Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

**К. И. Пименов**

# О ТЕОРЕМЕ КРУЛЛЯ-ШМИДТА ДЛЯ АРТИНОВЫХ МОДУЛЕЙ

## 1. Введение

Классическая теорема Крулля–Шмидта гарантирует однозначность разложения в прямую сумму неразложимых слагаемых для модулей конечной длины, то есть артиновых и нетеровых одновременно. Ее доказательство опирается на утверждение о локальности кольца эндоморфизмов неразложимого модуля. Вопрос о справедливости того же факта для артиновых, но не обязательно нетеровых модулей был поставлен Круллем еще в 1932 году. Отрицательный ответ на этот вопрос был дан в работе [1]. Основополагающий положительный результат в этом направлении был получен Уорфилдом [2]. Пусть модуль является объединением возрастающей цепочки модулей конечной длины. Тогда для него верна теорема Крулля–Шмидта, и если он неразложим, то его кольцо эндоморфизмов локально. В случае артинова модуля это условие означает, что длина его ряда Лёви (см. [3]) не превосходит $\omega$. Таковы, например, все артиновы модули над коммутативными или нетеровыми кольцами. Поэтому при поиске аномальных прямых разложений интерес представляли лишь артиновы модули длины, большей $\omega$. В дальнейшем класс колец, для артиновых модулей над которыми имеет место однозначность прямых разложений, обозначим через $\mathfrak{A}$. Сразу же возникает вопрос, какое требование, обобщающее коммутативность, нужно наложить на кольцо $R$, чтобы $R$ попадало в класс $\mathfrak{A}$. Сложность заключается в том, что, как показано в [4], аномалии прямых разложений для артиновых модулей длины $\omega + 1$ возникают уже над простейшим некоммутативным ненетеровым кольцом $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$. Указанное кольцо обладает разнохарактеристическими полями вычетов, что в этой ситуации оказывается существенным. И в случае кольца конечного ранга от подобного ограничения не избавиться, если мы хотим сконструировать какие-либо аномалии. В данной статье мы даем частичный ответ на вопрос, какие условия следует наложить на кольцо без кручения конечного ранга, чтобы оно попадало в класс $\mathfrak{A}$. В частности, оказывается, что локальное кольцо конечного ранга всегда принадлежит $\mathfrak{A}$. Любопытно, что в этом случае появляются модули с длиной, большей $\omega$, удовлетворяющие теореме Крулля–Шмидта.

Открытым оставался вопрос, что происходит для произвольного локального кольца. Условие, при котором локальное кольцо принадлежит $\mathfrak{A}$, было сформулировано в [5]. Ниже будет показано, как оно может быть переформулировано для нелокальных колец и как переносится на этот случай доказательство. Там же был приведен пример локального кольца, не удовлетворяющего этому условию. В третьем разделе статьи показано, что над этим кольцом возникают аномалии прямых разложений того же сорта, что и в [4].

## 2. Теорема Крулля-Шмидта

Для начала обсудим вспомогательные технические моменты, необходимые для формулировки нашей теоремы Крулля–Шмидта. Пусть $k$ – коммутативное кольцо, $R$ – $k$-алгебра. Естественный гомоморфизм из $k$ в $R$ обозначим через $i_R$. Будем говорить, что $R$ – локально конечная алгебра над $k$ , если любая подалгебра, порожденная конечным числом элементов, оказывается конечно порожденной как $k$-модуль. Заметим, во-первых, что любая подалгебра локально конечной $k$-алгебры является локально конечной, а во-вторых, если $k$ содержится в теле $T$, являющемся локально конечной алгеброй над $k$, то $k$ – поле, и $T$ алгебраично над $k$.

**Лемма 1.** *Пусть $R$ – локально конечная алгебра над $k \subset R$. Если $M \cong R/I$ – простой $R$-модуль, то $k \cap I$ – максимальный идеал в $k$.*

Ясно, что $N(I) = \{r \in R | Ix \subset I\}$ – подалгебра в $R$. Тогда тело $T = \mathrm{End}_R(M)$ изоморфно $N(I)/I$ и является локально конечной $k$-алгеброй. Следовательно, $i_T(k) \cong (k + I)/I$ – поле, что и требовалось.

**Лемма 2.** *Пусть в условиях предыдущей леммы $k$ – полулокальное кольцо, и пусть $f \in M_n(T)$ – обратимая матрица. Тогда существует многочлен $p(x) \in k[x]$ с обратимым свободным членом такой, что $p(f) = 0$.*

Компоненты матрицы $f$ порождают тело, конечномерное над полем $i_T(k)$. Поэтому $f$ лежит в конечномерной алгебре над $i_T(k)$ и является, по теореме Кэли–Гамильтона, корнем своего характеристического многочлена, коэффициенты которого лежат в поле $i_T(k)$. Осталось заметить, что при подъеме этого многочлена из $i_T(k)[x]$ до многочлена из $k[x]$ свободный член остается обратимым, поскольку кольцо $k$ полулокально.

**Лемма 3.** *Пусть в условиях леммы 1 $M, N$ – полупростые $R$-модули конечной длины. Тогда для любого $f \in \mathrm{Aut}\,(M)$ найдется многочлен $p(x) \in k[x]$ такой, что $p(f) = 0$, а умножение на свободный член является автоморфизмом $N$.*

Пусть $R/J_1, \ldots, R/J_m$ – различные простые слагаемые $M$ и $N$. По лемме 1, кольцо $k' = k/(k \cap J_1 \ldots \cap J_m)$ полулокально. Модули $M$ и $N$ остаются полупростыми и если их рассматривать как модули над кольцом $R' = k' \otimes_k R$. Применяя лемму 2, найдем многочлен $p'(x) \in k'[x]$ с обратимым свободным членом и такой, что $p'(f) = 0$. При поднятии его коэффициентов в $k$, получаем требуемый многочлен.

Для произвольного кольца $R$ через $\overline{R}$ обозначим его факторкольцо по радикалу $R/\mathrm{Rad}\,R$, через $Z(R)$ – центр $R$. Пусть $\overline{Z(R)} = Z(R)/(\mathrm{Rad}\,R \cap Z(R))$.

**Теорема.** *Пусть $R$ – такое кольцо, что факторкольцо $\overline{R}$ локально конечно над $\overline{Z(R)}$. Тогда для любого артинова $R$-модуля $M$ выполнена обобщенная лемма Фиттинга, а значит, и теорема Крулля–Шмидта.*

Доказательство почти дословно повторяет рассуждения из работы [5]. Видоизменения претерпевают лишь пункты а) и б) теоремы 1 в [5]. Если задан $f \in \mathrm{End}\,(M)$ такой, что $\overline{f} \in \mathrm{End}\,(M/\mathrm{Rad}\,M)$ обратим, то мы можем применить лемму 3 к $\overline{Z(R)}$, $\overline{R}$, $M/\mathrm{Rad}\,M$ и $\mathrm{Soc}\,M$. Находим многочлен $p(x) \in k[x]$ такой, что $p(f) = \lambda + fq(f)$ и $p(\overline{f}) = 0$. Лемма 3 гарантирует нам, что умножение в $M$ на $\lambda \in k$ индуцирует автоморфизм цоколя $\mathrm{Soc}\,M$, следовательно, является автоморфизмом $M$, лежащим в центре кольца эндоморфизмов. Таким образом, если $p(f)$ локально нильпотентен при ограничении на какой-то $f$-инвариантный подмодуль, то $f$ обратим при ограничении на этот подмодуль. Доказательство пункта в) остается без изменений, только ссылка на теорему Гамильтона–Кэли заменяется ссылкой на лемму 3.

**Следствие 1.** *Пусть $R$ – кольцо, аддитивная группа которого является абелевой группой конечного ранга. Если все простые $R$-модули конечны, то $R \in \mathfrak{A}$.*

Действительно, $\overline{R}$ будет являться локально конечной алгеброй над $\mathbb{Z}$.

**Следствие 2.** *Если $R$ – локальное кольцо, тело вычетов которого – либо конечное поле, либо конечномерно над $\mathbb{Q}$, то $R \in \mathfrak{A}$.*

Требует разбора лишь второй случай. Заметим, что, поскольку обратный к любому обратимому элементу из центра кольца $R$ тоже принадлежит центру, то кольцо $\overline{Z(R)}$ является полем и потому содержит $\mathbb{Q}$. Следовательно, тело вычетов локального кольца $R$ локально конечно над $\overline{Z(R)}$.

**3. Контрпример к теореме Крулля–Шмидта над локальным кольцом**

Доказанные утверждения убеждают нас в том, что если пример, опровергающий теорему Крулля–Шмидта для артиновых модулей над локальным кольцом $R$, существует, то тело вычетов $\overline{R}$ не должно быть алгебраическим над $\overline{Z(R)}$. Такие примеры в самом деле имеются в простейшем случае, когда локальное кольцо $R$ ненетерово, некоммутативно и $\overline{R}$ содержит элемент, трансцедентный над $\overline{Z(R)}$.

Пусть $F = k(x)$, $A$ – локализация $k[x]$ по идеалу, порожденному $x$, $\Lambda$ – локализация $F[t]$ по идеалу, порожденному $t$. Рассмотрим $k$-алгебру $R$, порождённую кольцом $\Lambda$ и элементом $a$, в которой выполнены соотношения $aRa = 0$, $at = 0$, $ta = ax$. Легко видеть, что элементы $t$ и $a$ лежат в радикале $R$. Поэтому $R$ является локальным кольцом, причем сквозное отображение $F \to R \to R/\operatorname{Rad} R$ является изоморфизмом. Пусть $V = F^n$, $M_0 \subset V$ – подгруппа, являющаяся $A$-модулем и такая, что $FM_0 = V$. Тогда для любого $v \in V$ найдется такое натуральное число $n$, что $x^n v \in M_0$. Факторгруппа $\overline{M} = V/M_0$ оказывается артиновым модулем над $A$. Покажем, как по подгруппе $M_0$ построить артинов модуль над $R$. Зададим действие $R$ на абелевой группе $X = V \oplus (F \otimes_k \overline{M})$ следующим образом:

$$\begin{aligned} f(v, l \otimes \overline{m}) &= (fv, (fl) \otimes \overline{m}) \\ t(v, l \otimes \overline{m}) &= (0, l \otimes \overline{xm}) \\ a(v, l \otimes \overline{m}) &= (0, 1 \otimes \overline{v}). \end{aligned}$$

Определение умножения на $t$ не зависит от элемента $m$, который мы выбираем в качестве представителя $\overline{m}$, поскольку $xM_0 \subset M_0$. Фиксированный элемент обнуляется достаточно большими степенями $t$, так что действие $\Lambda$ определено корректно. Легко проверяется, что все соотношения между образующими кольца $R$ сохраняются при таком определении, так что $X$ превращается в модуль над $R$. Для проверки того, что он артинов, убедимся, что $\operatorname{Rad} X = F \otimes_k \overline{M}$ – артинов $R$-модуль. Рассмотрим соответствие $\alpha : N \longmapsto F \otimes_k N$ между $A$-подмодулями в $\overline{M}$ и $R$-подмодулями в $\operatorname{Rad} X$. Если $Y$ – подмодуль в $\operatorname{Rad} X$, то на нем задано действие $\Lambda$. Положим $N = Y \cap (1 \otimes \overline{M})$ и отождествим $N$ с подгруппой в $\overline{M}$. С $R$-модуля $Y$ на $N$ переносится действие $k[t]$, при котором $t$ действует умножением на $x$. Таким образом, $N$ оказывается $A$-подмодулем в $\overline{M}$. Очевидно, $\alpha(N) = Y$, поэтому соответствие $\alpha$ биективно. Поскольку $\overline{M}$ – артинов $k[x]$-модуль, то $X$ – артинов $R$-модуль.

Утверждается, что имеется биекция между прямыми разложениями $M_0$ и прямыми разложениями $X$. Эндоморфизм $\Theta_0$ $A$-модуля $M_0$ продолжается на $V$ и задает согласованную пару $(\Theta_V, \overline{\Theta})$ эндоморфизмов $V$ и $\overline{M}$:

$$\overline{\Theta_V(v)} = \overline{\Theta}(\overline{v}).$$

Эта пара определяет эндоморфизм $\Theta_X : X \to X$ естественным образом:

$$\Theta_X(v, l \otimes \overline{m}) = (\Theta_V(v), l \otimes \overline{\Theta}(\overline{m})).$$

Мы определили мономорфизм $\Phi : \operatorname{End}_A(M_0) \to \operatorname{End}_R(X)$. Проверим, что это изоморфизм. Действительно, пусть $\Upsilon$ – эндоморфизм $X$. Он индуцирует эндоморфизм $\Upsilon_V$ пространства $V$. Кроме того,

$$\Upsilon(0, 1 \otimes \overline{m}) = \Upsilon(a(m, 0)) = a\Upsilon(m, 0) = a(\Upsilon_1(m), 0) = (0, \overline{\Upsilon_1(m)}).$$

Гомоморфизм $\overline{M}$, задаваемый таким образом, обозначим через $\overline{\Upsilon}$. Ясно, что пара $(\Upsilon_V, \overline{\Upsilon})$ согласована и определяет эндоморфизм $\Upsilon_0$ $A$-модуля $M_0$ такой, что $\Upsilon = \Phi(\Upsilon_0)$.

Как только мы выберем модуль $M_0$ с аномальными прямыми разложениями, мы сразу же получаем пример артинова $R$-модуля с теми же самыми аномалиями. Но такие модули $M_0$ могут быть построены точно так же, как в [6] построен пример локальной абелевой группы конечного ранга без кручения с аномалиями прямых разложений.

## Литература

1. A. Facchini, D. Herbera, P. Vamos, L. S. Levy, *Krull-Schmidt fails for Artinian modules,* Proc. Amer. Math. Soc. **123**, No. 12 (1995), 3587–3592.
2. R. B. Warfield, *Theorem for infinite sums of modules,* Proc. Amer. Math. Soc. **22** (1969), 460–465.
3. A. Facchini, *Module Theory,* Progress in math. **167** (1998).
4. K. Pimenov, A. Yakovlev, *Artinian modules over a matrix ring,* in: *Infinite Length Modules*, Birchauser (2000) (в печати).
5. К. И. Пименов, *Теорема Крулля-Шмидта для артиновых модулей над локальными кольцами,* Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 300–305.
6. D. M. Arnold, *Finite rank torsion free abelian groups and rings,*. Lect. Notes in Math. **931** (1982).

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 февраля 2000 г.