$ и $\widetilde{\Lambda}_\times$ есть множество всех векторов $\widetilde{c}$, удовлетворяющих условиям $m_i \in \mathfrak{q}$, $n_i \in \mathcal{O}$, $n_i \equiv 1 \pmod 3$, $(m_i, n_i) = 1$, $i = 2, 3, 4$. Для каждой пары (m_2, n_2), (m_3, n_3) и (m_4, n_4) выбираем матрицу λ_{m_2,n_2}, λ_{m_3,n_3} и $\lambda_{m_4,n_4}^{(n_2 n_3)}$ соответственно. Для $\widetilde{c} \in \widetilde{\Lambda}_\times$ определяем $\gamma_{\widetilde{c}}$ как произведение $\gamma_{\widetilde{c}} = \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$, где

$$\begin{gathered} \varepsilon_2 = h_2(\lambda_{m_2,n_2}), \quad \varepsilon_3 = h_3(\lambda_{m_3,n_3}), \quad \varepsilon_4 = h_4(\lambda^{(n_2n_3)}_{m_4,n_4}), \\ \lambda_{m_2,n_2} = \begin{pmatrix} k_2 & l_2 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{m_3,n_3} = \begin{pmatrix} k_3 & l_3 \\ m_3 & n_3 \end{pmatrix}, \\ \lambda^{(n_2n_3)}_{m_4,n_4} = \begin{pmatrix} k_4 & l_4 \\ m_4 & n_4 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{2.3}$$

l_4 взаимно просто с n_2n_3 и h_i – мономорфизмы из (1.8).

Следует отметить, что

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} k_2k_3 & 0 & k_2l_3 & l_2 \\ l_2m_3 & k_2 & l_2n_3 & 0 \\ n_2m_3 & m_2 & n_2n_3 & 0 \\ m_2k_3 & 0 & m_2l_3 & n_2 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_3\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} k_3k_4 & k_3l_4 & l_3n_4 & -l_3m_4 \\ m_4 & n_4 & 0 & 0 \\ m_3k_4 & m_3l_4 & n_3n_4 & -n_3m_4 \\ 0 & 0 & -l_4 & k_4 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_3^{-1} = \begin{pmatrix} n_3n_4 & -l_4 & -l_3n_4 & 0 \\ -n_3m_4 & k_4 & l_3m_4 & 0 \\ -m_3k_4 & 0 & k_3k_4 & m_4 \\ -m_3l_4 & 0 & k_3l_4 & n_4 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} k_2k_3k_4 & k_2k_3l_4 & k_2l_3n_4 - l_2l_4 & l_2k_4 - k_2l_3m_4 \\ l_2m_3k_4 + k_2m_4 & l_2m_3l_4 + k_2n_4 & l_2n_3n_4 & -l_2n_3m_4 \\ n_2m_3k_4 + m_2m_4 & n_2m_3l_4 + m_2n_4 & n_2n_3n_4 & -n_2n_3m_4 \\ m_2k_3k_4 & m_2k_3l_4 & m_2l_3n_4 - n_2l_4 & n_2k_4 - m_2l_3m_4 \end{pmatrix}.$$

Предложение 2.2. *В каждом смежном классе в $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$ содержится матрица вида $\gamma_{\widetilde{c}}, \widetilde{c} \in \widetilde{\Lambda}_\times$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждой матрицы $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$ справедливо $\gamma = \delta\gamma_{\widetilde{c}}$, где $\delta \in \widetilde{\Delta}_\times$, $\widetilde{c} \in \widetilde{\Lambda}_\times$. Пусть

$$\gamma = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & d_1 & d_2 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{q})$$

и $\lambda = \lambda^{(d)}_{m_4,n_4}$, причем $m_4 = -\dfrac{d_2}{d}$, $n_4 = \dfrac{d_1}{d}$, $m_4 \in \mathfrak{q}$, $m_4 \equiv 1 \pmod 3$, и d является наибольшим общим делителем d_1 и d_2. Так как $(d_1, d_2)\cdot{}^t\!\lambda = (d, 0)$, то $\gamma = \gamma' h_4(\lambda)$ и вектор $c_3(\gamma') = (*, *, d, 0)$ совпадает с третьей строчкой матрицы γ'. Обозначим через m_2 второй элемент вектора $c_3(\gamma')$ и через n_2 наибольший общий делитель первого и третьего элементов вектора $c_3(\gamma')$. Таким образом, получаем, что $c_3(\gamma') = (n_2 m_3, m_2, n_2 n_3, 0)$, где $m_i \in \mathfrak{q}$, $n_i \in \mathcal{O}, n_i \equiv 1 \pmod 3$, $(m_2, n_2) = 1$, $(m_3, n_3) = 1$, кроме того, $d = n_2 n_3$.

Используя (2.3) и (2.4), видим, что $\gamma = \gamma' \varepsilon_4$, $\gamma' = \widetilde{\gamma} \varepsilon_2 \varepsilon_3$ и вектор $c_3(\widetilde{\gamma}) = (0, 0, 1, 0)$ есть третья строчка матрицы $\widetilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{q})$. Применим теперь условия (1.3), (1.4) к матрице $\widetilde{\gamma}$. Так как $\mathcal{C}^t\mathcal{D} = \mathcal{D}^t\mathcal{C}$, то нижняя строчка матрицы $\widetilde{\gamma}$ совпадает с вектором $c_4(\widetilde{\gamma}) = (0, *, *, *)$. Так как ${}^t\!\mathcal{A}\mathcal{C} = {}^t\mathcal{C}\mathcal{A}$, то или вторая строчка $\widetilde{\gamma}$ есть $c_2(\widetilde{\gamma}) = (0, *, *, *)$, или $\mathcal{C} = 0$. В первом случае $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Delta}_\times$. Во втором случае условие ${}^t\!\mathcal{A}\mathcal{D} - {}^t\mathcal{C}\mathcal{B} = e_2$ влечет, что $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$, т.е. $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Delta}_\times$. Поэтому $\gamma = \widetilde{\gamma} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4, \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Delta}_\times$ и каждый смежный класс в $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$ содержит матрицу вида $\gamma_{\widetilde{c}}$. $\bullet$

Предложение 2.3. *Множество матриц* $\{\gamma_{\widetilde{c}} | \widetilde{c} \in \widetilde{\Lambda}_\times\}$ *является полной системой представителей смежных классов* $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$.

Доказательство. Существование матрицы вида $\gamma_{\widetilde{c}}$, $\widetilde{c} \in \widetilde{\Lambda}_\times$ в каждом смежном классе в $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$ было доказано в предложении 2.2, поэтому достаточно доказать единственность. Пусть $\widetilde{c} = (m_2, n_2, m_3, n_3, m_4, n_4) \in \widetilde{\Lambda}_\times$, $\widetilde{c}' = (m'_2, n'_2, m'_3, n'_3, m'_4, n'_4) \in \widetilde{\Lambda}_\times$, матрицы ε_2, ε_3, ε_4 определены в (2.3), $\varepsilon'_2 = \lambda_{m'_2, n'_2}$, $\varepsilon'_3 = \lambda_{m'_3, n'_3}$, $\varepsilon'_4 = \lambda^{(n'_2 n'_3)}_{m'_4, n'_4}$ и матрицы $\gamma_{\widetilde{c}} = \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4, \gamma_{\widetilde{c}'} = \varepsilon'_2 \varepsilon'_3 \varepsilon'_4$ принадлежат одному смежному классу в $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$. Тогда $\gamma_{\widetilde{c}'} = \delta \gamma_{\widetilde{c}}$, $\delta \in \widetilde{\Delta}_\times$ и, в силу предложения 2.1, вектор $c_3(\delta) = (0, 0, 1, 0)$ есть третья строчка матрицы δ. Отсюда вытекает, что третьи строчки матриц $\gamma_{\widetilde{c}}$ и $\gamma_{\widetilde{c}'}$ совпадают, следовательно, в силу формулы (2.4), находим, что $n_2 n_3 n_4 = n'_2 n'_3 n'_4$, $m_4 n_2 n_3 = m'_4 n'_2 n'_3$. Так как m_4 и n_4 взаимно просты, то $(n_2 n_3 n_4, m_4 n_2 n_3) = n_2 n_3$. Аналогичным образом можно убедиться, что $(n'_2 n'_3 n'_4, m'_4 n'_2 n'_3) = n'_2 n'_3$, отсюда $n_2 n_3 = n'_2 n'_3$, $n_4 = n'_4$, $m_4 = m'_4$. Таким образом, $\varepsilon_4 = \varepsilon'_4$ и

$\varepsilon_2\varepsilon_3 = \delta\varepsilon_2'\varepsilon_3'$. Далее, полагаем $\widetilde{\varepsilon}_3 = \varepsilon_3\varepsilon_3'^{-1} = h_3(\lambda_{\widetilde{m}_3,\widetilde{n}_3})$, $\widetilde{m}_3 \in \mathfrak{q}$, $\widetilde{n}_3 \equiv 1 \pmod 3$, следовательно, $\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_3 = \delta\varepsilon_2'$. Третья строчка матрицы $\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_3$ совпадает с вектором $c_3(\varepsilon_2\widetilde{\varepsilon}_3) = (n_2\widetilde{m}_3, *, *, *)$, отсюда получаем, что $n_2\widetilde{m}_3 = 0$. Так как $n_2 \neq 0$, то $\widetilde{m}_3 = 0$, следовательно, $\widetilde{n}_3 = 1$, $m_3 = m_3'$, $n_3 = n_3'$ и $\varepsilon_3 = \varepsilon_3'$. Из равенства $\varepsilon_2 = \delta\varepsilon_2'$ вытекает, что $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$, отсюда $\gamma_{\widetilde{c}} = \gamma_{\widetilde{c}'}$, что и требовалось доказать. •

Через $\widetilde{n}$ будем обозначать тройку чисел (n_2, n_3, n_4) таких, что $n_i \equiv 1 \pmod 3$, $(n_i, \mathfrak{q}) = 1$, $i = 2, 3, 4$. Для заданной тройки $\widetilde{n}$ выбираем подмножество $\widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})$ идеала $\mathfrak{q}$, являющееся приведенной системой вычетов $\mathrm{mod}\ n_4$, подмножество $\widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})$ идеала $\mathfrak{q}$ такое, что $\widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})$ – приведенная система вычетов $\mathrm{mod}\ n_3$, и подмножество $\widetilde{\mathfrak{m}}_2(\widetilde{n})$ идеала $\mathfrak{q}$, состоящее из чисел полной системы вычетов $\mathrm{mod}\ n_2n_3$, взаимно простых с n_2.

Следующее предложение дает удобную систему представителей двойных смежных классов $\widetilde{\Delta}_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$, которая будет использована в дальнейшем для вычисления коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна.

Предложение 2.4. *Семейство матриц* $\gamma = \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$, *где* $\varepsilon_2 = h_2(\lambda_{m_2,n_2})$, $\varepsilon_3 = h_3(\lambda_{m_3,n_3})$, $\varepsilon_4 = h_4(\lambda_{m_4,n_4}^{(n_2n_3)})$, $m_i \in \widetilde{\mathfrak{m}}_i(\widetilde{n})$, $i = 2, 3, 4$, *есть полная система представителей двойных смежных классов* $\widetilde{\Delta}_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$.

Разобьем доказательство этого предложения на несколько частей. Положим, как обычно, $\widetilde{c} = (m_2, n_2, m_3, n_3, m_4, n_4) \in \widetilde{\Lambda}_\times$.

Лемма 2.1. *Пусть* $v = (0, v_2, v_3, v_4) \in \mathfrak{q}^4$, $k_4, l_4 \in \mathcal{O}$, $k_4n_4 - l_4m_4 = 1$, $z = n_3(-v_2n_4l_4 - v_3m_4k_4 + v_4(k_4n_4 + m_4l_4))$ *и* $v_2n_4^2 + v_3m_4^2 - 2v_4n_4m_4 = 0$. *Если* $\delta = \varepsilon_3\varepsilon_4{}^tn(v)\varepsilon_4^{-1}\varepsilon_3^{-1}$, *где* $n(v)$ *и* ε_i *определены в* (1.5) *и* (2.3) *соответственно, то*

$$\delta = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Очевидное (хотя и громоздкое) вычисление. •

Следующая лемма дает явные выражения для переменных v, z, используемых в лемме 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть* $v = (0, v_2, v_3, v_4) \in \mathfrak{q}^4$, $k_4, l_4 \in \mathcal{O}$, $k_4n_4 - l_4m_4 = 1$ *и* $m_4 \neq 0$. *Равенства* $v_2n_4^2 + v_3m_4^2 - 2v_4n_4m_4 = 0$, $z = n_3(-v_2n_4l_4 - v_3m_4k_4 + v_4(k_4n_4 + m_4l_4))$ *выполняются тогда и только тогда, когда* $v_4 = x$, $v_3 = -(2xl_4 + yn_4)n_4$, $v_2 = (2xk_4 + ym_4)m_4$, $z = n_3(x(k_4n_4 + m_4l_4) + yn_4m_4)$ *для некоторых* $x, y \in \mathfrak{q}$.

Доказательство. Так как n_4 и m_4 взаимно просты, то равенство $v_2n_4^2 + v_3m_4^2 - 2v_4n_4m_4 = 0$ эквивалентно равенствам $v_2 = \widetilde{v}_2m_4$, $v_3 = \widetilde{v}_3n_4$и $\widetilde{v}_2n_4 + \widetilde{v}_3m_4 = 2v_4$, где $\widetilde{v}_2, \widetilde{v}_3 \in \mathcal{O}$. Из условия $k_4n_4 - l_4m_4 = 1$ получаем, что $(\widetilde{v}_2 - 2v_4k_4)n_4 + (\widetilde{v}_3 + 2v_4l_4)m_4 = 0$. Из взаимной простоты m_4 и n_4 вытекает, что $\widetilde{v}_2 = 2v_4k_4 + ym_4$, $\widetilde{v}_3 = -2v_4l_4 - yn_4$ для некоторого $y \in \mathcal{O}$. Так как $v_3 \in \mathfrak{q}$ и n_4 взаимно просто с $\mathfrak{q}$, то $y \in \mathfrak{q}$. Подставляя полученные для v_2 и v_3 выражения в формулу для z, видим, что $z = n_3(x(k_4n_4 + m_4l_4) + yn_4m_4)$, $v_4 = x$, что и завершает доказательство необходимости. Достаточность очевидна. •

Доказательство существования в предложении 2.4. Пусть $\mathcal{Z}$ есть двойной смежный класс в $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q}) / {}^t\Delta$. Согласно предложению 2.2, существует матрица $\nu_2\nu_3\nu_4 \in \mathcal{Z}$, где $\nu_2 = h_2(\lambda_{m_2', n_2})$, $\nu_3 = h_3(\lambda_{m_3', n_3})$, $\nu_4 = h_4(\lambda^{(n_2n_3)}_{m_4', n_4})$. Представив матрицу ε_4 в виде

$$\varepsilon_4 = \nu_4 h_4(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi_4 & 1 \end{pmatrix}) = h_4(\lambda^{(n_2n_3)}_{m_4, n_4}), \tag{2.6}$$

находим, что $m_4 = m_4' + \xi_4 n_4 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})$ для подходящего $\xi_4 \in \mathfrak{q}$ и, кроме того, $\nu_2\nu_3\varepsilon_4 \in \mathcal{Z}$. Пусть

$$\varepsilon_3 = \nu_3 h_3(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi_3 & 1 \end{pmatrix}) = h_3(\lambda_{m_3, n_3}), \tag{2.7}$$

где $m_3 = m_3' + \xi_3 n_3 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})$ для соответствующим образом выбранного $\xi_3 \in \mathfrak{q}$. Так как $\nu_2\varepsilon_3 h_3(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\xi_3 & 1 \end{pmatrix})\varepsilon_4 \in \mathcal{Z}$ и

$h_3\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\xi_3 & 1 \end{pmatrix}\right)\varepsilon_4 = \varepsilon_4\gamma$, где

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi_3 k_4^2 & -\xi_3 l_4 k_4 & 1 & 0 \\ -\xi_3 l_4 k_4 & -\xi_3 l_4^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in {}^t\Delta, \tag{2.8}$$

$$\lambda^{(n_2 n_3)}_{m_4,n_4} = \begin{pmatrix} k_4 & l_4 \\ m_4 & n_4 \end{pmatrix},$$

то получаем, что $\nu_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \in \mathcal{Z}$. Из леммы 2.1 вытекает, что $\nu_2\varepsilon_3\varepsilon_4{}^t n(v) = \nu_2\delta\varepsilon_3\varepsilon_4$ при $z = n_3(-v_2 n_4 l_4 - v_3 m_4 k_4 + v_4(k_4 n_4 + m_4 l_4))$, $v_2 n_4^2 + v_3 m_4^2 - 2v_4 n_4 m_4 = 0$, $v_2, v_3, v_4 \in \mathfrak{q}$ и

$$\delta = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\nu_2\delta = \begin{pmatrix} k_2' & 0 & 0 & l_2' \\ 0 & k_2' & l_2' & 0 \\ 0 & m_2' & n_2 & 0 \\ m_2' & 0 & 0 & n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 1 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & k_2 & l_2 & 0 \\ 0 & m_2 & n_2 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \widetilde{\delta}\varepsilon_2, \tag{2.9}$$

где $m_2 = m_2' + z n_2$, $\varepsilon_2 = h_2(\lambda_{m_2,n_2})$ и $\widetilde{\delta} \in \widetilde{\Delta}_\times$ в силу (1.4), то $\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \in \mathcal{Z}$. Из леммы 2.2 вытекает, что $z = n_3(x(k_4 n_4 + m_4 l_4) + y n_4 m_4)$ для $m_4 = 0$. Так как данное равенство остается верным и при $m_4 = 0$, то, в силу взаимной простоты чисел $k_4 n_4 + m_4 l_4$ и $n_4 m_4$, мы можем найти такие $x, y \in \mathfrak{q}$, что $m_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_2(\widetilde{n})$. Таким образом, первая часть предложения 2.4 доказана. •

Доказательство единственности в предложении 2.4. Как обычно, мы используем обозначения $\varepsilon_2 = h_2(\lambda_{m_2,n_2})$, $\varepsilon_3 = h_3(\lambda_{m_3,n_3})$, $\varepsilon_4 = h_4(\lambda^{(n_2 n_3)}_{m_4,n_4})$ и $\varepsilon_2' = h_2(\lambda_{m_2',n_2'})$, $\varepsilon_3' = h_3(\lambda_{m_3',n_3'})$,

$\varepsilon'_4 = h_4(\lambda^{(n'_2n'_3)}_{m'_4,n'_4})$. Пусть матрицы $\gamma = \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4$ и $\gamma' = \varepsilon'_2\varepsilon'_3\varepsilon'_4$ принадлежат одному двойному смежному классу в $\widetilde{\Delta}_\times\backslash\Gamma(\mathfrak{q})/{}^t\Delta$. Тогда $\gamma' = \lambda\gamma\delta$, где $\lambda \in \widetilde{\Delta}_\times$, $\delta \in {}^t\Delta$, т.е.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ \delta_{11} & \delta_{12} & 1 & -v \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda\gamma\delta = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & n_2n_3n_4 & -n_2n_3m_4 - vn_2n_3n_4 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Используя (2.4),(2.10) и сравнивая третий и четвертый элементы третьей строчки в матрицах γ и γ', видим, что $n'_2n'_3n'_4 = n_2n_3n_4$ и $n'_2n'_3m'_4 = n_2n_3m_4 + vn_2n_3n_4$, причем $n_i \neq 0$. Пусть p' – простой делитель числа $n'_2n'_3$, взаимно простой с n_2n_3. Тогда p' делит n_4 и так как p' делит также число $n_2n_3m_4 + vn_2n_3n_4$, то p' делит m_4, что невозможно в силу взаимной простоты m_4 и n_4. Следовательно, $n'_2n'_3$ делит n_2n_3. Аналогично, пусть p – простой делитель n_2n_3, не делящий $n'_2n'_3$. Тогда p делит n'_4. Но так как p является делителем числа $n'_2n'_3m'_4$ и, следовательно, p делит m'_4, то получаем противоречие с взаимной простотой чисел m'_4 и n'_4. Таким образом, n_2n_3 делит $n'_2n'_3$, поэтому $n'_2n'_3 = n_2n_3$, $n'_4 = n_4$ и $m'_4 = m_4 + vn_4$.

Легко видеть, что $\varepsilon'_2\varepsilon'_3 = \lambda\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\delta\varepsilon'^{-1}_4 = \lambda\varepsilon_2\varepsilon_3\delta'$, где

$$\delta' = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & \delta_{33} & \delta_{34} \\ * & * & \delta_{43} & \delta_{44} \end{pmatrix},$$

$$\lambda\varepsilon_2\varepsilon_3\delta' = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & \delta_{34}n_2n_3 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Отсюда с помощью (2.4) получаем, что $\delta_{34}n_2n_3 = 0$ и $\delta_{34} = 0$. Так как матрицы $\delta', \lambda\varepsilon_2\varepsilon_3\delta'$ являются симплектическими, соотношения в (1.3), (1.4) означают, что

$$\delta' = \begin{pmatrix} 1 & v' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \delta'_{11} & \delta'_{12} & 1 & 0 \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & -v' & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda\varepsilon_2\varepsilon_3\delta' = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & \lambda_{24}n_2 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Сравнивая с помощью (2.4) четвертые элементы второй строчки матриц $\varepsilon'_2\varepsilon'_3$ и $\lambda\varepsilon_2\varepsilon_3\delta'$, видим, что $\lambda_{24}n_2 = 0$. Так как матрица λ также является симплектической, то получаем, что

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ 0 & 1 & \lambda_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_{42} & \lambda_{43} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda\varepsilon_2\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & l_2n_3 + \lambda_{23}n_2n_3 & 0 \\ n_2m_3 & m_2 & n_2n_3 & 0 \\ * & * & * & n_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что $n'_2 = n_2$, $n'_2m'_3 = n_2m_3 + \delta'_{11}n_2n_3$. Следовательно, $n'_2 = n_2$, $n'_3 = n_3$, $m'_3 = m_3 + \delta'_{11}n_3$. Кроме того, мы доказали, что $n'_4 = n_4$ и $m'_4 = m_4 + vn_4$. Так как $m'_4, m_4 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})$ и $m'_3, m_3 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})$, то получаем, что $m'_4 = m_4$, $m'_3 = m_3$ и, следовательно, $\varepsilon'_4 = \varepsilon_4$, $\varepsilon'_3 = \varepsilon_3$.

Осталось доказать, что $m'_2 = m_2$. Так как $\delta' = \varepsilon_4\delta\varepsilon_4^{-1}$, то из (2.10) и (2.12) вытекает, что

$$\begin{pmatrix} k_4 & l_4 & 0 & 0 \\ m_4 & n_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_4 & -m_4 \\ 0 & 0 & -l_4 & k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ \delta_{11} & \delta_{12} & 1 & -v \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} k_4 & l_4 & 0 & 0 \\ m_4 & n_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_4 & -m_4 \\ 0 & 0 & -l_4 & k_4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & v' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \delta'_{11} & \delta'_{12} & 1 & 0 \\ \delta'_{21} & \delta'_{22} & -v' & 1 \end{pmatrix}.$$

Но

$$\begin{pmatrix} k_4 & l_4 \\ m_4 & n_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_4 & -l_4 \\ -m_4 & k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -l_4^2 v \\ n_4^2 v & * \end{pmatrix},$$

следовательно, $n_4^2 v = 0$ и $v = 0,\ v' = 0$.

Сравнивая вторые элементы третьей строчки матриц $\varepsilon_2' \varepsilon_3$ и $\lambda \varepsilon_2 \varepsilon_3 \delta'$, получаем, что $m_2' = m_2 + n_2 n_3 \delta_{12}'$. Так как $m_2', m_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_2(\widetilde{n})$, то $m_2' = m_2$. Таким образом, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2,\ \varepsilon_3' = \varepsilon_3,\ \varepsilon_4' = \varepsilon_4$ и предложение 2.4 доказано. $\bullet$

Для $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$ определим группу $\widetilde{\Delta}^\gamma$ посредством равенства ${}^t\widetilde{\Delta}^\gamma = \gamma^{-1} \widetilde{\Delta}_\times \gamma \cap {}^t\Delta$. Несложно проверить, что $\widetilde{\Delta}^\gamma = \{\delta \in \Delta | \gamma {}^t\delta \gamma^{-1} \in \widetilde{\Delta}_\times\}$. Следующее предложение описывает структуру это группы.

Предложение 2.5. *Пусть матрица* $\gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathfrak{q})$ *и* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ *заданы в* (1.2). *Полагая* $\widetilde{\vartheta} = (d_1/(d_1, d_2))^2$, *имеем:*

$$\widetilde{\Delta}^\gamma = \left\{ n\left(0, \frac{d_2^2}{d_1^2} l_3, l_3, -\frac{d_2}{d_1} l_3\right) \middle| \, l_3 \in \widetilde{\vartheta}\mathfrak{q} \right\}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Пусть $\delta = n(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \Delta$ и

$$\Omega = \begin{pmatrix} l_2 - l_1 l_4 & l_4 - l_1 l_3 \\ l_4 & l_3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -l_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– матрицы размерности 2×2. Тогда мы можем представить матрицу $\gamma {}^t\delta \gamma^{-1}$ в виде

$$\gamma {}^t\delta \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & 0 \\ \Omega & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\mathcal{D} & -{}^t\mathcal{B} \\ -{}^t\mathcal{C} & {}^t\mathcal{A} \end{pmatrix} + e_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathcal{A}L{}^t\mathcal{D} + \mathcal{B}\Omega{}^t\mathcal{D} - \mathcal{B}M{}^t\mathcal{C}, & -\mathcal{A}L\mathcal{B} - \mathcal{B}\Omega{}^t\mathcal{B} + \mathcal{B}M{}^t\mathcal{A} \\ \mathcal{C}L{}^t\mathcal{D} + \mathcal{D}\Omega{}^t\mathcal{D} - \mathcal{D}M{}^t\mathcal{C}, & -\mathcal{C}L{}^t\mathcal{B} - \mathcal{D}\Omega{}^t\mathcal{B} + \mathcal{D}M{}^t\mathcal{A} \end{pmatrix} + e_4. \tag{2.14}$$

Если $\gamma {}^t\delta \gamma^{-1} \in \widetilde{\Delta}_\times$, то матрица $\mathcal{C}L{}^t\mathcal{D} + \mathcal{D}\Omega{}^t\mathcal{D} - \mathcal{D}M{}^t\mathcal{C}$ является симметричной. Отсюда, в силу $L = -{}^tM$, вытекает, что $\mathcal{D}{}^t\Omega{}^t\mathcal{D} = \mathcal{D}\Omega{}^t\mathcal{D}$. Но матрица $\mathcal{D}$ невырождена (так как $\det \mathcal{D} \equiv 1 \pmod 3$), следовательно, $\Omega = {}^t\Omega$ и $l_1 l_3 = 0$, если $\delta = n(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\Delta}^\gamma$. Таким образом, $\widetilde{\Delta}^\gamma = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где $\Delta_1 = \{\delta \in \widetilde{\Delta}^\gamma | \delta = n(0, l_2, l_3, l_4) \in \Delta\}$ и $\Delta_2 = \{\delta \in \widetilde{\Delta}^\gamma | \delta = n(l_1, l_2, 0, l_4) \in \Delta, l_1 \neq 0\}$. Опишем множества Δ_1 и Δ_2.

1) Пусть $l_1 = 0$. В этом случае $L = M = 0$, следовательно, в силу соотношений в (1.3),(1.4), $\gamma^t\delta\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}\Omega^t\mathcal{D} & -\mathcal{B}\Omega^t\mathcal{B} \\ \mathcal{D}\Omega^t\mathcal{D} & -\mathcal{D}\Omega^t\mathcal{B} \end{pmatrix} + e_4 \in \widetilde{\Delta}_\times$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}\Omega^t\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Используя симметричность матрицы Ω, видим, что последнее равенство эквивалентно $\Omega^t\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} l_2 & l_4 \\ l_4 & l_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_3 \\ d_2 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 l_2 + d_2 l_4 & * \\ d_1 l_4 + d_2 l_3 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Равенство (2.15) равносильно условию $l_2 = d_2^2/d_1^2 \cdot l_3$, $l_4 = -d_2/d_1 \cdot l_3$, $l_3 \in (d_1/(d_1, d_2))^2\mathfrak{q}$. Таким образом, мы доказали, что

$$\Delta_1 = \left\{ n\left(0, \frac{d_2^2}{d_1^2} l_3, l_3, -\frac{d_2}{d_1} l_3\right) \middle| \, l_3 \in \widetilde{\vartheta}\mathfrak{q} \right\}, \quad \widetilde{\vartheta} = \left(\frac{d_1}{(d_1, d_2)}\right)^2. \qquad (2.16)$$

2) Предположим, что $\Delta_2 \neq \varnothing$. Тогда существует матрица $n(l_1, *, 0, *) \in \Delta_2 \subset \widetilde{\Delta}^\gamma$, где $l_1 \neq 0$. С другой стороны, из (2.16) следует, что существует матрица $n(0, *, l_3, *) \in \Delta_1 \subset \widetilde{\Delta}^\gamma$ для некоторого $l_3 \neq 0$. Но так как $\widetilde{\Delta}^\gamma$ является группой, то $\delta = n(l_1, *, 0, *) \cdot n(0, *, l_3, *) = n(l_1, *, l_3, *) \in \widetilde{\Delta}^\gamma$ при $l_1, l_3 \neq 0$. Но $\delta \notin \Delta_1$, $\delta \notin \Delta_2$ и мы получили противоречие. Таким образом, $\widetilde{\Delta}^\gamma = \Delta_1$ и предложение 2.5 доказано. $\bullet$

Для каждого идеала $\widetilde{\vartheta}\mathfrak{q}$, где $\widetilde{\vartheta} = (d_1/(d_1, d_2))^2$, определим область $\widetilde{\mathcal{F}}_\gamma = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}/\widetilde{\vartheta}\mathfrak{q} \times \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^4$. Введем множество $\widetilde{\Omega} \subset \Gamma(\mathfrak{q})$, являющееся полной системой представителей двойных смежных классов $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q}) / {}^t\Delta$, и множество $\widetilde{\Lambda}_\gamma$, являющееся полной системой представителей смежных классов ${}^t\widetilde{\Delta}^\gamma \backslash {}^t\Delta$. Пусть

$$\widetilde{\mathcal{P}} = \{(\gamma, h) | \gamma \in \widetilde{\Omega}, h \in \widetilde{\Lambda}_\gamma\}. \qquad (2.17)$$

Предложение 2.6.
1) *Отображение* $\widetilde{\mathcal{P}} \to \widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$, *действующее по закону* $(\gamma, h) \mapsto \widetilde{\Delta}_\times \gamma h$, *является биективным;*
2) $\sigma^{-1}\widetilde{\Lambda}_\gamma\sigma$ *– полная система представителей смежных классов* $\widetilde{\Delta}^\gamma \backslash \Delta$*;*
3) $n(\widetilde{\mathcal{F}}_\gamma) = \{n(l_1, l_2, l_3, l_4) | (l_1, l_2, l_3, l_4) \in \widetilde{\mathcal{F}}_\gamma\}$ *есть полная система представителей смежных классов* $\widetilde{\Delta}^\gamma \backslash N$.

Доказательство.
1) Для доказательства инъективности положим $\gamma_1 h_1 = \delta\gamma_2 h_2$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in \widetilde{\Omega}$, $h_1, h_2 \in \widetilde{\Lambda}_\gamma$ и $\delta \in \widetilde{\Delta}_\times$. Отсюда $\gamma_1 = \delta\gamma_2 h_2 h_1^{-1}$, $h_1, h_2 \in {}^t\Delta$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Далее, $\gamma^{-1}\delta^{-1}\gamma = h_2 h_1^{-1} \in \gamma^{-1}\widetilde{\Delta}_\times\gamma$, поэтому $h_2 h_1^{-1} \in {}^t\widetilde{\Delta}^\gamma$. Таким образом, мы получили, что $h_1 = h_2$. Для доказательства сюръективности выберем $\alpha \in \widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})$. Отсюда получаем, что $\alpha = \gamma\delta$, $\gamma \in \widetilde{\Omega}$, $\delta \in {}^t\Delta$ и $\delta = \omega h$, $\omega \in {}^t\widetilde{\Delta}^\gamma$, $h \in \widetilde{\Lambda}_\gamma$. Далее, $\gamma\omega = \mu\gamma$, где $\mu \in \widetilde{\Delta}_\times$ и $\alpha = \gamma\omega h = \mu\gamma h$.
2) Это утверждение очевидно, так как $\sigma^{-1}{}^t\Delta\sigma = \Delta$ и $\sigma^{-1}{}^t\widetilde{\Delta}^\gamma\sigma = \widetilde{\Delta}^\gamma$.
3) Пусть $n(l_1, l_2, l_3, l_4) \in N$, $l = (l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{C}^4$ и $l_3 = l_3' + t_3$, где $t_3 \in \widetilde{\vartheta}\mathfrak{q}$, $l_3' \in \mathbb{C}/\widetilde{\vartheta}\mathfrak{q}$. В силу предложения 2.5, $n(z) = n(0, -d_2^2/d_1^2 \cdot t_3, -t_3, d_2/d_1 \cdot t_3) \in \widetilde{\Delta}^\gamma$ и $n(z)n(l) = n(*, *, l_3', *) \in n(\widetilde{\mathcal{F}}_\gamma)$. Таким образом, множество $n(\widetilde{\mathcal{F}}_\gamma)$ содержит некоторую полную систему представителей смежных классов в $\widetilde{\Delta}^\gamma \backslash N$. Выберем две точки $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \widetilde{\mathcal{F}}_\gamma$, $z' = (z_1', z_2', z_3', z_4') \in \widetilde{\mathcal{F}}_\gamma$ такие, что $n(z)$ и $n(z')$ лежат в одном смежном классе в $\widetilde{\Delta}^\gamma \backslash N$. Тогда из предложения 2.5 получаем, что $n(z) = n\left(0, d_2^2/d_1^2 \cdot l_3,\ l_3, -d_2/d_1 \cdot l_3\right) n(z')$, $l_3 \in \widetilde{\vartheta}\mathfrak{q}$, следовательно, $z_3 = z_3' + l_3$. Так как $z_3, z_3' \in \mathbb{C}/\widetilde{\vartheta}\mathfrak{q}$, то $l_3 = 0$ и $z = z'$, что и требовалось доказать. $\bullet$

3. Коэффициенты Фурье рядов Эйзенштейна

Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{C}^4 \times \mathbb{R}_+^{*2}$, где правая часть рассматривается как произведение вещественных аналитических многообразий. Для $w = (z_1, z_2, z_3, z_4, u, v) \in \mathbb{X}$ мы используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &n(w) = n(z_1, z_2, z_3, z_4), \\ &a(w) = \operatorname{diag}(uv^{1/2}, v^{1/2}, u^{-1}v^{-1/2}, v^{-1/2}), \\ &U(w) = u, \quad V(w) = v, \quad Z_i(w) = z_i, \\ &Q(w) = (z_1, u), \quad \widetilde{Q}(w) = (z_3, v). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Согласно Ивасаве, отображение

$$\mathbb{X} \to \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})/\mathrm{Sp}_4, \quad w \mapsto n(w)a(w)\mathrm{Sp}_4 \tag{3.2}$$

является изоморфизмом вещественных аналитических многообразий. Группа $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ действует на $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})/\mathrm{Sp}_4$ левыми умножениями и изоморфизм (3.2) переносит на $\mathbb{X}$ это действие. Образ точки $w \in \mathbb{X}$, полученный действием $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$, будем обозначать через γw.

Пусть $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ – алгебра инвариантных дифференциальных операторов на $\mathbb{X}$. Известно, что $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ является коммутативной $\mathbb{C}$–алгеброй, изоморфной алгебре полиномов от двух переменных над полем $\mathbb{C}$. В качестве образующих $\mathbb{D}(\mathbb{X})$ можно взять оператор Лапласа–Бельтрами и один оператор четвертого порядка.

Пусть Γ – дискретная подгруппа $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ и $\widetilde{\psi} : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ – унитарный характер, причем $\Delta, {}^t\Delta$ содержатся в ядре $\widetilde{\psi}$ и $\widetilde{\psi}(\sigma\gamma\sigma^{-1}) = \widetilde{\psi}(\gamma)$ для любого $\gamma \in \Gamma$. Мы говорим, что $F : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ является автоморфной формой относительно группы Γ с системой мультипликаторов $\widetilde{\psi}$, если F есть $\mathbb{C}^\infty$–функция, удовлетворяющая условиям:

(1) $F(\gamma w) = \widetilde{\psi}(\gamma)F(w)$ для всех $\gamma \in \Gamma, w \in \mathbb{X}$;

(2) F является собственной функцией всех инвариантных дифференциальных операторов на $\mathbb{X}$;

(3) существует постоянная $c \in \mathbb{R}$ такая, что
$|F(w)| < \mathrm{Norm}(n(w)a(w))^c$ для всех $w \in \mathbb{X}$.

В условии (3) под нормой $\mathrm{Norm}(\delta)$ для $\delta \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ мы понимаем $\mathrm{trace}(\delta^t\bar{\delta})$. Условие (2) этого определения означает, что для любого $D \in \mathbb{D}(\mathbb{X})$ выполняется условие $DF = \lambda_F(D)F$ с $\lambda_F(D) \in \mathbb{C}$. Ясно, что отображение $D \mapsto \lambda_F(D)$ является гомоморфизмом $\mathbb{C}$–алгебр, т.е. λ_F – характер $\mathbb{D}(\mathbb{X})$.

Пусть $\Gamma = \Gamma(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{q} \subset (3)$ и $\mathcal{F}_\mathfrak{q} \subset \mathbb{C}^4$ – измеримое по Лебегу множество такое, что его образ $n(\mathcal{F}_\mathfrak{q})$, полученный с помощью изоморфизма вещественных аналитических многообразий

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto n(z_1, z_2, z_3, z_4), \tag{3.3}$$

является полной системой представителей смежных классов $\Delta\backslash N$. Обозначим через $\mathrm{vol}\mathcal{F}_\mathfrak{q}$ объем $\mathcal{F}_\mathfrak{q}$ и положим $c = (\mathrm{vol}\mathcal{F}_\mathfrak{q})^{-1}$. Очевидно, что $\mathrm{vol}\mathcal{F}_\mathfrak{q}$ не зависит от выбора системы представителей.

Пусть $e(z) = \exp(2\pi i(z + \bar{z}))$. Тогда для $\mu, \nu \in \mathfrak{q}^*$ положим

$$c_{\mu,\nu}(u, v; F) = c \iiiint\limits_{\mathcal{F}_\mathfrak{q}} F(w)\overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)}\, dz_1\, dz_2\, dz_3\, dz_4, \tag{3.4}$$

где $w \in \mathbb{X}$. Этот интеграл не зависит от выбора системы представителей $\Delta\backslash N$ в силу того, что Δ содержится как в ядре $\widetilde{\psi}$, так и в ядре гомоморфизма

$$N \to \mathbb{C}^*, \quad n(l_1, l_2, l_3, l_4) \mapsto e(\mu l_1 + \nu l_3). \tag{3.5}$$

Величины $c_{\mu,\nu}(u, v; F)$ будем называть коэффициентами Фурье формы F.

Если F – автоморфная форма относительно $\Gamma(\mathfrak{q})$ и $\lambda \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ удовлетворяет условиям

$$\lambda\Gamma(\mathfrak{q})\lambda^{-1} = \Gamma(\mathfrak{q}) \ \text{ и } \widetilde{\psi}(\lambda\gamma\lambda^{-1}) = \widetilde{\psi}(\gamma) \ \text{ для всех } \gamma \in \Gamma, \tag{3.6}$$

то функция $w \mapsto F(\lambda w)$, $w \in \mathbb{X}$ также является автоморфной формой относительно группы $\Gamma(\mathfrak{q})$ с той же самой системой мультипликаторов $\widetilde{\psi}$, что и F. Этот факт легко проверяется.

Хорошо известно (см. [3]), что $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}_2$ можно реализовать как $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+^*$. Группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ действует на $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathrm{SU}_2$ левыми умножениями, это действие переносится на $\mathbb{H}$ и мы будем обозначать через γw образ w под действием γ. Тогда

$$\gamma w = \left(\frac{(az+b)\overline{(cz+d)} + a\bar{c}v^2}{|cz+d|^2 + |c|^2v^2}, \frac{v}{|cz+d|^2 + |c|^2v^2} \right), \tag{3.7}$$

где $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $w = (z, v) \in \mathbb{H}$.

Пусть $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ – автоморфная форма относительно группы $\Gamma_2(\mathfrak{q})$ с системой мультипликаторов $\widetilde{k}(\gamma) = \widetilde{\psi}(h_4(\gamma))$ и $\mathrm{D}_{\text{L.-B.}} f = r(2-r)f$, где $\gamma \in \Gamma_2(\mathfrak{q})$ и $\mathrm{D}_{\text{L.-B.}}$ есть оператор Лапласа–Бельтрами. Тогда f может быть разложена в ряд Фурье

$$f(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(z, v)) =$$

$$c_0(v) + \sum_{\nu \in \mathfrak{q}^* \setminus \{0\}} \rho(\nu) v \mathrm{K}_{r-1}(4\pi|\nu|v) e(\nu z), \ (z, v) \in \mathbb{H}, \tag{3.8}$$

где K_m – функция Бесселя–Макдональда с $z, m \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$, $\rho(\nu) \in \mathbb{C}$ и, для некоторых $\rho_+, \rho_- \in \mathbb{C}$, $c_0(v) = \rho_+ v^r + \rho_- v^{2-r}$ при $r \neq 1$ и $c_0(v) = \rho_+ v \log v + \rho_- v$ при $r = 1$ (см. [2, §0.3]). Согласно теории Сельберга–Ленглендса, форме f и максимальной параболической подгруппе Якоби $\widetilde{P}$ можно сопоставить ряд

$$\widetilde{E}(w,s;f)=\sum_{\gamma}\overline{\widetilde{\psi}}(\gamma)U(\gamma w)^{2s}V(\gamma w)^{s}\bar{f}(\widetilde{Q}(\gamma w)), \tag{3.9}$$

где $w\in\mathbb{X}$, $s\in\mathbb{C}$ и суммирование происходит по множеству матриц $\gamma\in\Gamma(\mathfrak{q})$, являющемуся полной системой представителей смежных классов $\widetilde{\Delta}_{\times}\backslash\Gamma(\mathfrak{q})$, причем значение $\widetilde{E}(w,s;f)$ не зависит от выбора системы представителей (см. [2, 4]). В рамках теории Сельберга–Ленглендса этот ряд является максимальным параболическим рядом Эйзенштейна, связанным с формой f и максимальной параболической подгруппой Якоби $\widetilde{P}$. Известно, что ряд (3.9) сходится абсолютно и локально равномерно в $\mathbb{X}\times\{s\in\mathbb{C}\mid\Re(s)>\tau\}$ для некоторого τ и для заданного $w\in\mathbb{X}$ функция $\widetilde{E}(w,s;f)$ регулярна в области $\{s\in\mathbb{C}\mid\Re(s)>\tau\}$ и мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Отображение $w\mapsto\widetilde{E}(\sigma w,s;f)$, где матрица σ определена в (1.1) и $w\in\mathbb{X}$, – автоморфная форма относительно группы $\Gamma(\mathfrak{q})$ с системой мультипликаторов $\widetilde{\psi}$. Эта система мультипликаторов совпадает с системой мультипликаторов ряда Эйзенштейна $\widetilde{E}(\cdot,s;f)$ в силу того, что $\sigma\Gamma(\mathfrak{q})\sigma^{-1}=\Gamma(\mathfrak{q})$ и $\widetilde{\psi}(\sigma\gamma\sigma^{-1})=\widetilde{\psi}(\gamma)$ для всех $\gamma\in\Gamma(\mathfrak{q})$.

Нам предстоит вычислить коэффициенты Фурье

$$c_{\mu,\nu}(u,v,\widetilde{E}(\sigma(\cdot),s;f))$$

ряда $\widetilde{E}(\sigma w,s;f)$. Непосредственно из определения (3.4) получаем, что

$$\begin{aligned}c_{\mu,\nu}(u,v,\widetilde{E}(\sigma(\cdot),s;f))&=\\ =c\iiiint\limits_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}}\widetilde{E}(\sigma w,s;f)\overline{e(\mu z_1+\nu z_3)}dz_1dz_2dz_3dz_4& \qquad (3.10)\\ =c\sum_{\gamma}\overline{\widetilde{\psi}}(\gamma)\iiiint\limits_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}}\widetilde{\nabla}(\gamma\sigma w)\overline{e(\mu z_1+\nu z_3)}dz_1dz_2dz_3dz_4&,\end{aligned}$$

где

$$\widetilde{\nabla}(w)=(U^2V)(w)^{s}\bar{f}(\widetilde{Q}(w)),\quad w=(z_1,z_2,z_3,z_4,u,v)\in\mathbb{X}, \tag{3.11}$$

суммирование происходит по некоторому множеству матриц γ, являющемуся полной системой представителей смежных классов $\widetilde{\Delta}_{\times}\backslash\Gamma(\mathfrak{q})$ и значение суммы не зависит от выбора системы представителей. Пусть $c = (\mathrm{vol}\mathcal{F}_{\mathfrak{q}})^{-1}$, где $\mathcal{F}_{\mathfrak{q}} = (\mathbb{C}/\mathfrak{q})^4$, и положим

$$\widetilde{c}_{\mu,\nu} = c_{\mu,\nu}(u, v, \widetilde{E}(\sigma(\cdot), s; f)).$$

Очевидно, что множество $n(\mathcal{F}_{\mathfrak{q}})$ является полной системой представителей смежных классов $\Delta\backslash N$. Будут также использоваться обозначения $m_+ = m\bar{\rho}_+$, $m_- = m\bar{\rho}_-$, $m = \mathrm{vol}(\mathbb{C}/\mathfrak{q})^{-3}$.

Теорема 1. *Коэффициенты Фурье $\widetilde{c}_{\mu,\nu}$ имеют следующий вид:*

$$\widetilde{c}_{\mu,0} = \begin{cases} m_+\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,0}(s,r)\widetilde{\mathcal{J}}_{\mu,0}(u,v,s,r)+ \\ +m_-\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,0}(s,2-r)\widetilde{\mathcal{J}}_{\mu,0}(u,v,s,2-r), \\ \\ m_+\left.\dfrac{\partial}{\partial t}\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,0}(s,t)\widetilde{\mathcal{J}}_{\mu,0}(u,v,s,t)\right|_{t=1} + \\ +m_-\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,0}(s,1)\widetilde{\mathcal{J}}_{\mu,0}(u,v,s,1), \end{cases} \tag{3.12}$$

при $r \neq 1$ или $r = 1$ соответственно и

$$\widetilde{c}_{\mu,\nu} = m\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,\nu}(s)\widetilde{\mathcal{J}}_{\mu,\nu}(u,v,s,r) \tag{3.13}$$

для $\nu \neq 0$ и любого r, где где

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,0}(s,t) = \sum_{\gamma}\overline{\widetilde{\psi}}(\gamma)e(\mu l_1')|t_1^2|^s|\widetilde{\vartheta}|^2\frac{1}{|t_2^2|^{\bar{t}}}; \tag{3.14}$$

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,\nu}(s) = \sum_{\gamma}\overline{\widetilde{\psi}}(\gamma)e(\mu l_1' + \nu l_3')\bar{\rho}(-\nu t_2^2)|t_1^2|^s|\widetilde{\vartheta}|^2\frac{1}{|t_2^2|}; \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathcal{J}}_{\mu,\nu}(u,v,s,t) = \\ = \iiint\limits_{\mathbb{C}^3}\left(U^{2s}V^{s+\bar{t}}\right)(\widehat{\sigma}\widetilde{w})\overline{e(\mu z_1)}\;dz_1\;dz_2\;dz_4,\end{gathered} \tag{3.16}$$

если $\nu = 0$, и

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathcal{J}}_{\mu,\nu}(u,v,s,t) = \\ = \iiint\limits_{\mathbb{C}^3}\left(U^{2s}V^{s+1}\right)(\widehat{\sigma}\widetilde{w})\mathrm{K}_{\bar{t}-1}(4\pi|\nu|V(\widehat{\sigma}\widetilde{w}))\overline{e(\mu z_1 - \nu Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w}))}\;dz_1 dz_2 dz_4\end{gathered}$$

в противном случае.

Здесь $\widetilde{w} = (z_1, z_2, 0, z_4, u, v) \in \mathbb{X}$,

$$\widetilde{\vartheta} = \left(\frac{d_1}{(d_1, d_2)}\right)^2, \quad t_1 = \frac{1}{d_1}, \quad t_2 = \frac{d_1}{d_1 d_4 - d_2 d_3},$$
$$l_1' = \frac{d_2}{d_1}, \quad l_3' = \frac{c_2 d_3 - c_4 d_1}{d_1 d_4 - d_2 d_3} \tag{3.17}$$

и

$$\widehat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Суммирование в рядах $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,0}(s,t)$ *и* $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,\nu}(s)$ *производится по некоторому множеству матриц* $\gamma \in \Gamma(\mathfrak{q})$, *где* $\gamma = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$ *такое же, как и в* (1.2), *причем это множество является полной системой представителей двойных смежных классов* $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q}) / {}^t\Delta$ *и оно выбрано таким образом, что* $b_4 d_1 - b_3 d_2 = 0$. *Кроме того, мы предполагаем, что* $\rho(\lambda) = 0$ *при* $\lambda \notin \mathfrak{q}^*$.

Все ряды и интегралы являются абсолютно сходящимися при достаточно большом $\Re(s)$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится несколько лемм.

Лемма 3.1.
1) *Если* $\gamma = n(l)$, $l = (l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{C}^4$, *то*

$$Z_3(\gamma w) = z_3 + l_3, \quad U(\gamma w) = u,$$
$$V(\gamma w) = v, \quad \widetilde{Q}(\gamma w) = (z_3 + l_3, v). \tag{3.19}$$

2) *Если* $\gamma = \operatorname{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1})$, $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$, *то*

$$Z_3(\gamma w) = z_3 t_2^2, \; U(\gamma w) = |t_1 t_2^{-1}| u,$$
$$V(\gamma w) = |t_2^2| v, \; \widetilde{Q}(\gamma w) = (t_2^2 z_3, |t_2^2| v). \tag{3.20}$$

Доказательство. См. ([2], предложение 2.3.1). •

Лемма 3.2. *Пусть* $\gamma = h_1(\alpha)$, $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. *Тогда*

$$\left(U^2V\right)(\gamma w) = u^2 v, \quad \widetilde{Q}(\gamma w) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \widetilde{Q}(w). \tag{3.21}$$

Доказательство. См. ([2], предложение 2.3.4). $\bullet$

Лемма 3.3. *Пусть* $\widetilde{w} = (z_1, z_2, 0, z_4, u, v) \in \mathbb{X}$, $a \in \mathbb{C}^*$ *и матрица* $\widehat{\sigma}$ *определена в* (3.18). *Тогда* $(U^2V)(\sigma w) = (U^2V)(\widehat{\sigma}\widetilde{w})$ *и*

$$\begin{aligned} &(a^2 Z_3(\sigma w), |a^2| V(\sigma w)) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{a^2}(z_3 + Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w})), \frac{1}{|a^2|} V(\widehat{\sigma}\widetilde{w}) \right). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Доказательство. Полагая

$$\widetilde{p} = h_1(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}), \quad \widetilde{\delta} = n(0,0,z_3,0), \quad \widetilde{\delta}' = h_1(\begin{pmatrix} 1 & z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}),$$

получаем, что $\sigma = \widetilde{p}\widehat{\sigma}$, $\widehat{\sigma}\widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}'\widehat{\sigma}$. Легко проверить, что $n(0,0,z_3,0)n(z_1,z_2,0,z_4) = n(z_1,z_2,z_3,z_4)$, поэтому $\widehat{\sigma}n(w)a(w) = \widetilde{\delta}'\widehat{\sigma}n(\widetilde{w})a(\widetilde{w})$ и, в силу изоморфизма (3.2), $\widehat{\sigma}w = \widetilde{\delta}'\widehat{\sigma}\widetilde{w}$. Отсюда, используя лемму 3.2, получаем:

$$\begin{aligned} (U^2V)(\sigma w) &= (U^2V)(\widetilde{p}\widehat{\sigma}w) = (U^2V)(\widehat{\sigma}w) = \\ &= (U^2V)(\widetilde{\delta}'\widehat{\sigma}\widetilde{w}) = (U^2V)(\widehat{\sigma}\widetilde{w}), \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}(\sigma w) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{Q}(\widehat{\sigma}w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{Q}(\widetilde{\delta}'\widehat{\sigma}\widetilde{w}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{Q}(\widehat{\sigma}\widetilde{w}) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (z_3 + Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w}), V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Используя формулу (3.7), видим, что в равенстве

$$\begin{aligned} &(a^2 Z_3(\sigma w), |a^2| V(\sigma w)) = \\ &\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{a^2}(z_3 + Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w})), \frac{1}{|a^2|} V(\widehat{\sigma}\widetilde{w}) \right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

левая часть есть ни что иное, как $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} (Z_3(\sigma w), V(\sigma w))$, правая часть равняется $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} (z_3 + Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w}), V(\widehat{\sigma}\widetilde{w}))$. Осталось заметить, что

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Доказательство теоремы 1. Из (3.10) и предложения 2.6 получаем:

$$\widetilde{c}_{\mu,\nu} = c \sum_{\gamma} \overline{\widetilde{\psi}}(\gamma) \times$$
$$\times \sum_{h} \overline{\widetilde{\psi}}(\sigma h \sigma^{-1}) \iiiint\limits_{\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}} \widetilde{\nabla}(\gamma\sigma h w) \overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)} dz_1 dz_2 dz_3 dz_4, \qquad (3.26)$$

где суммирование производится по $\gamma \in \widetilde{\Omega}$ и $h \in \sigma^{-1}\widetilde{\Lambda}_{\gamma}\sigma$. Так как $\widetilde{\psi}(\sigma h \sigma^{-1}) = \widetilde{\psi}(h) = 1$ при $h \in \Delta$, то, в силу предложения 2.6 и леммы 3.1,

$$\widetilde{c}_{\mu,\nu} = c \sum_{\gamma} \overline{\widetilde{\psi}}(\gamma) \iiiint\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}_{\gamma}} \widetilde{\nabla}(\gamma\sigma w) \overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)}\ dz_1\ dz_2\ dz_3\ dz_4. \qquad (3.27)$$

Согласно предложению 1.1, можно представить $\gamma\sigma$ как произведение $n(l)\ \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1})\ \sigma n(l') = n\widetilde{a}\sigma\widetilde{n}$, где n, $\widetilde{a}$ и $\widetilde{n}$ – соответственно первая, вторая и четвертая матрица в разложении (1.12). Также из этого предложения вытекает, что $l_3 = (b_4 d_1 - b_3 d_2)/(d_1 d_4 - d_2 d_3) = 0$. Таким образом, в силу леммы 3.1,

$$\begin{gathered} (U^2 V)(\gamma\sigma w) = |t_1^2|(U^2 V)(\sigma\widetilde{n}w), \\ \widetilde{Q}(\gamma\sigma w) = (Z_3(\widetilde{a}\sigma\widetilde{n}w), V(\widetilde{a}\sigma\widetilde{n}w)) = (t_2^2 Z_3(\sigma\widetilde{n}w), |t_2^2| V(\sigma\widetilde{n}w)). \end{gathered} \qquad (3.28)$$

Следовательно,

$$\widetilde{\nabla}(\gamma\sigma w) = |t_1^2|^s (U^2 V)(\sigma\widetilde{n}w)^s \bar{f}(t_2^2 Z_3(\sigma\widetilde{n}w), |t_2^2| V(\sigma\widetilde{n}w)).$$

Сделаем замену переменных $\widetilde{n}w \mapsto w$. Так как

$$n(l_1', l_2', l_3', l_4')\ n(z_1, z_2, z_3, z_4) = n(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4),$$

где $\tau_1 = z_1+l'_1$, $\tau_2 = z_2+l'_2+l'^2_1 z_3+2l'_1 z_4$, $\tau_3 = z_3+l'_3$, $\tau_4 = z_4+l'_4+l'_1 z_3$, то получаем:

$$\widetilde{c}_{\mu,\nu} = c\sum_{\gamma} \overline{\widetilde{\psi}}(\gamma)e(\mu l'_1 + \nu l'_3)|t_1^2|^s \widetilde{I},$$
$$\widetilde{I} =$$
$$= \iiiint\limits_{\widetilde{\mathcal{F}}_\gamma} (U^2V)(\sigma w)^s \bar{f}(t_2^2 Z_3(\sigma w), |t_2^2|V(\sigma w))\overline{e(\mu z_1 + \nu z_3)}dz_1 dz_2 dz_3 dz_4. \tag{3.29}$$

Далее, используя лемму 3.3, можно проверить, что

$$\widetilde{I} = \iiint\limits_{\mathbb{C}^3} (U^2V)(\widehat{\sigma}\widetilde{w})^s \overline{e(\mu z_1)}\, \widetilde{I}_3\ dz_1\ dz_2\ dz_4,$$
$$\widetilde{I}_3 = \int\limits_{\mathbb{C}/\widetilde{\vartheta}\mathfrak{q}} \bar{f}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{t_2^2}(z_3 + Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w})), \frac{1}{|t_2^2|}V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})\right))\overline{e(\nu z_3)}\ dz_3. \tag{3.30}$$

Для вычисления интеграла $\widetilde{I}_3$ следует отметить два факта. Во-первых, из формулы (3.17) вытекает, что $\widetilde{\vartheta}/t_2^2 \in \mathcal{O}$. Во-вторых,

$$\int\limits_{\mathbb{C}/\widetilde{\vartheta}\mathfrak{q}} e(\lambda z)\ dz = \begin{cases} \mathrm{vol}(\mathbb{C}/\mathfrak{q})|\widetilde{\vartheta}|^2, & \text{если } \lambda = 0, \\ 0, \ \text{если } \lambda\widetilde{\vartheta} \in \mathfrak{q}^*, & \lambda \neq 0. \end{cases} \tag{3.31}$$

Используя разложение Фурье формы f в (3.8), находим, что

$$f(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{t_2^2}(z_3 + Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w})), \frac{1}{|t_2^2|}V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})\right)) = c_0\left(\frac{1}{|t_2^2|}V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})\right) +$$
$$+ \sum_{\kappa\in\mathfrak{q}^*\setminus\{0\}} \frac{\rho(\kappa)}{|t_2^2|}V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})\mathrm{K}_{r-1}\left(\frac{4\pi|\kappa|}{|t_2^2|}V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})\right)e\left(\frac{\kappa}{t_2^2}(z_3 + Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w}))\right). \tag{3.32}$$

Подставив разложение (3.32) в формулу для $\widetilde{I}_3$ в (3.30), почленно интегрируя и используя замечания, приведенные выше, получаем, что

$$\widetilde{\overline{I}}_3 = \mathrm{vol}\,(\mathbb{C}/\mathfrak{q})|\widetilde{\vartheta}|^2 \begin{cases} \rho_+ \dfrac{V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})^r}{|t_2^2|^r} + \rho_- \dfrac{V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})^{2-r}}{|t_2^2|^{2-r}}, \\ \qquad\qquad \nu = 0,\ r \neq 1; \\ \rho_+ \dfrac{V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})}{|t_2^2|} \log \dfrac{V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})}{|t_2^2|} + \rho_- \dfrac{V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})}{|t_2^2|}, \\ \qquad\qquad \nu = 0,\ r = 1; \\ \rho(-\nu t_2^2) \dfrac{V(\widehat{\sigma}\widetilde{w})}{|t_2^2|} \mathrm{K}_{r-1}(4\pi|\nu| V(\widehat{\sigma}\widetilde{w}))\cdot \\ \qquad\qquad \cdot e(-\nu Z_3(\widehat{\sigma}\widetilde{w})),\ \nu \neq 0. \end{cases} \tag{3.33}$$

Окончательный результат вытекает из (3.29),(3.30) и формулы (3.33). •

4. О рядах $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,\nu}$

В предложении 2.4 мы описали полную систему представителей двойных смежных классов $\widetilde{\Delta}_\times \backslash \Gamma(\mathfrak{q})/\Delta$, удовлетворяющую в силу (2.4) условиям теоремы 1, и мы можем использовать этот факт для придания более удобного вида рядам $\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,\nu}$, присутствующим в формулировке данной теоремы. В самом деле, с помощью предложения 2.4 и теоремы 1, суммы (3.14) и (3.15) можно переписать в виде сумм по переменным $n_2, n_3, n_4 \equiv 1 \pmod 3$, $(n_2 n_3 n_4, \mathfrak{q}) = 1$ и $m_2 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_2(\widetilde{n})$, $m_3 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})$, $m_4 \in \widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})$, $\widetilde{n} = (n_2, n_3, n_4)$. Также мы можем переписать (3.17) в виде

$$\begin{gathered} \widetilde{\vartheta} = n_4^2, \quad t_1 = \frac{1}{n_2 n_3 n_4}, \quad t_2 = \frac{n_4}{n_2}, \quad l_1' = -\frac{m_4}{n_4}, \\ l_3' = \frac{m_2^2 l_3 n_4^2}{n_2^2 n_3} - \frac{m_3 l_4^2}{n_3} - \frac{2 m_2 n_4 l_4}{n_2 n_3}, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где l_2, l_3, l_4 есть правые верхние элементы матриц $\lambda^{(t)}_{m_i,n_i} = \begin{pmatrix} k_i & l_i \\ m_i & n_i \end{pmatrix}$, $i = 2, 3, 4$, заданных в (2.2).

Обратимся теперь к случаю, когда $\widetilde{\psi}$ является т.н. гомоморфизмом Басса–Милнора–Серра группы $\Gamma(3)$, κ – гомоморфизм группы $\Gamma_2(3)$ (см. [2, 5]):

$$\kappa(\gamma) = \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_2(3) \tag{4.2}$$

и $\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)$ есть символ кубического вычета. Как было установлено в ([2], предложение 2.2.9), $\widetilde{\psi}(h_i(\lambda)) = \kappa(\lambda)^{-1}$, $i = 1,3$, $\widetilde{\psi}(h_i(\lambda)) = \kappa(\lambda)$, $i = 2,4$. Отсюда мы получаем, что

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,0}(s,t) = \sum_{\substack{n_2,n_3,n_4 \equiv 1 \pmod 3 \\ (n_2n_3n_4,\mathfrak{q})=1}} \frac{\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,0,\widetilde{n})}{\|n_2\|^{s-\bar{t}}\|n_3\|^{s}\|n_4\|^{s+\bar{t}-2}}, \tag{4.3}$$

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\mu,\nu}(s) = \sum_{\substack{n_2,n_3,n_4 \equiv 1 \pmod 3 \\ (n_2n_3n_4,\mathfrak{q})=1, \nu n_4^2/n_2^2 \in \mathfrak{q}^*}} \frac{\bar{\rho}(-\nu n_4^2/n_2^2)\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,\nu,\widetilde{n})}{\|n_2\|^{s-1}\|n_3\|^{s}\|n_4\|^{s-1}}, \tag{4.4}$$

где $\|\cdot\|$ есть норма в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$,

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,\nu,\widetilde{n}) = \sum_{m_i \in \widetilde{\mathfrak{m}}_i(\widetilde{n})} \omega(m_2,m_3,m_4,\widetilde{n}), \tag{4.5}$$

где

$$\begin{gathered} \omega(m_2,m_3,m_4,\widetilde{n}) = \left(\frac{m_2}{n_2}\right)\overline{\left(\frac{m_3}{n_3}\right)}\left(\frac{m_4}{n_4}\right) \times \\ \times e\left(\nu\left(\frac{m_2^2 l_3 n_4^2}{n_2^2 n_3} - \frac{m_3 l_4^2}{n_3} - \frac{2m_2n_4l_4}{n_2n_3}\right) - \mu\frac{m_4}{n_4}\right) \end{gathered} \tag{4.6}$$

и $e(z) = \exp(2\pi i(z+\bar{z}))$.

Предположим, что $c' \in \mathcal{O}$ может быть представлено в виде ld^3, причем $l,d \in \mathcal{O}$, $(d,3)=1$ и для каждого простого числа p выполняется следующее условие: если $\operatorname{ord}_p l \geqslant 1$, то $\operatorname{ord}_p c \geqslant 1$. Тогда для $\lambda \in \mathfrak{q}^*$, $\mathfrak{q} \subset (3)$, $c \in 1+\mathfrak{q}$ мы определяем сумму Гаусса как

$$S(\lambda,c,c') = \sum_{k \in \mathfrak{c}(c,c')} \left(\frac{k}{c}\right)\left(\frac{k}{c'}\right) e(\lambda k/c), \tag{4.7}$$

где $\mathfrak{c}(c,c') \subset \mathfrak{q}$ — приведенная система вычетов $\bmod\ c$, состоящая из чисел, взаимно простых с c'.

В дальнейшем нам понадобятся следующие мультипликативные свойства этой суммы (см. [2]):

$$\begin{gathered} S(\lambda,c_1c_2,c_1'c_2') = \left(\frac{c_1}{c_2c_2'}\right)\left(\frac{c_2}{c_1c_1'}\right) S(\lambda,c_1,c_1')S(\lambda,c_2,c_2'), \\ \text{если } (c_1c_1',c_2c_2')=1, \end{gathered} \tag{4.8}$$

$$S(\delta\lambda, c, c') = \left(\frac{\delta}{cc'}\right)^{-1} S(\lambda, c, c'), \text{ если } \delta \in \mathcal{O}, (\delta, cc') = 1. \tag{4.9}$$

Мы будем использовать обозначение $\varphi(c)$ для функции Эйлера кольца $\mathcal{O}$. Тогда значения суммы Гаусса для степеней простого числа p, $p \equiv 1 \pmod 3$, можно представить в следующем виде (см. [2]):

$$S(p^\delta, p^\alpha, p^\beta) = \\ = \begin{cases} 1, \quad \text{если } \alpha = 0, \quad \beta \equiv 0 \pmod 3, \\ \varphi(p^\alpha), \text{ если } 1 \leqslant \alpha \leqslant \delta, \ \alpha + \beta \equiv 0 \pmod 3, \\ -\|p\|^\delta, \text{ если } \alpha = \delta + 1, \ \alpha + \beta \equiv 0 \pmod 3, \\ \|p\|^\delta S(1, p), \text{ если } \alpha = \delta + 1, \ \alpha + \beta \equiv 1 \pmod 3, \\ \|p\|^\delta \overline{S(1, p)}, \text{ если } \alpha = \delta + 1, \ \alpha + \beta \equiv 2 \pmod 3, \\ 0 \quad \text{во всех других случаях.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Для упрощения записи через $\mathfrak{m}(\widetilde{n})$, $\widetilde{n} = (n_2, n_3, n_4)$ будем обозначать подмножество полной системы вычетов $\operatorname{mod} n_2 n_3$, состоящее из чисел, взаимно простых с n_2. Пусть $\mathfrak{N}$ есть множество всех троек $\widetilde{n}$ таких, что корректно определена сумма Гаусса $S(\lambda, n_3, n_2^2)$. Тогда для $\nu \in \mathfrak{q}^*$ и тройки $\widetilde{n} \in \mathfrak{N}$ такой, что выполняется условие $\nu n_4^2/n_2^2 \in \mathfrak{q}^*$ (и, следовательно, $\nu n_4/n_2 \in \mathfrak{q}^*$), положим

$$\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}) = \sum_{m \in \mathfrak{m}(\widetilde{n})} \left(\frac{m}{n_2}\right) \overline{S\left(\nu\left(m\frac{n_4}{n_2} - 1\right)^2, n_3, n_2^2\right)}. \tag{4.11}$$

Данная сумма возникает при вычислении $\widetilde{\mathcal{E}}(\mu, \nu, \widetilde{n})$ и предложения 4.2–4.4 описывают свойства суммы $\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n})$.

Предложение 4.1. *Пусть* $p \equiv 1 \pmod 3$, $\beta \geqslant 1$, $\nu \geqslant 0$ *и*

$$\Sigma = \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta}} \\ m \equiv 1 \pmod p}} \overline{S(p^\nu (m-1)^2, p^\beta, p^{2\alpha})}.$$

Тогда

$$\Sigma = \begin{cases} \varphi(p^{\alpha+2\beta-1}), \quad \textit{если } \beta \leqslant \nu + 2, \ \alpha + 2\beta \equiv 0 \pmod 3; \\ \varphi(p^{\alpha+\beta+(\beta+\nu)/2}), \quad \textit{если } \beta > \nu + 2, \\ \qquad \beta + \nu - \textit{четно}, \ \alpha + 2\beta \equiv 0 \pmod 3; \\ 0 \quad \textit{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.12}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\Sigma = &\sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta}}\\ m\equiv 1 \pmod p}} \overline{S(p^{\nu}(m-1)^2, p^{\beta}, p^{2\alpha})} = \\ = &\sum_{m \pmod{p^{\alpha+\beta-1}}} \overline{S(p^{\nu+2}m^2, p^{\beta}, p^{2\alpha})}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

В силу (4.9), легко видеть, что

$$\begin{aligned}&\sum_{m \pmod{p^{\alpha+\beta-k}}} \overline{S(p^{\nu+2k}m^2, p^{\beta}, p^{2\alpha})} = \\ &= \overline{S(p^{\nu+2k}, p^{\beta}, p^{2\alpha})}\cdot \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta-k}}\\ (m,p)=1}} \left(\frac{m}{p}\right)^{\alpha+2\beta} + \\ &+ \sum_{m \pmod{p^{\alpha+\beta-k-1}}} \overline{S(p^{\nu+2(k+1)}m^2, p^{\beta}, p^{2\alpha})}\end{aligned} \tag{4.14}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\Sigma = &\overline{S(p^{\nu+2}, p^{\beta}, p^{2\alpha})}\cdot \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta-1}}\\ (m,p)=1}} \left(\frac{m}{p}\right)^{\alpha+2\beta} + \\ &+\overline{S(p^{\nu+4}, p^{\beta}, p^{2\alpha})}\cdot \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta-2}}\\ (m,p)=1}} \left(\frac{m}{p}\right)^{\alpha+2\beta} + \ldots + \\ &+\overline{S(p^{\nu+2(\alpha+\beta)}, p^{\beta}, p^{2\alpha})}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

В случае $\alpha+2\beta \not\equiv 0 \pmod 3$ в силу (4.10) мы получаем, что

$$\Sigma = \overline{S(p^{\nu+2(\alpha+\beta)}, p^{\beta}, p^{2\alpha})} = 0. \tag{4.16}$$

Если $\alpha+2\beta \equiv 0 \pmod 3$, то

$$\begin{aligned}\Sigma &= \overline{S(p^{\nu+2}, p^{\beta}, p^{2\alpha})}\,\varphi(p^{\alpha+\beta-1}) + \ldots + \overline{S(p^{\nu+2(\alpha+\beta)}, p^{\beta}, p^{2\alpha})}\,\varphi(1) = \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha+\beta} \overline{S(p^{\nu+2k}, p^{\beta}, p^{2\alpha})}\,\varphi(p^{\alpha+\beta-k}).\end{aligned} \tag{4.17}$$

При $\beta \leqslant \nu+2$ из (4.10) вытекает, что

$$\Sigma = \varphi(p^\beta)\sum_{k=1}^{\alpha+\beta}\varphi(p^{\alpha+\beta-k}) = \varphi(p^{\alpha+2\beta-1}). \tag{4.18}$$

Пусть $\beta > \nu+2$. Если $\beta+\nu$ — нечетно, то

$$\Sigma = -\|p\|^{\beta-1}\varphi(p^{\alpha+(\beta+\nu+1)/2}) + \varphi(p^\beta)\sum_{k=(\beta-\nu+1)/2}^{\alpha+\beta}\varphi(p^{\alpha+\beta-k}) = 0. \tag{4.19}$$

В случае четности числа $\beta+\nu$ получаем, что

$$\Sigma = \varphi(p^\beta)\sum_{k=(\beta-\nu)/2}^{\alpha+\beta}\varphi(p^{\alpha+\beta-k}) = \varphi(p^{\alpha+\beta+(\beta+\nu)/2}). \quad \bullet \tag{4.20}$$

Следующие два предложения посвящены вычислению значений $\mathcal{P}(p^\nu,\widetilde{p})$, где $\widetilde{p} = (p^\alpha, p^\beta, p^\gamma)$. Очевидно, что $\mathcal{P}(p^\nu,\widetilde{p})$ корректно задано во всех случаях, кроме $\beta = 0$, $\alpha \not\equiv 0 \pmod 3$.

Предложение 4.2. *Пусть $\widetilde{p} = (1, p^\beta, p^\gamma)$, $p \equiv 1 \pmod 3$, $\beta,\gamma,\nu \geqslant 0$. Тогда*

$$\mathcal{P}(p^\nu,\widetilde{p}) = \begin{cases} \overline{S(p^\nu,p^\beta)}\|p\|^\beta, & \text{\textit{если} } \gamma > 0; \\ \overline{S(p^\nu,p^\beta)}\varphi(p^\beta) + \varphi(p^{2\beta-1}), & \text{\textit{если} } \gamma = 0, \\ \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant \nu+2,\ \beta \equiv 0 \pmod 3; & \\ \varphi(p^{\beta+(\beta+\nu)/2}), & \text{\textit{если} } \gamma = 0,\ \beta > \nu+2, \\ \qquad \beta+\nu - \text{\textit{четно}},\ \beta \equiv 0 \pmod 3; & \\ 1, & \text{\textit{если} } \gamma = \beta = 0; \\ 0 & \text{\textit{во всех остальных случаях.}} \end{cases} \tag{4.21}$$

Доказательство. По определению суммы $\mathcal{P}(\nu,\widetilde{n})$ имеем:

$$\mathcal{P}(p^\nu,\widetilde{p}) = \sum_{m \pmod{p^\beta}} \overline{S(p^\nu(mp^\gamma-1)^2, p^\beta)}. \tag{4.22}$$

Если $\gamma > 0$, то $(mp^\gamma-1, p) = 1$, следовательно, в силу (4.9),

$$\mathcal{P}(p^\nu,\widetilde{p}) = \overline{S(p^\nu,p^\beta)}\sum_{m \pmod{p^\beta}}\left(\frac{mp^\gamma-1}{p}\right)^{2\beta} = \overline{S(p^\nu,p^\beta)}\,\|p\|^\beta. \tag{4.23}$$

Рассмотрим случай $\gamma = 0$. Очевидно, что при $\beta = 0$ выполняется $\mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p}) = 1$. Пусть $\beta \geqslant 1$. Тогда $\mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p}) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где

$$\Sigma_1 = \overline{S(p^\nu, p^\beta)} \sum_{\substack{m \pmod{p^\beta} \\ m \not\equiv 1 \pmod p}} \left(\frac{m-1}{p}\right)^{2\beta} =$$

$$= \begin{cases} \overline{S(p^\nu, p^\beta)}\,\varphi(p^\beta), \\ \text{ если } \beta \equiv 0 \pmod 3; \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.24}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{m \pmod{p^\beta} \\ m \equiv 1 \pmod p}} \overline{S(p^\nu (m-1)^2, p^\beta)}. \tag{4.25}$$

В силу предложения 4.1,

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \varphi(p^{2\beta-1}), \quad \text{если } \beta \leqslant \nu + 2,\ \beta \equiv 0 \bmod 3; \\ \varphi(p^{\beta+(\beta+\nu)/2}), \quad \text{если } \beta > \nu+2, \\ \beta + \nu - \text{четно},\ \beta \equiv 0 \pmod 3; \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.26}$$

Так как $\Sigma_1 = 0$ при $\beta > \nu + 2$, то получаем предложение. •

Предложение 4.3. *Пусть* $\widetilde{p} = (p^\alpha, p^\beta, p^\gamma) \in \mathfrak{N}$, $p \equiv 1 \pmod 3$, $\nu + 2\gamma - 2\alpha \geqslant 0$, $\alpha > 0$ *и*

$$\omega_p(x, y) = \sum_{\substack{m \pmod p, \\ m \not\equiv 0,1 \pmod p}} \left(\frac{m}{p}\right)^x \left(\frac{m-1}{p}\right)^y. \tag{4.27}$$

Тогда

$$\mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p})$$

$$
= \begin{cases} \overline{S(p^\nu, p^\beta)} \cdot \varphi(p^{\alpha+\beta}), \quad \textit{если} \;\; \gamma > \alpha, \;\; \alpha \equiv 0 \pmod 3; \\ \overline{S(p^{\nu+2\gamma-2\alpha}, p^\beta, p^{2\alpha})} \cdot \varphi(p^{\alpha+\beta}), \\ \qquad\qquad \textit{если} \;\; \gamma < \alpha, \;\; \alpha+\beta \equiv 0 \pmod 3; \\ \overline{S(p^\nu, p^\beta, p^{2\alpha})} \cdot ||p||^{\alpha+\beta-1} \cdot \omega_p(\alpha, \alpha+2\beta), \\ \qquad\qquad \textit{если} \;\; \gamma = \alpha, \;\; \beta \geqslant 1, \;\; \alpha+2\beta \not\equiv 0 \pmod 3; \\ \overline{S(p^\nu, p^\beta, p^{2\alpha})} \cdot ||p||^{\alpha+\beta-1} \cdot \omega_p(\alpha, 0) + \varphi(p^{\alpha+2\beta-1}), \\ \qquad \textit{если} \;\; \gamma = \alpha, \;\; 1 \leqslant \beta \leqslant \nu+2, \;\; \alpha+2\beta \equiv 0 \pmod 3; \\ \varphi(p^{\alpha+\beta+(\beta+\nu)/2}), \quad \textit{если} \; \gamma = \alpha, \;\; \beta > \nu+2, \\ \qquad\qquad \beta+\nu - \textit{четно}, \;\; \alpha+2\beta \equiv 0 \pmod 3; \\ \varphi(p^\alpha), \quad \textit{если} \;\; \gamma = \alpha, \;\; \beta = 0, \;\; \alpha \equiv 0 \pmod 3; \\ 0 \quad \textit{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.28}
$$

Доказательство. По определению суммы $\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n})$ имеем:

$$
\mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p}) = \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta}} \\ (m,p)=1}} \left(\frac{m}{p}\right)^\alpha \overline{S(p^\nu(mp^{\gamma-\alpha}-1)^2, p^\beta, p^{2\alpha})}. \tag{4.29}
$$

Так как $\widetilde{p} \in \mathfrak{N}$, то данная сумма определена для всех $\alpha, \beta, \gamma \geqslant 0$ кроме случая $\beta = 0$, $\alpha \not\equiv 0 \pmod 3$. Если $\gamma > \alpha$, то $(mp^{\gamma-\alpha}-1, p) = 1$ и, в силу (4.9),

$$
\begin{aligned} \mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p}) &= \overline{S(p^\nu, p^\beta, p^{2\alpha})} \cdot \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta}} \\ (m,p)=1}} \left(\frac{m}{p}\right)^\alpha = \\ &= \begin{cases} \overline{S(p^\nu, p^\beta)} \cdot \varphi(p^{\alpha+\beta}), \;\; \alpha \equiv 0 \pmod 3; \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \tag{4.30}
$$

Аналогично, если $\gamma < \alpha$, то $(m - p^{\alpha-\gamma}, p) = 1$, следовательно

$$
\mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p}) = \overline{S(p^{\nu+2\gamma-2\alpha}, p^\beta, p^{2\alpha})} \cdot \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta}} \\ (m,p)=1}} \left(\frac{m}{p}\right)^\alpha \left(\frac{m-p^{\alpha-\gamma}}{p}\right)^{\alpha+2\beta} =
$$

$$
= \begin{cases} \overline{S(p^{\nu+2\gamma-2\alpha}, p^\beta, p^{2\alpha})} \cdot \varphi(p^{\alpha+\beta}), \;\; \alpha+\beta \equiv 0 \pmod 3; \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.31}
$$

Осталось рассмотреть случай $\gamma = \alpha$. Очевидным образом для $\beta = 0$, $\alpha \equiv 0 \pmod 3$ получаем, что $\mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p}) = \varphi(p^\alpha)$. Пусть $\beta \geqslant 1$. Тогда $\mathcal{P}(p^\nu, \widetilde{p}) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где

$$\begin{aligned}\Sigma_1 = \overline{S(p^\nu, p^\beta, p^{2\alpha})} \sum_{\substack{m \pmod{p}^{\alpha+\beta} \\ m \not\equiv 0,1 \pmod p}} \left(\frac{m}{p}\right)^\alpha \left(\frac{m-1}{p}\right)^{\alpha+2\beta} = \\ = \overline{S(p^\nu, p^\beta, p^{2\alpha})} \cdot \|p\|^{\alpha+\beta-1} \cdot \omega_p(\alpha, \alpha+2\beta),\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{m \pmod{p^{\alpha+\beta}} \\ m \equiv 1 \pmod p}} \overline{S(p^\nu (m-1)^2, p^\beta, p^{2\alpha})}. \tag{4.33}$$

Значение Σ_2 вычислено в предложении 4.1. Так как $\Sigma_1 = 0$ при $\beta > \nu + 2$, то отсюда вытекает формула (4.28). $\bullet$

Замечание. Сумма $\omega_p(x, y)$ есть ни что иное, как сумма Якоби $J(\chi, \lambda)$, где $\chi(a) = \left(\dfrac{a}{p}\right)^x$, $\lambda(a) = \left(\dfrac{a}{p}\right)^y$.

Предложение 4.4. *Пусть* $\nu = \nu' p^{\nu_p}$, $\nu \neq 0$, $p \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 = n_2' p^\alpha$, $n_3 = n_3' p^\beta$, $n_4 = n_4' p^\gamma$ *и* $(\nu' n_2' n_3' n_4', p) = 1$, $\nu n_4^2 / n_2^2 \in \mathfrak{q}^*$, $\widetilde{n} \in \mathfrak{N}$. *Если* $\widetilde{n}' = (n_2', n_3', n_4')$, $\widetilde{p} = (p^\alpha, p^\beta, p^\gamma)$, *то*

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}) = \left(\frac{n_2'}{p}\right)^{2\alpha+\beta-\gamma-\nu_p} \left(\frac{n_3'}{p}\right)^{\alpha+\beta+\nu_p} \left(\frac{n_4'}{p}\right)^{2\alpha} \left(\frac{\nu'}{p}\right)^{2\alpha+\beta} \cdot \\ \cdot \mathcal{P}(\nu', \widetilde{n}') \cdot \mathcal{P}(p^{\nu_p}, \widetilde{p}).\end{aligned} \tag{4.34}$$

Доказательство. Используя свойство (4.8) суммы Гаусса, видим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}) = \sum_{m \in \mathfrak{m}(\widetilde{n})} \left(\frac{m}{n_2}\right) \overline{S\left(\nu \left(m \frac{n_4}{n_2} - 1\right)^2, n_3, n_2^2\right)} = \\ = \sum_{m \in \mathfrak{m}(\widetilde{n})} \left(\frac{m}{n_2'}\right) \left(\frac{m}{p^\alpha}\right) \left(\frac{p^\beta}{n_2'^2 n_3'}\right)^2 \left(\frac{n_3'}{p^{2\alpha+\beta}}\right)^2 \times \\ \overline{S\left(\nu \left(m \frac{n_4}{n_2} - 1\right)^2, n_3', n_2'^2\right)} \cdot \overline{S\left(\nu \left(m \frac{n_4}{n_2} - 1\right)^2, p^\beta, p^{2\alpha}\right)}.\end{aligned} \tag{4.35}$$

При соответствующем выборе системы представителей $\mathfrak{m}(\widetilde{n})$ для всякого $m \in \mathfrak{m}(\widetilde{n})$ мы можем представить это число единственным образом как $m = m_1 p^{\alpha+\beta} + m_2 n_2' n_3'$, где $m_1 \in \mathfrak{m}(\widetilde{n}')$ и $m_2 \in \mathfrak{m}(\widetilde{p})$. В самом деле, $n_2' n_3'$ и p взаимно просты, следовательно, для любого $m \in \mathfrak{m}(\widetilde{n})$ можно найти $m_1, m_2 \in \mathcal{O}$ такие, что $m = m_1 p^{\alpha+\beta} + m_2 n_2' n_3'$. Очевидно, что $(m_1, n_2') = 1$ и $(m_2, p) = 1$. Так как $m' = (m_1 + x n_2' n_3') p^{\alpha+\beta} + (m_2 + y p^{\alpha+\beta}) n_2' n_3' = m + (x+y) n_2 n_3 \equiv m$ $(\mathrm{mod}\ n_2 n_3)$ при $x, y \in \mathcal{O}$ и $(m', n_2) = 1$, то, заменяя m на m', можно считать, что $m_1 \in \mathfrak{m}(\widetilde{n}')$ и $m_2 \in \mathfrak{m}(\widetilde{p})$. Единственность разложения очевидна. Так как порядки групп $\mathfrak{m}(\widetilde{n})$ и $\mathfrak{m}(\widetilde{n}') \times \mathfrak{m}(\widetilde{p})$ совпадают, то $\mathfrak{m}(\widetilde{n}) = \mathfrak{m}(\widetilde{n}') \times \mathfrak{m}(\widetilde{p})$ и

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}) = &\left(\frac{n_2'^2 n_3'}{p}\right)^{2\beta} \left(\frac{n_3'}{p}\right)^{\alpha+2\beta} \left(\frac{n_2'}{p}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{n_2' n_3'}{p}\right)^{\alpha} \times \\ &\times \sum_{m_1 \in \mathfrak{m}(\widetilde{n}')} \left(\frac{m_1}{n_2'}\right) \overline{S\left(\nu\left(m_1 p^{\beta+\gamma} \frac{n_4'}{n_2'} - 1\right)^2, n_3', n_2'^2\right)} \times \\ &\times \sum_{m_2 \in \mathfrak{m}(\widetilde{p})} \left(\frac{m_2}{p}\right)^{\alpha} \overline{S\left(\nu\left(m_2 n_3' n_4' p^{\gamma-\alpha} - 1\right)^2, p^{\beta}, p^{2\alpha}\right)}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Так как $n_2' n_3' n_4'$ и p взаимно просты, то можно произвести замену переменных $m_1 \mapsto m_1 p^{\beta+\gamma}$, $m_2 \mapsto m_2 n_3' n_4'$. Используя эту замену, свойство (4.9) сумм Гаусса и равенство $\nu = \nu' p^{\nu_p}$, видим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}) = &\left(\frac{n_2'}{p}\right)^{2\alpha+\beta-\gamma} \left(\frac{n_3'}{p}\right)^{\alpha+\beta} \left(\frac{n_4'}{p}\right)^{-\alpha} \times \\ &\times \left(\frac{n_2'^2 n_3'}{p}\right)^{\nu_p} \left(\frac{\nu'}{p}\right)^{2\alpha+\beta} \mathcal{P}(\nu', \widetilde{n}') \cdot \mathcal{P}(p^{\nu_p}, \widetilde{p}).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Отсюда следует окончательный результат. •

Обозначим через $\mathfrak{L}$ множество троек $\widetilde{n} = (n_2, n_3, n_4)$ таких, что определена сумма Гаусса $S(\mu, n_4, n_2 n_3)$ и пусть, как обычно, $\mathfrak{N}$ есть множество троек $\widetilde{n}$ таких, что определена сумма Гаусса $S(\lambda, n_3, n_2^2)$.

Предложение 4.5. *Пусть* $(n_2 n_3 n_4, \mathfrak{q}) = 1$, $\mu, \nu \in \mathfrak{q}^*$, $\nu \neq 0$, $\nu n_4^2 / n_2^2 \in \mathfrak{q}^*$ *и* $\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n})$ *есть сумма в (4.11). Тогда*

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mu, 0, \widetilde{n}) = \|n_3\| \cdot S(\mu, n_4) \cdot \overline{S(0, n_3)} \cdot S(0, n_2), \tag{4.38}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,\nu,\widetilde{n}) = \begin{cases} S(\mu,n_4,n_2n_3)\mathcal{P}(\nu,\widetilde{n}), & \text{если } \widetilde{n}\in\mathfrak{N}\cap\mathfrak{L}, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.39}$$

Доказательство. Случай $\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,0,\widetilde{n})$ очевиден. Пусть $\nu\neq 0$. В силу китайской теоремы об остатках и условия (2.2), можно выбрать множество $\widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})$ таким образом, что для всех матриц $\lambda^{(n_2n_3)}_{m_4,n_4}$ выполняется условие $m_4l_4\equiv -1 \pmod{n_2n_3n_4}$ и, следовательно, $(m_4,n_2n_3)=1$ при $m_4\in\widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})$. Кроме того, множество $\widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})$ выбирается таким образом, что для всех $m_3\in\widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})$ выполняется условие $(m_3,n_2)=1$.

Следует отметить тот факт, что хотя суммирование в $\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,\nu,\widetilde{n})$ ведется по переменным $m_i\in\widetilde{\mathfrak{m}}_i(\widetilde{n})$, $i=2,3,4$, но можно рассмотреть также сумму

$$\sum_{\substack{m_2 \pmod{n_2n_3},\, m_3 \pmod{n_3},\\ (m_2,n_2)=1,(m_3,n_3)=1,\\ m_4\in\widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})}} \omega(m_2,m_3,m_4,\widetilde{n}), \tag{4.40}$$

где $\omega(m_2,m_3,m_4,\widetilde{n})$ задано в (4.6). В силу (2.2) и условия $\nu n_4^2/n_2^2\in\mathfrak{q}^*$ (из которого также вытекает, что $\nu n_4/n_2\in\mathfrak{q}^*$) значение $\omega(m_2,m_3,m_4,\widetilde{n})$ не зависит от выбора системы представителей классов вычетов. Так как $n_2n_3n_4$ взаимно просто с идеалом $\mathfrak{q}$, то можно выбрать m_2,m_3 так, что $m_i\in\widetilde{\mathfrak{m}}_i(\widetilde{n})$, $i=2,3$, следовательно, значение суммы в (4.40) совпадает со значением $\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,\nu,\widetilde{n})$.

В силу отмеченного выше, можно сделать замену переменных $m_3\equiv m_3'm_4^2 \pmod{n_3}$, $m_2\equiv m_2'm_4 \pmod{n_2n_3}$. Тогда получаем, что $l_3\equiv l_3'\widehat{m}_4^2 \pmod{n_3}$, где $m_4\widehat{m}_4\equiv 1 \pmod{n_2n_3}$. Поэтому:

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,\nu,\widetilde{n}) =$$

$$= \sum_{\substack{m_2' \pmod{n_2n_3},\, m_3' \pmod{n_3},\\ (m_2',n_2)=1,(m_3',n_3)=1,\\ m_4\in\widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})}} \left(\frac{m_2'}{n_2}\right)\left(\frac{m_4}{n_2}\right)\overline{\left(\frac{m_3'}{n_3}\right)}\left(\frac{m_4}{n_3}\right)\left(\frac{m_4}{n_4}\right)\times$$

$$\times e\left(-\mu\frac{m_4}{n_4}+\nu\left(-\frac{m_3'}{n_3}+\frac{m_2'^2l_3'n_4^2}{n_2^2n_3}+2\frac{m_2'n_4}{n_2n_3}\right)\right) = \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}, \tag{4.41}$$

где

$$\mathcal{A} = \sum_{m_4\in\widetilde{\mathfrak{m}}_4(\widetilde{n})} \left(\frac{m_4}{n_4}\right)\left(\frac{m_4}{n_2n_3}\right) e\left(-\mu\frac{m_4}{n_4}\right), \tag{4.42}$$

$$\mathcal{B}=\sum_{\substack{m_2\in\mathfrak{m}(\widetilde{n}),\\ m_3\in\widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})}}\left(\frac{m_2}{n_2}\right)\overline{\left(\frac{m_3}{n_3}\right)}e\left(\nu\left(-\frac{m_3}{n_3}+\frac{m_2^2l_3n_4^2}{n_2^2n_3}+2\frac{m_2n_4}{n_2n_3}\right)\right). \tag{4.43}$$

Произведя в сумме $\mathcal{B}$ замену переменной $m_2\equiv m_2'm_3 (\mathrm{mod}\ n_2n_3)$, получаем:

$$\mathcal{B}=\sum_{\substack{m_2'\in\mathfrak{m}(\widetilde{n}),\\ m_3\in\widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})}}\left(\frac{m_2'}{n_2}\right)\left(\frac{m_3}{n_2}\right)\overline{\left(\frac{m_3}{n_3}\right)}\times \tag{4.44}$$

$$\times e\left(\nu\left(-\frac{m_3}{n_3}-\frac{m_2'^2m_3n_4^2}{n_2^2n_3}+2\frac{m_2'm_3n_4}{n_2n_3}\right)\right).$$

Пусть $\widetilde{n}\in\mathfrak{N}$, следовательно, $\mathcal{B}=\mathcal{P}(\nu,\widetilde{n})$. Если $\widetilde{n}\in\mathfrak{L}$, то $\mathcal{A}=S(\mu,n_4,n_2n_3)$. Если $\widetilde{n}\notin\mathfrak{L}$, то существует такое простое число p, что $\alpha+\beta\not\equiv 0 \pmod 3$, $\gamma=0$, где $\alpha=\mathrm{ord}_pn_2$, $\beta=\mathrm{ord}_pn_3$, $\gamma=\mathrm{ord}_pn_4$. Из предложения 4.4 вытекает, что $|\mathcal{B}|=|\mathcal{P}(\nu',\widetilde{n}')|\cdot|\mathcal{P}(p^{\nu_p},\widetilde{p})|$ в обозначениях данного предложения. В силу предложений 4.2, 4.3, $|\mathcal{P}(p^{\nu_p},\widetilde{p})|=0$, следовательно, $\widetilde{\mathcal{E}}(\mu,\nu,\widetilde{n})=\mathcal{A}\mathcal{B}=0$.

Пусть $\widetilde{n}\notin\mathfrak{N}$. Тогда существует простое число p такое, что $\beta=0$ и $\alpha\not\equiv 0 \pmod 3$, где $\alpha=\mathrm{ord}_pn_2$, $\beta=\mathrm{ord}_pn_3$, $\gamma=\mathrm{ord}_pn_4$. Мы хотим показать, что в этом случае $\mathcal{B}=0$.

Для любого $\lambda\in\mathfrak{q}^*$, $\mathfrak{q}\subset(3)$, $c\in 1+\mathfrak{q}$ и произвольного числа $c'\in\mathcal{O}$ обозначим через $S(\lambda,c,c';\mathfrak{c}(c,c'))$ следующую сумму:

$$S(\lambda,c,c';\mathfrak{c}(c,c'))=\sum_{k\in\mathfrak{c}(c,c')}\left(\frac{k}{c}\right)\left(\frac{k}{c'}\right)e\left(\lambda k/c\right), \tag{4.45}$$

где $\mathfrak{c}(c,c')\subset\mathfrak{q}$– приведенная система вычетов $\mod c$, состоящая из чисел, взаимно простых с c'. Положим также

$$\mathcal{P}(\nu,\widetilde{n};\mathfrak{c}(n_3,n_2^2))=$$

$$\sum_{m\in\mathfrak{m}(\widetilde{n})}\left(\frac{m}{n_2}\right)\overline{S\left(\nu\left(m\frac{n_4}{n_2}-1\right)^2,n_3,n_2^2;\mathfrak{c}(n_3,n_2^2)\right)}. \tag{4.46}$$

В силу условия $\nu n_4^2/n_2^2\in\mathfrak{q}^*$ данная сумма не зависит от выбора системы представителей $\mathfrak{m}(\widetilde{n})$. Очевидно, что $\mathcal{B}=\mathcal{P}(\nu,\widetilde{n};\widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n}))$.

Предположим, что $(c_1c_1', c_2c_2') = 1$, $k_1 \in \mathfrak{q}$ пробегает приведенную систему вычетов $\mod c_1$, состоящую из чисел, взаимно простых с c_1' и делящихся на c_2', $k_2 \in \mathfrak{q}$ пробегает приведенную систему вычетов $\mathrm{mod} c_2$, состоящую из чисел, взаимно простых с c_2' и делящихся на c_1'. Стандартные рассуждения показывают, что $c_1k_2+c_2k_1 \in \mathfrak{q}$ пробегает приведенную систему вычетов $\mathrm{mod}\, c_1c_2$, состоящую из чисел, взаимно простых с $c_1'c_2'$. Отсюда следует, что можно так выбрать множества $\mathfrak{c}(c_1, c_1')$ и $\mathfrak{c}(c_2, c_2')$, что $c_1k_2 + c_2k_1$ пробегает множество $\mathfrak{c}(c_1c_2, c_1'c_2')$, если k_1 пробегает $\mathfrak{c}(c_1, c_1')$ и k_2 пробегает $\mathfrak{c}(c_2, c_2')$. Учитывая данное замечание, можно дословно повторить доказательство мультипликативных свойств (4.8), (4.9) сумм Гаусса (см. [2]) и получить, что

$$S(\lambda, c_1c_2, c_1'c_2'; \mathfrak{c}(c_1c_2, c_1'c_2')) = \left(\frac{c_1}{c_2c_2'}\right)\left(\frac{c_2}{c_1c_1'}\right)$$

$$\times S(\lambda, c_1, c_1'; \mathfrak{c}(c_1, c_1'))S(\lambda, c_2, c_2'; \mathfrak{c}(c_2, c_2')),$$

$$\text{если } (c_1c_1', c_2c_2') = 1, \tag{4.47}$$

$$S(\delta\lambda, c, c'; \mathfrak{c}_1(c, c')) = \left(\frac{\delta}{cc'}\right)^{-1} S(\lambda, c, c'; \mathfrak{c}_2(c, c')),$$

$$\text{если } \delta \in \mathcal{O}, (\delta, cc') = 1. \tag{4.48}$$

Используя эти свойства и повторяя доказательство предложения 4.4, получаем, что

$$|\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}; \mathfrak{c}(n_3, n_2^2))| = |\mathcal{P}(\nu', \widetilde{n}'; \mathfrak{c}(n_3', n_2'^2))| \cdot |\mathcal{P}(p^{\nu_p}, \widetilde{p}; \mathfrak{c}(p^\beta, p^{2\alpha}))|.$$

в обозначениях данного предложения. Пусть p такое, что $\beta = 0$ и $\alpha \not\equiv 0 \pmod 3$. Тогда по определению (4.46),

$$\mathcal{P}(p^{\nu_p}, \widetilde{p}; \mathfrak{c}(1, p^{2\alpha})) = \sum_{m \in \mathfrak{m}(\widetilde{p})} \left(\frac{m}{p}\right)^\alpha \left(\frac{k}{p}\right)^{2\alpha}, \tag{4.49}$$

где $k \in \mathfrak{c}(1, p^{2\alpha})$. Очевидно, что сумма в формуле (4.49) равна нулю, следовательно, $\mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}; \mathfrak{c}(n_3, n_2^2)) = 0$ при $\widetilde{n} \notin \mathfrak{N}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\nu, \widetilde{n}; \widetilde{\mathfrak{m}}_3(\widetilde{n})) = 0$. $\bullet$

Литература

1. N. V. Proskurin, *On cubic symplectic metaplectic forms,* J. für die reine und angew. Math. **388** (1988), 158–188.
2. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions,* Springer–Verlag, Lecture Notes in Math. **1677** (1998), 1–196.
3. T. Kubota, *On automorphic functions and reciprocity law in a number theory,* Lecture in Math. Kyoto Univ. **2** (1969).
4. R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series,* Springer–Verlag, Lecture Notes in Math. **544** (1976), 1–337.
5. H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for* $\mathrm{SL}_n(n \geqslant 3)$ *and* $\mathrm{Sp}_{2n}(n \geqslant 2)$, Institut des Hautes Études Scientifiques, Publ. Math. **33** (1967), 59–137.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:dmitry@pdmi.ras.ru

Поступило 4 ноября 1999 г.