Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

О. М. Фоменко

НЕОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ АВТОМОРФНЫХ L-ФУНКЦИЙ В ЦЕНТРЕ КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ

1. Введение

Пусть $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ – пространство голоморфных $\Gamma_0(N)$-параболических форм целого веса k и характера $\chi \pmod N$; при четном k будем обозначать

$$S_k(\Gamma_0(N), 1) = S_k(\Gamma_0(N)), \quad S_k(\Gamma) = S_k,$$
$$\Gamma = \Gamma_0(1) = SL(2, \mathbf{Z}).$$

Пусть $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}, \quad z \in H = \{z = x + iy : y > 0\};$$

$$a_f(n) n^{-\frac{k-1}{2}} = b_f(n);$$

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{-s}, \quad s = \sigma + it;$$

$$L_f\left(s + \frac{k-1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_f(n) n^{-s} = \mathcal{H}_f(s).$$

Свойства введенной L-функции хорошо известны: ряд Дирихле для $\mathcal{H}_f(s)$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, функция $\mathcal{H}_f(s)$ продолжается на всю плоскость как целая функция и удовлетворяет функциональному уравнению типа "$s \to 1 - s$".

Будем рассматривать тот случай, когда $k \geqslant 2$ – постоянное четное число, $N = p$ – растущее простое число. Пусть $\mathcal{F}$ – ортогонализированный базис Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_k(\Gamma_0(p))$; предполагается нормализация: если $a_f(1) \neq 0$, то $a_f(1) = 1$. Пусть $\mathcal{F}_0$ – множество всех новых форм пространства $S_k(\Gamma_0(p))$. Формы из $\mathcal{F}_0$ удовлетворяют оценке Делиня: $|b_f(n)) \leqslant d(n)$; кроме того, $b_f(n)$ – вещественные числа. Напомним также, что $b_f(1) = 1$, если $f \in \mathcal{F}_0$. L-ряды форм из $\mathcal{F}_0$ обладают эйлеровским произведением. На пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$ вводится метрика Петерсона $\langle f, g\rangle$; пусть

$$\omega_f = \frac{\Gamma(k-1)\cdot a_f(1)}{(4\pi)^{k-1}}\langle f, f\rangle.$$

В работе автора [1] был доказан следующий результат: при постоянном четном $k \geqslant 2$ для случая пространства $S_k(\Gamma_0(p))$ имеем при $p \to \infty$

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0} \omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right)^2 = \log p + c_1 + O(p^{-1}\log^4 p), \tag{1}$$

где c_1 зависит лишь от k; (в [1] принималось условие: четное $k \geqslant 4$, это излишне ограничительно – можно брать четное $k \geqslant 2$). В случае $k = 2$ близкий результат доказал Дьюк [2]; в его работе рассматривались $\Gamma_0(p)$-параболические формы, скрученные с характером Дирихле. Уже соотношение (1) вместе с результатом [3] об отсутствии зигелевского нуля у симметрического квадрата L-ряда Гекке новой формы (что дает нужную оценку (5), см. ниже) позволяет доказать существование многих $f \in \mathcal{F}_0$ с $L_f\left(\frac{k}{2}\right) \neq 0$ при больших p, а именно,

$$\text{их количество } \gg p^{\frac{3}{4}-\varepsilon}.$$

В настоящей работе в §2 эта оценка улучшается, а именно, доказывается

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}_0$ – множество всех новых форм пространства $S_k(\Gamma_0(p))$. Тогда при постоянном четном $k \geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0 : L_f\left(\frac{k}{2}\right)\neq 0} 1 \gg \frac{p}{\log^2 p} \quad (p\to\infty).$$

Дьюк [2] получил аналогичный результат в случае $k = 2$.

В §3 рассматривается сходная задача для пространства S_k с растущим k. Пусть $f(z)$ – Γ-собственная форма Гекке четного веса $k \geqslant 12$. Очевидно, в случае $k \equiv 2 \pmod 4$ $L_f(s)$ обладает свойством $L_f\left(\frac{k}{2}\right) = 0$; это следует из функционального уравнения. Поэтому будем рассматривать случай $k \equiv 0 \pmod 4$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F}$ – множество всех собственных форм Гекке пространства S_k. Тогда при $k = 4k_1 \to \infty$, имеем*

$$\sum_{f\in\mathcal{F}:L_f\left(\frac{k}{2}\right)\neq 0} 1 \gg \frac{k}{\log^2 k}.$$

Ранее результат $\ldots \gg \sqrt{k}$ получил Конен [4].

Наконец, в §4 устанавливается связь свойства ортогональности форм старого класса, принадлежащего базису Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_{12}(\Gamma_0(p))$ (см. [5] и §2 настоящей работы), с известной гипотезой Лемера.

§2. Доказательство теоремы 1

Сначала докажем

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{F}_0$ – множество всех новых форм пространства $S_k(\Gamma_0(p))$. Тогда при постоянном четном $k \geqslant 2$ имеем $(p \to \infty)$*

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0} \omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right) = 1 + O(p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}),$$

где здесь и ниже $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число.

При доказательстве будем сначала рассматривать случаи $2 \leqslant k \leqslant 10, 14$, для которых $S_k = \varnothing$ и, следовательно, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Для простоты подробно рассмотрим случай $k = 6$.

Как хорошо известно (см. [6]), в случае новой формы $f(z) \in \mathcal{F}_0$ имеет место закон преобразования

$$f(z) = Cp^{\frac{k}{2}}\left(\frac{pz}{i}\right)^{-k} f\left(\frac{-1}{pz}\right),$$

где $C = \pm 1$, с помощью которого можно представить $L_f\left(\frac{k}{2}\right)$ в виде быстро сходящегося ряда. Имеем

$$A^3\Gamma(3)L_f(3) = \int_u^\infty \left(\sum_{n\geqslant 1} a_f(n)e^{-nt/A}\right) t^3\frac{dt}{t} +$$

$$+C^{-1}\int_{1/u}^\infty \left(\sum_{n\geqslant 1} a_f(n)e^{-nt/A}\right) t^3\frac{dt}{t},$$

где $A = (2\pi)^{-1}p^{1/2}$, u – произвольное положительное число. Пусть

$$u = x^{-1}p^{1/2}, \quad x = p^{1+\varepsilon}.$$

После некоторых вычислений имеем

$$L_f(3) = \frac{1}{\Gamma(3)} \sum_{n\geqslant 1} a_f(n) e^{-2\pi n/x} \times \left(\frac{(2\pi)^2}{x^2 n} + 2\frac{(2\pi)}{xn^2} + 2\frac{1}{n^3} \right) +$$

$$+C^{-1} \frac{1}{\Gamma(3)} \sum_{n\geqslant 1} a_f(n) e^{-2\pi n x/p} \times \left(\frac{(2\pi)^2 x^2}{np^2} + 2\frac{(2\pi)x}{n^2 p} + 2\frac{1}{n^3} \right) =$$

$$= S_1 + S_2. \tag{2}$$

В силу выбора x сумма S_2 очень мала; она оценивается сверху величиной $O(p^{-c})$, где $c > 0$ – любая константа. Для доказательства предложения нам необходимы некоторые факты. Напомним сначала классическую формулу Петерсона для пространства $S_k(\Gamma_0(p))$. Пусть $\{\varphi(z)\}$ – ортонормированный базис пространства $S_k(\Gamma_0(p))$,

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}(n) e^{2\pi i n z}.$$

Тогда

$$\frac{\Gamma(k-1)}{\{4\pi\sqrt{nm}\}^{k-1}} \sum_{\varphi} \widehat{\varphi}(n)\widehat{\varphi}(m) = \delta_{nm} +$$

$$+2\pi i^k \sum_{\substack{c>0 \\ c\equiv 0 \pmod p}} \frac{1}{c} S(n,m;c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right),$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, $S(n,m;c)$ – сумма Клостермана, $J_{k-1}(x)$ – функция Бесселя порядка $k-1$. Справедливы оценки

$$|S(n,m;c)| \leqslant (n,m,c)^{1/2} d(c) c^{1/2}$$

(А. Вейль)

и

$$|J_{k-1}(x)| \leqslant \frac{(x/2)^{k-1}}{\Gamma(k-1)}. \tag{3}$$

Формула Петерсона в сочетании с этими оценками позволяет вывести неравенство

$$\left|\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f\frac{a_f(n)}{n^{k/2}}-\delta_{n1}\right|\ll p^{-\frac{k+1}{2}}n^{\frac{k-2}{2}},\tag{4}$$

причем $\ll$-константа зависит только от k. Далее нам необходима оценка [3]

$$\frac{p}{\log p}\ll\langle f,f\rangle\quad(f\in\mathcal{F}_0)\tag{5}$$

и классический факт

$$\#\mathcal{F}\asymp p.$$

Сформулированные результаты позволяют на основании (2) доказать следующее соотношение

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f L_f(3)=\frac{1}{\Gamma(3)}\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f\sum_{1\leqslant n\leqslant p^{1+2\varepsilon}}a_f(n)\times$$
$$\times\left(\frac{(2\pi)^2x^2}{np^2}+2\frac{(2\pi)x}{n^2p}+2\frac{1}{n^3}\right)e^{-2\pi n/p^{1+\varepsilon}}+O(p^{-1000})=$$
$$=\sum\nolimits_I+\sum\nolimits_{II}+\sum\nolimits_{III}+O(p^{-1000}).$$

Суммы $\sum_I$, $\sum_{II}$, $\sum_{III}$ изучаем с помощью (4). Имеем

$$\sum\nolimits_{III}=\frac{1}{\Gamma(3)}2e^{-2\pi/p^{1+\varepsilon}}\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f a_f(1)+$$
$$+\frac{1}{\Gamma(3)}\sum_{2\leqslant n\leqslant p^{1+2\varepsilon}}2e^{-2\pi n/p^{1+\varepsilon}}\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f\frac{a_f(n)}{n^3}=$$
$$=\frac{2}{\Gamma(3)}e^{-2\pi/p^{1+\varepsilon}}(1+O(p^{-\frac{7}{2}}))+O\left(\sum_{2\leqslant n\leqslant p^{1+2\varepsilon}}p^{-\frac{7}{2}}n^2\right)=$$
$$=1+O(p^{-\frac{1}{2}+6\varepsilon}).$$

Аналогично,

$$\sum\nolimits_{II}\ll p^{-\frac{1}{2}+7\varepsilon},$$
$$\sum\nolimits_{I}\ll p^{-\frac{1}{2}+8\varepsilon},$$

и в рассматриваемом частном случае предложение доказано. Так же рассматриваются остальные k, для которых $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Рассмотрим теперь веса $k = 12, 16, 18, 20, 22, 26$, для которых пространство S_k одномерно. В этих случаях базис Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_k(\Gamma_0(p))$ состоит из множества новых форм $\{f(z)\}$ и одного старого класса $\{\Delta(z), \Delta(pz)\}$, где $\Delta(z)$ – собственная форма Гекке из S_k; первый коэффициент Фурье этой формы есть 1. Старый класс ортогонален всем новым формам. Если p такое, что $\langle\Delta(z), \Delta(pz)\rangle = 0$, то базис Гекке–Аткина–Ленера является ортогональным; если же $\langle\Delta(z), \Delta(pz)\rangle \neq 0$, то базис Гекке–Аткина–Ленера надо ортогонализировать. Для этого заменим старый класс на $\{\Delta(z), \Delta(z) + \lambda\Delta(pz)\}$, где λ удовлетворяет условию

$$\langle\Delta(z), \Delta(z) + \lambda\Delta(pz)\rangle = 0.$$

Для упрощения положим

$$\langle\Delta(z) + \lambda\Delta(pz), \Delta(z) + \lambda\Delta(pz)\rangle = P.$$

Нам будут необходимы оценки

$$\begin{gathered}\langle\Delta(z), \Delta(z)\rangle^{-1} \ll \frac{1}{p};\\ P^{-1} + |\lambda| p^{-k/2} P^{-1} \ll \frac{\log^4 p}{p}.\end{gathered} \tag{6}$$

Первая оценка тривиальна, а вторая доказана в [1].

Пусть $\Delta(z) + \lambda\Delta(pz) = H(z)$, тогда

$$H(-1/pz) = p^{k/2} z^k \{p^{k/2}\Delta(pz) + \lambda p^{-k/2}\Delta(z)\} = p^{k/2} z^k H_1(z).$$

Пользуясь всеми этими соотношениями вместе с приведенными выше аргументами, доказываем следующее равенство

$$\sum_{f\in\mathcal{F}_0} \omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right) = 1 + O(p^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (p \to \infty).$$

Имеем

$$\sum_{f\in\mathcal{F}} \omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right) = \sum_{f\in\mathcal{F}_0} \omega_f L\left(\frac{k}{2}\right) + \omega_{\Delta(z)} L_{\Delta(z)}\left(\frac{k}{2}\right) +$$

$$+\begin{cases} \omega_H L_H\left(\frac{k}{2}\right), & \text{если} \quad \langle\Delta(z),\Delta(pz)\rangle \neq 0; \\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Очевидно,

$$\omega_{\Delta(z)} L_{\Delta(z)}\left(\frac{k}{2}\right) \ll \frac{1}{p};$$

$$\omega_H L_H\left(\frac{k}{2}\right) = \omega_H(1+\lambda p^{-k/2}) L_{\Delta(z)}\left(\frac{k}{2}\right) \ll \frac{\log^4 p}{p};$$

при этом мы воспользовались (6). Предложение в рассматриваемых случаях доказано. Изучение случаев $k > 26$ протекает вполне аналогично. Предложение доказано полностью.

Теперь вернемся к доказательству теоремы 1. По неравенству Коши

$$\left(\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{f\in\mathcal{F}_0 : L_f\left(\frac{k}{2}\right)\neq 0}\omega_f\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{f\in\mathcal{F}_0}\omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right)^2\right).$$

Применяя к последнему неравенству соотношение (1), предложение 1 и (5), доказываем теорему.

§3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим базис $\mathcal{F}$ пространства S_k, состоящий из нормализованных собственных форм Гекке $f(z)$, $k \equiv 0 \pmod 4$. Доказательство теоремы 2 сходно с доказательством теоремы 1. В [7, 8] получен следующий результат:

$$\sum_{f\in\mathcal{F}}\omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right)^2 = 4\log k + c_2 + O(k^{-\frac{1}{2}}\log k), \tag{7}$$

где c_2 – абсолютная константа.

Нам необходимо следующее

Предложение 2. *При* $k\to\infty$

$$\sum_{f\in\mathcal{F}}\omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right) = 1 + O(k^{-2+\varepsilon}),$$

где здесь и ниже $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число.

Пользуясь функциональным уравнением для $\mathcal{H}_f(s)$, представим $\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)$ следующим образом (ср. [9]):

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_f(n) e^{-n/U} n^{-1/2} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma=-\beta} \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2} - s\right) \Psi\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma(s) U^s \, ds,$$

где

$$\Psi(s) = (2\pi)^{2s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + s\right)},$$

$0 < \beta < 1$, $U \geqslant 1$; мы выбираем $\beta = 1 - \varepsilon$.

Далее, из формулы Петерсона для пространства S_k с помощью оценки А. Вейля суммы Клостермана и оценки функции Бесселя (3) выводим неравенство

$$\left| \sum_{f \in \mathcal{F}} \omega_f \frac{b_f(n)}{n^{1/2}} - \delta_{n1} \right| \ll \frac{n^{\frac{k-2}{2}}}{\Gamma(k-1)}, \tag{8}$$

причем $\ll$-константа является абсолютной. Кроме того, нам необходима оценка [3]

$$\frac{\Gamma(k)}{(4\pi)^k \log k} \ll \langle f, f \rangle \quad (f \in \mathcal{F}) \tag{9}$$

и классический факт

$$\#\mathcal{F} \asymp k.$$

Имеем

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \omega_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{f \in \mathcal{F}} \omega_f \frac{b_f(n)}{n^{1/2}} e^{-n/U} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \sum_{f \in \mathcal{F}} \omega_f \int\limits_{\sigma=-\beta} \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2} - s\right) \Psi\left(s + \frac{1}{2}\right) \Gamma(s) U^s \, ds =$$

$$= S_1 - S_2.$$

Положим $U = k^{2-\varepsilon_0}$, где $o < \varepsilon_0 < 1$ – сколь угодно малое постоянное число. Сформулированные выше факты, и в частности, (9) позволяют легко доказать неравенство

$$S_2 \ll U^{-\beta} \log k.$$

Перейдем к изучению S_1. Суммирование по n разобьем на три: $n = 1$, $2 \leqslant n \leqslant U^{1+\varepsilon_0/4}$, $n > U^{1+\varepsilon_0/4}$; соответственно,

$$S_1 = \sum\nolimits_I + \sum\nolimits_{II} + \sum\nolimits_{III}.$$

Используя (8), получим

$$\sum\nolimits_I = \sum_{f\in\mathcal{F}} \omega_f b_f(1) e^{-1/U} = \left(1 + \frac{O(1)}{\Gamma(k-1)}\right) \times$$

$$\times (1 + O(U^{-1})) = 1 + O(U^{-1}).$$

Переходим к $\sum_{II}$. Имеем $U^{1+\varepsilon_0/4} = k^{2-\varepsilon_1}$, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0^2/4$; с помощью (8) получаем

$$\sum\nolimits_{II} \ll \sum_{2\leqslant n\leqslant U^{1+\varepsilon_0/4}} \frac{n^{\frac{k-2}{2}}}{\Gamma(k-1)} \ll \frac{1}{\Gamma(k-1)} \left(U^{1+\varepsilon_0/4}\right)^{\frac{k}{2}} \ll \frac{1}{k^{1000}}.$$

Наконец,

$$\sum\nolimits_{III} \ll \frac{1}{k^{1000}}.$$

Предложение доказано.

Переходим к доказательству теоремы. По неравенству Коши

$$\left(\sum_{f\in\mathcal{F}} \omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{f\in\mathcal{F}: L_f\left(\frac{k}{2}\right)\neq 0} \omega_f\right) \times$$

$$\times \left(\sum_{f\in\mathcal{F}} \omega_f L_f\left(\frac{k}{2}\right)\right)^2.$$

Применяя к последнему неравенству соотношение (7), предложение 2 и (9) доказываем теорему.

§4. Свойство ортогональности и гипотеза Лемера

В связи с доказательством теоремы 1 возникает один любопытный вопрос.

Пусть $k = 12$, рассмотрим старый класс в базисе Гекке-Аткина–Ленера

$$\{\Delta(z), \Delta(pz)\},$$

$\Delta(z)$ – хорошо известная параболическая форма Рамануджана,

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) e^{2\pi i n z},$$

$\tau(n)$ – функция Рамануджана. Естественно спросить, для каких p формы старого класса ортогональны:

$$\langle \Delta(z), \Delta(pz) \rangle = 0.$$

Ответ дает

Предложение 3. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

1) $\langle \Delta(z), \Delta(pz) \rangle = 0$;

2) $\tau(p) = 0$.

Лемер предположил, что $\tau(p) \neq 0$ для любых p. В настоящее время показано, что $\tau(p) \neq 0$ для всех $p < C$, где C – очень большая константа. Кроме того, доказано [10, 11], что множество тех p, для которых $\tau(p) = 0$, имеет нулевую плотность. Поэтому весьма вероятно, что всегда $\langle \Delta(z), \Delta(pz) \rangle \neq 0$.

Обратимся теперь к доказательству предложения 3, которое очень просто. Пусть $f(z)$, $g(z)$ – ненулевые параболические формы из пространства $S_k(\Gamma_0(N))$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z},$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_g(n) e^{2\pi i n z}.$$

Определим L-функцию $L_{f,g}(s)$ следующим образом ([6]):

$$L_{f,g}(s) = \zeta_N(2s) \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) \overline{a_g(n)} n^{-(s+k-1)},$$

где
$$\zeta_N(s) = \prod_{p\nmid N}(1-p^{-s})^{-1}.$$

Напомним, что поведение $L_{f,g}(s)$ в окрестности точки $s=1$ тесно связано с $\langle f,g\rangle$, поскольку в этой окрестности
$$L_{f,g}(s) = \frac{c\langle f,g\rangle}{s-1} + d + \dots ,$$
где константа $c \neq 0$. Имеет место результат Ранкина: $L_{f,g}(g)$ – целая функция, если $\langle f,g\rangle = 0$, и всюду голоморфна за исключением точки $s=1$, в которой имеется простой полюс с вычетом $c\langle f,g\rangle$, $c\neq 0$, если $\langle f,g\rangle \neq 0$ (см. [6]).

Пользуясь простыми фактами теории Гекке, легко показать, что
$$L_{\Delta(z),\Delta(pz)}(s) = \frac{\tau(p)}{p^{11/2}}\,\frac{(1-p^{-2s})}{(1+p^{-s})}\,L_{\Delta(z),\Delta(z)}(s).$$

С другой стороны, в окрестности точки $s=1$
$$L_{\Delta(z),\Delta(pz)}(s) = \frac{c_1\langle\Delta(z),\Delta(pz)\rangle}{s-1} + d_1 + \dots ,$$
где константа $c_1 \neq 0$;
$$L_{\Delta(z),\Delta(z)}(s) = \frac{c_2\langle\Delta(z),\Delta(z)\rangle}{s-1} + d_2 + \dots ,$$
где константа $c_2\langle\Delta(z),\Delta(z)\rangle \neq 0$. Поэтому
$$\langle\Delta(z),\Delta(pz)\rangle = 0 \Longleftrightarrow \tau(p) = 0.$$

Литература

1. О. М. Фоменко, *Применения формулы Петерсона для билинейной формы от коэффициентов Фурье параболических форм,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 143–166.
2. W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level,* Invent. Math. **119**, No. 1 (1995), 165–174.
3. J. Hoffstein, P. Lockhart, *Coefficient of Maass forms and the Siegel zero, appendix by Goldfeld, D., Hoffstein, J., Lieman, D. An effective zero free region,* Ann. Math. **140** (1994), 161–181.
4. W. Kohnen, *Modular forms of half-integral weight on* $\Gamma_0(4)$*,* Math. Ann. **248**, No. 3 (1980), 249–266.
5. A. O. L. Atkin, J. Lehner, *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$*,* Math. Ann. **185**, No. 2 (1970), 134–160.

6. A. P. Ogg, *On a convolution of L-series,* Invent. Math. **7**, No. 4 (1969), 297–312.
7. Н. В. Кузнецов, *Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна–Мааса,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **129** (1983), 43–84.
8. Р. Ф. Файзиев, *Оценка в среднем в аддитивной проблеме делителей,* В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Теория чисел и ее приложения" (17-19 сентября 1985 г., Тбилиси), Тбилиси, 1985, 273–276.
9. M. Jutila, *On the mean value of $L\left(\frac{1}{2},\chi\right)$ for real characters,* Analysis **1**, No. 2 (1981), 149–161.
10. J.-P. Serre, *Une interprétation des congruences relatives à la fonction τ de Ramanujan,* Sémin. théor. nombres Délange–Pisot–Poitou, Fac. sci. Paris, 1967-1968, **9**, No. 1 (1969), 14/01-14/17; русский перевод: Математика. Период. сб. перев.ин. статей **13**, No. 4 (1969), 3–15.
11. P. Deligne, *Formes modulaires et représentations l-adiques,* Lect. Notes Math. **179** (1971), 139–172; русский перевод в книге: Серр Ж.-П., Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые, М., 1973.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 18 октября 1999 г.