Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

О. М. Фоменко

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

1. Пусть n – натуральное число, $l = 2k \geqslant 4$ – фиксированное чётное число, $r_l(n)$ – количество представлений n суммой l квадратов целых чисел, $0 < A < 1$ – постоянное число;

$$r(n, A) = \sum_{-A \leqslant w/\sqrt{n} \leqslant A} r_{l-1}\left(n - w^2\right)$$

– количество целых точек в сферическом поясе l-мерной сферы $E_l(x_1, \dots, x_l) = n$, где

$$E_l(x_1, x_2, \dots, x_l) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_l^2.$$

В работе [1] было доказано: при $(n, 2) = 1$

$$\sum_{-A \leqslant w/\sqrt{n} \leqslant A} r_{l-1}\left(n - w^2\right) = \mu_l(A) r_l(n) + O\left(n^{\frac{l}{2} - 1 - \alpha(l) + \varepsilon}\right),$$

где

$$\alpha(l) = \frac{l-2}{2l+2}; \tag{1}$$

$$\mu_l(A) = \int\limits_{-A}^{A} (1 - w^2)^{\frac{l-3}{2}} dw \Bigg/ \int\limits_{-1}^{1} (1 - w^2)^{\frac{l-3}{2}} dw,$$

$O(\ ) = O_{l,A,\varepsilon}(\ )$; здесь и ниже ε – сколь угодно малое постоянное положительное число.

Сочетая метод работы [1] с теоремой 2 [2], можно усилить результат (1) до

$$\alpha(l) = \frac{l-2}{2l}.$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-01-00099).

Сформулируем это утверждение для $l = 4$: при $(n, 2) = 1$ имеем

$$\sum_{-A \leqslant w/\sqrt{n} \leqslant A} r_3\left(n - w^2\right) = \mu_4(A)\, r_4(n) + O\left(n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right). \tag{2}$$

Сравним (2) с классической проблемой шара:

$$\sum_{n \leqslant N} r_3(n) = \frac{4}{3}\,\pi N^{3/2} + O\left(N^{\beta+\varepsilon}\right),$$

где

$$\beta = \frac{2}{3} \quad \text{(И. М. Виноградов [3] и Чен [4]);}$$
$$\beta = \frac{29}{44} \quad \text{(Чамизо и Иванец [5]);}$$
$$\beta = \frac{21}{32} \quad \text{(Хис-Браун [6]).}$$

Цель настоящей работы – улучшить (2).

Теорема. *При* $(n, 2) = 1$ *имеем*

$$\sum_{-A \leqslant w/\sqrt{n} \leqslant A} r_3\left(n - w^2\right) = \mu_4(A)\, r_4(n) + O\left(n^{\frac{1487}{2000}}\right). \tag{3}$$

где $O(\ ) = O_A(\ )$.

При получении (3) мы усовершенствовали способ доказательства (2) за счет сочетания его с методом работы Е. П. Голубевой [7]; подробнее об этом сказано ниже. Доказательство теоремы содержится в п.п. 2–4.

2. Для доказательства теоремы необходимо ввести в рассмотрение сглаженную характеристическую функцию отрезка $[-A, A]$, обозначаемую через $\chi_\Delta(t)$ и построенную в [8]; будем рассматривать любое четное $l = 2k \geqslant 4$.

Пусть $\chi(t)$ – характеристическая функция отрезка $[-A, A]$, Δ – малое положительное число. $\chi_\Delta(t)$ – сглаженная характеристическая функция отрезка $[-A, A]$, обладающая следующими свойствами: $\chi_\Delta(t)$, $|t| < \infty$, – четная функция; $\chi_\Delta(t) = 1$, если $|t| \leqslant A$; $\chi_\Delta(t) = 0$, если $|t| \geqslant A + \Delta$; $0 \leqslant \chi_\Delta(t) \leqslant 1$, если $A \leqslant |t| \leqslant A + \Delta$, причем на $-A - \Delta \leqslant t \leqslant -A$ функция $\chi_\Delta(t)$ возрастает от 0 до

1 и представляется многочленом степени $2r+1$ ($r>0$ – произвольное фиксированное целое число) таким, что $\chi_\Delta^{(f)}(-A-\Delta)=0$, $\chi_\Delta^{(f)}(-A)=0$, причем

$$\chi_\Delta^{(f)}(t)=O\left(\frac{1}{\Delta^f}\right), \quad -A-\Delta\leqslant t\leqslant -A \quad (f=1,\dots,r);$$

на $A\leqslant t\leqslant A+\Delta$ функция $\chi_\Delta(t)$ убывает от 1 до 0 и обладает аналогичными свойствами.

Разложим функцию $\chi_\Delta(t)$ по многочленам Гегенбауэра $C_m^{k-1}(t)$, $|t|\leqslant 1$, $m=0,1,2,\dots$, которые образуют ортогональный базис пространства $L^2([-1,1];(1-t^2)^{k-3/2}dt)$. Обозначим через (f,g) скалярное произведение в этом пространстве. Имеем

$$\chi_\Delta(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\alpha_m\,C_m^{k-1}(t), \tag{4}$$

где

$$\alpha_m=\frac{1}{N_m}\int_{-1}^{1}\chi_\Delta(t)C_m^{k-1}(t)\left(1-t^2\right)^{k-3/2}dt,$$

$$N_m=\left(C_m^{k-1}(t),\,C_m^{k-1}(t)\right).$$

Как показано в [8], для любых $m\geqslant 1$ и $r=0,1,2,\dots$

$$\alpha_m=O_{r,A}\left(\frac{1}{(\Delta_m)^r\,m^{k-1}}\right).$$

Вернемся к случаю $l=4$. Имеем

$$r(n,A)=\sum_{-1\leqslant w/\sqrt{n}\leqslant 1}r_3(n-w^2)\,\chi\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right);$$

пусть

$$S_4=\sum_{-1\leqslant w/\sqrt{n}\leqslant 1}r_3\left(n-w^2\right)\chi_\Delta\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right). \tag{5}$$

Имеем

$$r(n,A)-S_4=-2\sum_{A<w/\sqrt{n}\leqslant A+\Delta}r_3\left(n-w^2\right)\chi_\Delta\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right).$$

Найдем асимптотику для этой величины. Здесь нам потребуется метод Е. П. Голубевой [7]. Пусть

$$S(E_3,a,q)=\sum_{x,y,x (\operatorname{mod} q)} e^{\frac{2\pi ia\, E_3(x,y,z)}{q}}$$

– гауссова сумма. Известно (см. [9]), что

$$r_3(n)=2\pi\sqrt{n}\ \mathfrak{S}_3(n),$$

где

$$\mathfrak{S}_3(n)=\sum_{q=1}^{\infty}q^{-3}\sum_{a (\operatorname{mod} q)}{}' S(E_3,a,q)e^{-\frac{2\pi ian}{q}}=\sum_{q=1}^{\infty}q^{-3}\,R(n,q)$$

– сингулярный ряд; $\sum\limits_{a (\operatorname{mod} q)}{}'$ означает суммирование по приведенной системе вычетов. Известно также [9], что

$$r_4(n)=\pi^2 n\,\mathfrak{S}_4(n),$$

где

$$\mathfrak{S}_4(n)=\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4}\sum_{a (\operatorname{mod} q)}{}' S(E_4,a,q)\,e^{-\frac{2\pi ian}{q}}=\sum_{q=1}^{\infty}q^{-4}\,R_1(n,q)$$

– сингулярный ряд,

$$S(E_4,a,q)=\sum_{x,y,x,w (\operatorname{mod} q)} e^{\frac{2\pi ia\, E_4(x,y,z,w)}{q}}$$

– гауссова сумма. Е. П. Голубева вычислила асимптотику суммы ($2k\geqslant 2$ – четное число)

$$\sum_{\substack{m=n-w^{2k}\\ 0\leqslant w\leqslant An^{\frac{1}{2k}}}}\sqrt{m}\,\rho(m), \tag{6}$$

где $\rho(m)$ – сингулярный ряд задачи

$$m=Q(x,y,z),\quad Q(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2,$$

$a_i>0$ $(i=1,2,3)$ – целые числа, $D=a_1a_2a_3$. Пусть

$$L\left(s,\left(\frac{-m}{\cdot}\right)\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{-m}{r}\right)r^{-s}\quad (\operatorname{Re}s>1)$$

– L-ряд Дирихле с квадратичным характером $\left(\frac{-m}{\cdot}\right)$. Рассмотрим прямоугольник

$$\sigma \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1, \quad |\operatorname{Im} s| < T \quad \left(\sigma > \frac{1}{2},\ T > 1\right). \tag{7}$$

Е. П. Голубева заметила, что при отсутствии нулей у $L\left(s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d,2)=1$, сингулярный ряд

$$\rho(m) = \sum_{q=1}^{\infty} R(m,q)/q^3,$$

где

$$R(m,q) = \sum_{a (\operatorname{mod} q)}{}' S(Q,a,q)\, e^{-\frac{2\pi i a m}{q}},$$

$S(Q,a,q)$ – гауссова сумма, хорошо приближается коротким отрезком

$$\sum_{q \leqslant M} R(m,q)/q^3.$$

Связь $\rho(m)$ с L-рядами задается соотношением ($\operatorname{Re} s > 0$)

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R(m,q)}{q^{3+s}} = C(m,s) \sum_{\substack{d^2|m \\ (d,2)=1}} \frac{\left(1+s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)}{d^{1+2s}},$$

где $C(m,s)$ – несущественный множитель.

Вклад тех $m = n - w^{2k}$, $0 \leqslant w \leqslant n^{\frac{1}{2k}}$, в (6), для которых $L\left(s, \left(\frac{-4mD/d^2}{\cdot}\right)\right)$, $d^2|m$, $(d,2)=1$, возможно, имеют нули в (7), оценивается сверху посредством большого решета (см. плотностные теоремы Монтгомери в [10]).

Будем применять результаты Е. П. Голубевой в форме В. А. Быковского (см. [11, лемма 3]).

Пусть

$$I = \sum_{A\sqrt{n} < w \leqslant A\sqrt{n} + \Delta\sqrt{n}} \sqrt{n-w^2}\, \mathfrak{S}_3(n-w^2) \chi_\Delta \left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right).$$

По [7] и [11] имеем

$$I = \sum_{A\sqrt{n} < w \leqslant A\sqrt{n} + \Delta\sqrt{n}} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R(n-w^2, q)}{q^3} \exp\left(\frac{-q}{M}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot \chi_\Delta\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right) + O(R),$$

где

$$R = n^{1/2+\varepsilon}\left(n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}} + \Delta\sqrt{n} M^{-(1-\sigma)}\right), \quad 1/2 < \sigma < 1, \quad M \geqslant 1.$$

Меняем порядок суммирований:

$$I = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^3} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) \sideset{}{'}\sum_{a (\operatorname{mod} q)} S(E_3, a, q) \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} \sum_{A\sqrt{n} < w \leqslant A\sqrt{n} + \Delta\sqrt{n}} \sqrt{n-w^2}\, \chi_\Delta\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{2\pi i a w^2}{q}} + O(R).$$

Рассмотрим сумму

$$I_1 = \sum_{A\sqrt{n} < w \leqslant A\sqrt{n} + \Delta\sqrt{n}} \sqrt{n-w^2}\, \chi_\Delta\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{2\pi i a w^2}{q}}.$$

Пусть $w = w_2 q + w_1$. Тогда

$$I_1 = \sum_{w_1 (\operatorname{mod} q)} \left(\frac{n}{q} \int\limits_A^{A+\Delta} \sqrt{1-w^2}\, \chi_\Delta(w)\, dw + O\left(n^{1/2+\varepsilon}\right)\right) e^{\frac{2\pi i a w_1^2}{q}},$$

где O-константа от q и w_1 не зависит. Отсюда следует:

$$I = n \int\limits_A^{A+\Delta} \sqrt{1-w^2}\, \chi_\Delta(w)\, dw \cdot \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) \cdot$$

$$\cdot \sideset{}{'}\sum_{a (\operatorname{mod} q)} S(E_4, a, q)\, e^{-\frac{2\pi i a n}{q}} + O(\mathcal{L}),$$

где

$$\mathcal{L} = n^{1/2+\varepsilon}\left(M + n^{\frac{4(1-\sigma)}{\sigma}} + \Delta\sqrt{n}\, M^{-(1-\sigma)}\right).$$

Имеем ($c > 0$)

$$I_2 = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^4} \exp\left(\frac{-q}{M}\right) R_1(n, q) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = c} \Gamma(s)\, M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n, q)}{q^{4+s}}\right) ds.$$

Известно (см., например, [12]), что

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n, q)}{q^{4+s}} = \prod_{p\,|\,2n} X_p(n, s) \cdot L^{-1}\left(s+2, \chi_0\right),$$

где χ_0 – главный характер $(\operatorname{mod} 2)$, $X_p(n, s)$ – всюду голоморфный множитель, выражение для которого даётся в [12]. По теореме о вычетах получаем

$$I_2 = \mathfrak{S}_4(n) + \int\limits_{\operatorname{Re} s = -1+\varepsilon} \Gamma(s)\, M^s \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{R_1(n, q)}{q^{4+s}}\right) ds =$$

$$= \mathfrak{S}_4(n) + O\left(n^{\varepsilon}/M\right), \tag{8}$$

поскольку

$$\prod_{p\,|\,2n} X_p(n, -1+\varepsilon) \ll n^{\varepsilon}.$$

Имеем теперь

$$I = n\, \mathfrak{S}_4(n) \int\limits_{A}^{A+\Delta} \sqrt{1-w^2}\, \chi_{\Delta}(w)\, dw + O(\mathcal{L}),$$

ибо в силу дальнейшего выбора параметров член $O(n^{\varepsilon}/M)$ в (8) можно не учитывать. Следовательно,

$$r(n, A) - S_4 = -4\pi \int\limits_{A}^{A+\Delta} \sqrt{1-w^2}\, \chi_{\Delta}(w)\, dw \cdot n\, \mathfrak{S}_4(n) + O(\mathcal{L}). \tag{9}$$

3. Изучим теперь сумму S_4. В силу (4) и (5) имеем

$$S_4 = \alpha_0\, r_4(n) + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sum_{x^2+y^2+z^2+w^2=n} C_m^1\left(\frac{w}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \alpha_0\, r_4(n) + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m\, R_m(n), \tag{10}$$

где

$$\alpha_0\, r_4(n) = \frac{1}{N_0} \int\limits_A^{A+\Delta} \sqrt{1-w^2}\; dw \cdot r_4(n) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\; 2 \int\limits_A^{A+\Delta} \sqrt{1-w^2}\; \chi_\Delta(w)\, dw \cdot r_4(n). \tag{11}$$

Пусть $S_l(\Gamma_0(N),\chi)$ означает пространство $\Gamma_0(N)$-параболических форм веса l и характера χ; $\langle\ ,\ \rangle$ – скалярное произведение в этом пространстве. Величина

$$c_m(n) = n^{m/2}\, \alpha_m\, R_m(n)$$

есть коэффициент Фурье тета-ряда со сферической функцией

$$\vartheta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_m(n)\, e^{2\pi i n z};$$

$$\vartheta(z) \in S_{m+2}\big(\Gamma_0(4), 1\big).$$

В [1] была получена оценка

$$c_m(n) \ll n^{m/2} \frac{1}{(\Delta m)^r} + n^{m/2}\, n\, \frac{1}{(\Delta m)^r}\, \frac{1}{m} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

на основании которой прямым вычислением было оценено скалярное произведение Петерсона:

$$\langle\, \vartheta(z), \vartheta(z)\,\rangle \ll \left(\frac{1}{(\Delta m)^r}\right)^2 \frac{m!}{(4\pi)^m}. \tag{12}$$

В работе [2] было доказано следующее предложение.

Пусть $f(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi)$, где $l \geqslant 2$ – целое число, χ – характер $(\operatorname{mod} N)$;

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

Тогда для n с условием $(n, N) = 1$ имеем

$$|\widehat{f}(n)| \ll d(n)\, n^{\frac{l-1}{2}} \langle\, f(z), f(z)\, \rangle^{1/2} \cdot \frac{(4\pi)^{\frac{l-1}{2}}}{(\Gamma(l-1))^{1/2}}, \tag{13}$$

где $\ll$-константа абсолютная, $d(n) = \sum_{d|n,\, d>0} 1$.

Вставляя (12) в (13), получаем

$$\alpha_m\, R_m(n) \ll n^{1/2}\, d(n)\, \frac{1}{(\Delta m)^r}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots; \quad r = 0, 1, 2, \ldots. \tag{14}$$

Оценим сумму

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m\, R_m(n),$$

используя (14). Для этого разобъем ее на две:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m\, R_m(n) =$$

$$= \sum_{m \leqslant 1/\Delta^{1+\varepsilon}}^{\infty} \alpha_m\, R_m(n) + \sum_{m > 1/\Delta^{1+\varepsilon}}^{\infty} \alpha_m\, R_m(n) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Δ мы будем брать в виде $\Delta = 1/n^c$, $c > 0$; поэтому за счет выбора $r \gg 1$ мы всегда можем сделать $\sum_2$ величиной $\ll \sum_1$. Сумму $\sum_1$ оцениваем, беря в (14) $r = 0$:

$$\sum\nolimits_1 \ll \frac{n^{1/2}\, d(n)}{\Delta^{1+\varepsilon}}. \tag{15}$$

Собирая вместе (9), (10), (11), (15), получаем

$$r(n, A) = \mu_4(A)\, r_4(n) + O(\mathcal{L}_1),$$

где

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \frac{n^{1/2+\varepsilon}}{\Delta}.$$

4. Имеем

$$\mathcal{L}_1 = n^{1/2+\varepsilon}\left(M + n^{4(1-\sigma)/\sigma} + \Delta\sqrt{n}\,M^{-(1-\sigma)}\right) + \frac{n^{1/2+\varepsilon}}{\Delta}.$$

Остается оптимально выбрать параметры. Положим $\Delta\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2\varkappa}}$. Из равенства

$$M = n^{\frac{1}{2\varkappa}}\,M^{-(1-\sigma)}$$

следует, что

$$M = n^{\frac{1}{2\varkappa(2-\sigma)}}.$$

Опять приравниваем:

$$n^{4(1-\sigma)/\sigma} = n^{\frac{1}{2\varkappa(2-\sigma)}},$$

откуда следует, что параметр σ удовлетворяет уравнению

$$8k(1-\sigma)(2-\sigma) = \sigma. \tag{16}$$

При изменении параметра $\varkappa$ в пределах

$$1,925 < \varkappa < 2,008$$

решение уравнения (16) оценивается следующим образом:

$$1 - \frac{229}{2048\varkappa} < \sigma < 1 - \frac{228}{2048\varkappa}.$$

Вводя в рассмотрение еще и член $n^{1/2+\varepsilon}/\Delta$, оптимально выбираем $\varkappa$. При $\varkappa = 1,94897\ldots$ имеем

$$1 - \frac{1}{2\varkappa} = 0,74345\ldots < \frac{1487}{2000}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. О. М. Фоменко, *О равномерном распределении целых точек на многомерных эллипсоидах,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **154** (1986), 144–153.
2. О. М. Фоменко, *Применения формулы Петерсона для билинейной формы от коэффициентов Фурье параболических форм,* Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 143–166.
3. И. М. Виноградов, *К вопросу о числе целых точек в шаре,* Изв. АН СССР. Сер. мат. **27** (1963), 957–968.

4. Chen Jing-Run, *Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions. II,* Sci. Sinica **12**, No. 6 (1963), 751–764.
5. F. Chamizo, H. Iwaniec, *On the sphere problem,* Revista Mathem. Iberoamericana **11**, No. 2 (1995), 417–429.
6. D. R. Heath-Brown, *Lattice points in the sphere,* Number Theory in Progress. Proc. Intern. Conf. on Number Theory, Zakopane, Poland, June 30–July 9, 1997. Vol. II. Berlin etc., 1999, 883–891.
7. Е. П. Голубева, *О проблеме Варинга для тернарной квадратичной формы и произвольной четной степени,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 27–37.
8. Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, *Применение сферических функций к одной задаче теории квадратичных форм,* Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 38–45.
9. P. T. Bateman, *On the representations of a number as the sum of three squares,* Trans. Amer. Math. Soc. **71**, No. 1 (1951), 70–101.
10. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел,* М., 1974.
11. В. А. Быковский, *Плотностные теоремы и среднее значение арифметических функций на коротких интервалах,* Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 56–70.
12. Т. В. Вепхвадзе, *К аналитической теории квадратичных форм,* Труды Тбилисского мат. ин-та **72** (1983), 12–31.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 15 декабря 1999 г.