Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

В. М. Бабич, В. В. Камоцкий

О ВОЛНОВОМ ПОЛЕ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПАДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЛУЧА

1. Введение

Пусть на границу раздела Σ двух сред 1 и 2 падает из среды 1 волна u^{inc}, заданная своим лучевым разложением:

$$u^{\mathrm{inc}} \sim e^{i\omega\tau_{\mathrm{inc}}(x,y)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{u_j^{\mathrm{inc}}(x,y)}{(-i\omega)^j}. \tag{1}$$

Мы рассматриваем плоскую задачу и считаем Σ, τ_{inc}, $u_j(x,y)$ гладкими. Пусть волновой процесс в среде i $(i=1,2)$ описывается уравнением Гельмгольца:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_i^2}\right) u = 0, \quad i = 1,2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2}$$

где $c_2 > c_1$, на границе раздела Σ двух сред 1 и 2 выполнены классические условия непрерывности u и ее нормальной производной:

$$[u]_\Sigma = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Sigma = 0. \tag{3}$$

Предположим, что среди лучей падающей волны имеется предельный, т.е. луч, угол преломления которого равен $\frac{\pi}{2}$. Если β_{inc} угол падения, то в точке падения предельного луча, где $\beta_{\mathrm{inc}} := \beta^0_{\mathrm{inc}}$:

$$\frac{\sin\beta^0_{\mathrm{inc}}}{c_1} = \frac{1}{c_2}. \tag{4}$$

Введем вблизи Σ классические координаты s (длина дуги), n ($|n|$ расстояние по нормали от Σ). Пусть $s = n = 0$ в точке падения O, кривизна $1/\rho$ в этой же точке положительна и $n > 0$ (соответственно $n < 0$) в среде 1 (соответственно 2) вблизи Σ. Известно,

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 99-01-00107, 96-15-96-121.

что на $\Sigma\, d\tau_{\rm inc}/ds = \frac{\sin\beta_{\rm inc}}{c_1}$. Здесь рассматривается невырожденная ситуация, когда $d^2\tau_{\rm inc}/ds^2\big|_{s=n=0} \neq 0$. Будем считать (это не ограничивает общности наших построений), что

$$\left.\frac{d^2\tau_{\rm inc}}{ds^2}\right|_{s=n=0} := \alpha > 0. \tag{5}$$

В этом случае падающая волна при $s > 0$ испытывает полное внутреннее отражение. Лучи падающей волны при $s < 0$ преломляются, образуя вблизи точки $O(s = n = 0)$ в среде 2 волну шепчущей галереи. Ситуация эта изучалась в 60-70-ые годы [1–4] однако окрестность точки O $(s = n = 0)$ исследована не была. Данная работа имеет целью восполнить этот пробел.

Здесь естественно воспользоваться методикой дифракционного пограничного слоя. Соответствующее "погранслойное" уравнение – это параболическое уравнение В. А. Фока. Волновое поле преломленной волны в первом приближении выражается через производную классического интеграла Пирси.

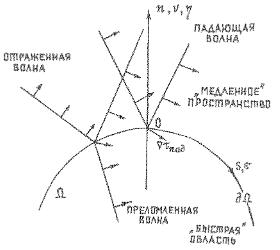

Рис. 1

Заметим, что кривизна Σ в точке O входит в "погранслойное" разложение волнового поля, лишь начиная со второго приближения, поэтому главное приближение оказывается здесь таким же, как если бы волна падала на границу раздела двух полуплоскостей или полупространств. Волновое поле в задаче о контакте двух полупространств и в близкой задаче о распространении волн в упругой полуплоскости изучалось во многих работах; в частности в статьях [5, 6] при описании волнового поля в окрестности точки возникновения головной волны их авторы пришли к интегралу Пирси. В работе [5] автор получил интеграл, сводящийся к интегралу Пирси, анализируя точное решение, в работе [6] использовался метод параболического уравнения.

2. Анзац и уравнения пограничного слоя

В силу гладкости u_j, τ_{inc} и сделанных выше предположений, мы положим:

$$u_j^{\text{inc}} \cong \sum_{h,g=0}^{\infty} u_{jhg}^{\text{inc}} n^h s^g, \tag{6}$$

$$\tau_{\text{inc}}(n,s) \cong \sum_{j,k=0}^{\infty} \alpha_{j,k} \frac{n^j s^k}{j!k!}, \tag{7}$$

причем

$$\alpha_{0,0} = 0, \quad \alpha_{0,1} = \frac{1}{c_2}, \quad \alpha_{0,2} > 0. \tag{8}$$

Введем следующие обозначения: посредством $\tau_{\text{refl}}(n,s)$ будем обозначать эйконал, соответствующий отраженной волне, т.е. решение следующей задачи:

$$|\nabla \tau_{\text{refl}}|^2 = \frac{1}{c_2^1} \text{ в среде } 1, \tag{9}$$

$$\tau_{\text{refl}}(0,s) = \tau_{\text{inc}}(0,s), \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tau_{\text{refl}}}{\partial n}(0,s) = -\frac{\partial \tau_{\text{inc}}}{\partial n}(0,s); \tag{11}$$

значения τ_{refl} и τ_{inc} на Σ будем обозначать $\tau_0(s)$:

$$\tau_0(s) = \tau_{\text{inc}}(0,s). \tag{12}$$

Введем следующие "растянутые" координаты:

$$\nu = \omega^{1/2} n, \tag{13}$$

$$\eta = \omega^{3/4} n, \tag{14}$$

$$\sigma = \omega^{1/2} s. \tag{15}$$

Координаты (ν, σ) будут использоваться для описания отраженной волны – "вверху" (т.е. для $n > 0$ – области "малой" скорости равной c_1), а (η, σ) – для преломленной волны – "внизу" (для отрицательных n – области бóльшей скорости, равной c_2). В соответствии с этим будем искать отраженное поле в виде (анзац для u^{refl})

$$u^{\text{refl}} = e^{i\omega\tau_{refl}(n,s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^{\text{refl}}(\nu,\sigma)}{\omega^{j/4}}. \tag{16}$$

Поскольку для преломленного поля нельзя найти гладкое решение аналогичной (9)–(10) задачи Коши для уравнения эйконала (с большей скоростью c_2), то лучевое разложение неприменимо и придется вводить специальный "пограничный" анзац. Выделим главную осцилляцию вида $e^{i\omega\tau_0(s)}$ и будем искать преломленную волну в виде ряда (анзац для u^{refl}):

$$u^{\text{refr}} = e^{i\omega\tau_0(s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^{\text{refr}}(\eta,\sigma)}{\omega^{j/4}}. \tag{17}$$

Для единства изложения сохраним обозначения для разложения (6)–(7) падающей волны, пересчитанного в координаты (ν,σ), т.е. мы будем предполагать, что падающая волна задана в виде аналогичном (16):

$$u^{\text{inc}} = e^{i\omega\tau_{\text{inc}}(n,s)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j^{\text{inc}}(\nu,\sigma)}{\omega^{j/4}}, \tag{18}$$

где $u_{4j+1}^{\text{inc}} = u_{4j+2} = u_{4j+3} = 0$.

Подставим разложение (16) в (2), с учетом (9) получим:

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2}\right) u^{\text{refl}} =$$

$$= e^{i\omega\tau_{\text{refl}}(n,s)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(i\omega\Delta\tau_{\text{refl}} u_j^{\text{refl}} + 2i\omega^{3/2} \frac{du_j^{\text{refl}}}{d\tau_{\text{refl}}}(\nu,\sigma) + \omega\Delta u_j^{\text{refl}} \right) \omega^{-j/4}. \tag{19}$$

Разложив в этом выражении кривизну $\rho^{-1}(s)$ и $\tau(n,s)$ в ряды Тейлора, заменив s и n на σ и ν в соответствии с формулами (13), (14), приравняв нулю коэффициенты при последовательных степенях $\omega^{-1/4}$, получим следующие уравнения переноса для u_j^{refl}:

$$\frac{du_0^{\text{refl}}}{d\tau_{\text{refl}}^0} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{du_j^{\mathrm{refl}}}{d\tau_{\mathrm{refl}}^0} = -\sum_{s=1}^{[(j-1)/2]} L^{(s)} u_{j-2r}^{\mathrm{refl}}, \tag{21}$$

где $\frac{d}{d\tau_{\mathrm{refl}}^0} = (\nabla\tau_{\mathrm{refl}}(0,0), \nabla_{\nu,\sigma})$, а $L^{(j)}$ – дифференциальные операторы не выше второго порядка с полиномиальными коэффициентами.

Для преломленного поля мы выбрали другой масштаб (по сравнению с отраженным – (13), (14), поэтому здесь уравнения пограничного слоя будут выглядеть иначе: после проделывания аналогичной процедуры с разложением (17) выводятся следующие уравнения на u_j^{refr}

$$\frac{\partial^2 u_0^{\mathrm{refr}}}{\partial\eta^2} + 2i\alpha_1 \frac{\partial u_0^{\mathrm{refr}}}{\partial\sigma} - 2\alpha_1\alpha_2\sigma u_0^{\mathrm{refr}} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 u_j^{\mathrm{refr}}}{\partial\eta^2} + 2i\alpha_1 \frac{\partial u_j^{\mathrm{refr}}}{\partial\sigma} - 2\alpha_1\alpha_2\sigma u_j^{\mathrm{refr}} = -\sum_{s=1}^{j} M^{(s)} u_{j-s}^{\mathrm{refr}}, \tag{23}$$

где $\alpha_1 = \alpha_{01}$, $\alpha_2 = \alpha_{02}$ (см. (7), (8)), а $M^{(s)}$ – дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами.

Таким образом, мы вывели уравнения для $\{u_j^{\mathrm{refl}}\}$ и $\{u_j^{\mathrm{refr}}\}$, выполнение которых будет гарантировать формальное выполнение уравнений (2). Теперь найдем граничные условия, которым должны удовлетворять $\{u_j^{\mathrm{refl}}\}$ и $\{u_j^{\mathrm{refr}}\}$ для того, чтобы формально были выполнены условия (3) для u^{refl} и u^{refr}. Для этого подставим разложения (16), (17) в (3), с учетом (13)–(15) и разложения (18) на границе раздела, когда $\nu = 0$ и $\eta = 0$, получим:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (u_j^{\mathrm{refl}} + u_j^{\mathrm{inc}})\omega^{-j/4} = \sum_{j=0}^{\infty} u_j^{\mathrm{refr}} \omega^{-j/4}, \tag{24}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(i\omega \frac{\partial\tau_{\mathrm{refl}}}{\partial n}(u_j^{\mathrm{refl}} - u_j^{\mathrm{inc}}) + \omega^{1/2} \frac{\partial}{\partial\nu}(u_j^{\mathrm{refl}} + u_j^{\mathrm{inc}}) \right) \omega^{-j/4} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial u_j^{\mathrm{refr}}}{\partial\eta} \omega^{3/4-j/4}, \tag{25}$$

здесь мы еще раз воспользовались свойством отраженного эйконала (11). Раскладывая в (25) $\frac{\partial\tau_{\mathrm{refl}}}{\partial n}$ в ряд Тейлора и последовательно приравнивая нулю коэффициенты при степенях $\omega^{-1/4}$, мы на каждом шаге будем получать систему линейных уравнений относительно $u_j^{\text{refl}}\big|_{\nu=0}$ и $u_j^{\text{refr}}\big|_{\eta=0}$, имеющую единственное решение

$$u_j^{\text{refl}}\big|_{\nu=0} = u_j^{\text{inc}} - i\frac{\partial u_{j-1}^{\text{refr}}}{\partial \eta} + i\frac{\partial}{\partial \nu}(u_{j-2}^{\text{refl}} + u_{j-2}^{\text{inc}}) - \\ - \sum_{r=1}^{[j/2]} (u_{j-2r}^{\text{refl}} - u_{j-2r}^{\text{inc}})\alpha_{1,r}\sigma^r, \tag{26}$$

$$u_j^{\text{refr}}\big|_{\nu=0} = 2u_j^{\text{inc}} - i\frac{\partial u_{j-1}^{\text{refr}}}{\partial \eta} + i\frac{\partial}{\partial \nu}(u_{j-2}^{\text{refl}} + u_{j-2}^{\text{inc}}) - \\ - \sum_{r=1}^{[j/2]} (u_{j-2r}^{\text{refl}} - u_{j-2r}^{\text{inc}})\alpha_{1,r}\sigma^r, \tag{27}$$

Подытоживая все выведенные соотношения, выпишем уравнения и краевые условия для главных членов u_0^{refl} и u_0^{refr}:

$$\frac{du_0^{\text{refl}}}{d\tau_{\text{refl}}^0} = 0, \quad u_0^{\text{refl}}\big|_{\nu=0} = u_0^{\text{inc}}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 u_0^{\text{refr}}}{\partial \eta^2} + 2i\alpha_1 \frac{\partial u_0^{\text{refr}}}{\partial \sigma} - 2\alpha_1\alpha_2 u_0^{\text{refr}} = 0, \quad u_0^{\text{refr}}\big|_{\eta=0} = 2u_0^{\text{inc}}. \tag{29}$$

Если решение первой задачи не вызывает никаких затруднений – она имеет единственное решение – константу $u_0^{\text{refl}} = u_0^{\text{inc}}$, то во второй задаче единственности нет (о корректной постановке задачи см. следующий пункт), а решать мы ее будем следующим образом: домножим уравнение (22) на $\exp\left(i\frac{\alpha_2\sigma^2}{2}\right)$ и применим преобразование Фурье по σ; для Фурье-образа $\hat{u}_0(\eta,\xi)$ функции $\exp\left(i\frac{\alpha_2\sigma^2}{2}\right)$ получим простое уравнение

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \eta^2} - 2\alpha_1\xi\hat{u}_0 = 0. \tag{30}$$

Выберем решение, соответствующее "уходящей на $-\infty$ по η волне" и применим к нему обратное преобразование Фурье. В итоге получим следующее выражение для u_0^{refr} в виде модифицированного контурного интеграла Пирси (путь интегрирования изображен на рис. 2):

$$u_0^{\text{refr}}(\eta, 0) = \frac{4u_0^{\text{inc}} e^{(i\pi)/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_\gamma e^{-i/2(\sqrt{\alpha_2}\,\sigma - z^2)^2 + \alpha_2^{1/4}\sqrt{2\alpha_1}\,\eta z}\, z\, dz. \tag{31}$$

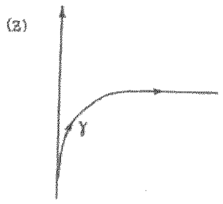

Рис. 2.

Наш выбор решения уравнения (30) обеспечит нам "сшиваемость" строящегося разложения с лучевым (преломленной волны) на $-\infty$ по σ. Это наглядно демонстрирует получаемая методом перевала асимптотика интеграла (31): $u_0^{\rm refr}(\eta,\sigma) = 2u_0^{\rm inc}e^{-i\sqrt{-\alpha_1\alpha_2\sigma}\,\eta} + O(|\sigma|^{-1/2})$ при $\sigma \to -\infty$, что согласуется с лучевым разложением преломленного поля вблизи от (x_0, y_0) при $C_2\omega^{-1/2+\varepsilon_2} \leqslant s < C_1\omega^{-1/2+\varepsilon_1}$ (здесь ε_j – малые положительные константы $\varepsilon_2 > \varepsilon_2$). В следующем пункте мы уясним асимптотическое поведение $u_0^{\rm refr}$, что позволит нам корректно поставить задачу (29) и обсудить получаемую дифракционную картину.

3. Разложение $u_0^{\rm refr}$ по квазиоднородным функциям

Следуя изложенной в [7] методике, попытаемся сконструировать формальное решение уравнения (22) вида

$$u_0^{\rm refr} = e^{iS(\eta,\sigma)}\sum_{j=0}^{\infty} S^{(j)}(\eta,\sigma), \tag{32}$$

где S, $S^{(j)}$ – некоторые квазиоднородные функции, порядок которых убывает с ростом j. Поскольку

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2i\alpha_1\frac{\partial}{\partial\sigma} - 2\alpha_1\alpha_2\sigma\right)e^{iS}\sum_{j=0}^{\infty} S^{(j)} =$$

$$= e^{iS(\eta,\sigma)}\sum_{j=0}^{\infty}\big(-(S_\eta^2 + 2\alpha_1 S_\sigma + 2\alpha_1\alpha_2\sigma)S^{(j)} +$$

$$+ i(2S_\eta S_\eta^{(j)} + 2\alpha_1 S_\sigma^{(j)} + S_{\eta\eta}S^{(j)}) + S_{\eta\eta}^{(j)}\big), \tag{33}$$

то если мы найдем S, удовлетворяющее уравнению

$$S_\eta^2 + 2\alpha_1 S_\sigma + 2\alpha_1\alpha_2\sigma = 0, \tag{34}$$

то после этого мы получим рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $S^{(j)}$, которые, будучи дополнены разумными начальными условиями, однозначно определят все члены ряда (32) (причем в классе квазиоднородных функций). Итак, будем искать решение уравнения (34). Поскольку при построении ф.а.р. u^{refr} фазовый множитель $e^{i\tau_0(s)}$ был введен с тем, чтобы уловить главную осцилляцию преломленного поля у границы, то дабы быть последовательными, дополним (34) краевым условием

$$S\big|_{\eta=0} = 0. \tag{35}$$

Как уже говорилось, мы ищем S, $S^{(j)}$ в классе квазиоднородных функций, и действительно несложно видеть, что решение краевой задачи (34), (35) удовлетворяет следующему соотношению квазиоднородности:

$$S(\beta^3\eta, \beta^2\sigma) = \beta^4 S(\eta, \sigma) \quad \forall\beta > 0. \tag{36}$$

Задача (34), (35) имеет явное решение в параметрической форме, которое может быть получено как с использованием квазиоднородности (36) и последующим сведением (34) к обыкновенному дифференциальному уравнению типа Лагранжа, так и с помощью метода характеристик. Мы остановим свой выбор на последнем в силу его наглядности: с его помощью находим

$$\eta = -2\sqrt{-2\alpha_1\alpha_2\sigma(0)}\, t, \tag{37}$$

$$\sigma = 2\alpha_1 t + \sigma(0), \tag{38}$$

$$S = -4\alpha_1\alpha_2\sigma(0)t - 2\alpha_1^2\alpha_2 t^2. \tag{39}$$

Здесь $t \geqslant 0$ – параметр характеристик, а $(\sigma(0), 0)$ – точка начала. Качественный вид характеристик изображен на рис. 3; все они имеют начало в левой полуплоскости (что соответствует рисуемой интуицией дифракционной картиной), так что мы можем говорить о выполнении краевого условия лишь при $\sigma < 0$ – у построенной функции граничные значения при $\sigma > 0$ ненулевые:

$$S\big|_{\eta=0,\sigma>0} = -\frac{\alpha_2\sigma^2}{2}. \tag{40}$$

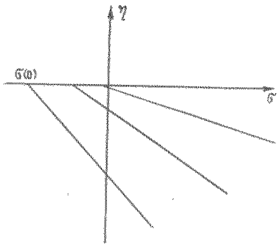

Рис. 3.

Также и $S^{(j)}$, как решения задач

$$2S_\eta S^{(j)}_\eta + 2\alpha_1 S^{(j)}_\sigma + S_{\eta\eta} S^{(j)} = iS^{(j)}_{\eta\eta}, \tag{41}$$

$$S^{(j)}\big|_{\eta=0} = 2u_0^{\mathrm{inc}}\delta_{j,0}, \tag{42}$$

(здесь $\delta_{j,0}$ – символ Кронекера) являются квазиоднородными функциями:

$$S^{(j)}(\beta^3\eta, \beta^2\sigma) = \beta^{-4j} S^{(j)}(\eta, \sigma) \quad \forall \beta > 0. \tag{43}$$

Уравнение (41) является уравнением вдоль характеристик (34) – в "лучевых" координатах $(t, \sqrt{-\sigma(0)})$ (см. (37), (38)) оно записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial S^{(j)}}{\partial t} + \frac{\alpha_1}{2(\alpha_1 t - \sigma(0))} S^{(j)} = iS^{(j-1)}_{\eta\eta}. \tag{44}$$

С учетом начальных условий (42) все $S^{(j)}$ последовательно однозначно определяются. В частности имеем:

$$S^{(0)} = \frac{2u_0^{\mathrm{inc}}\sqrt{-\sigma(0)}}{\sqrt{\alpha_1 t - \sigma(0)}}. \tag{45}$$

Также можно вычислить все последующие члены разложения (32), все они будут иметь вид $(\alpha_1 t - \sigma(0))^{-m-1/2} P(t, \sqrt{-\sigma(0)})$, где P – некоторый полином своих аргументов $S^{(j)}$, также как и S, удовлетворяют граничному условию (42) лишь на отрицательной полуоси σ. Для $S^{(0)}$, например, из (45) находим:

$$S^{(0)}\big|_{\eta=0,\sigma>0} = 0. \tag{46}$$

Теперь мы можем обсудить место построенной конструкции (разложение (32)) во всем дифракционном процессе. Отметим, что $S^{(0)}e^{iS}$ имеет в точности то же асимптотическое поведение при $\sigma \to \pm\infty$, что и интеграл (31) (имеются в виде главные члены асимптотик при $\eta \neq 0$ и $\sigma \to \pm\infty$), асимптотика которого вычисляется методом перевала. Однако эти асимптотики совпадают не вплоть до положительной полуоси σ, что видно из (46)[1] Все эти соображения подводят к мысли, что разложение (32) описывает именно преломленную волну – волну преломившуюся при больших по модулю отрицательных σ и уходящую вдоль границы на $+\infty$ по σ. Эта догадка становится определяющей для задачи (29), точнее имеет место

Теорема. *Задача* (29) *имеет единственное решение вида* $u(\eta,\sigma) = \varphi(\eta,\sigma)S^{(0)}e^{iS} + v(\eta,\sigma)$, *где* φ – *гладкая срезка, равная* 0 *в окрестности нуля, и* 1 – *в некоторой большей окрестности, а* v-*функция из* $H^2(\mathbb{R}^-)$ *при каждом* σ, *имеющая сильную производную по* σ *в смысле* L^2 *и такая, что*

$$\|v(\cdot,\sigma); L^2(\mathbb{R}^-)\| \to 0, \quad \text{\textit{при}} \quad \sigma \to -\infty.$$

Доказательство этой теоремы аналогично проведенным в [7, 8]. На этом же пути можно и обосновать асимптотику

$$u_0^{\mathrm{refr}}(\eta,\sigma) \sim e^{iS(\eta,\sigma)} \sum_{j=0}^{\infty} S^{(j)}(\eta,\sigma), \text{ при } |\eta|^2 + |\sigma|^2 \to \infty, \ \eta < -\varepsilon\sigma. \tag{47}$$

О том, что эта асимптотика имеет место вплоть до положительной полуоси σ, видно и из вычисления асимптотики интеграла Пирси (31). Этот интеграл имеет две стационарные точки. Первая соответствует экспоненциально затухающей при $\eta \to -\infty$ волне, удовлетворяющей граничному условию для u_0^{refr}. Вторая – преломленной волне с асимптотикой вида (47).

Литература

1. В. С. Булдырев, *Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре. I.* В сб. “Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы” (1964), 275–286.

[1] Для того, чтобы удовлетворить граничному условию для u_0^{refr} при $\sigma > 0$ по-видимому нужно строить экспоненциально убывающее при $\eta \to -\infty$ разложение, что выходит за рамки данной работы.

2. В. С. Булдырев, А. И. Ланин, *Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре. II.* Ж. выч. мат. и мат. физ. (1964), 90–105.
3. В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения.* Радиофизика **10**, No. 5 (1964), 275–286.
4. В. С. Булдырев, В. Э. Грикуров, *Интерференционная головная волна в теории упругости.* Проблемы математической физики, Изд-во ЛГУ, No. 8 (1976), 16–28.
5. А. С. Старков, *Асимптотика волнового поля в окрестности диакаустики.* 9-ый Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Москва-Тбилиси, **1** (1985), 82–85.
6. М. И. Иванов, *Возбуждение поверхностных волн точечным источником на границе упругого тела.* Вестник ЛГУ, мат. мех. астроном., Л. (1983). Рукопись депонирована в ВИНИТИ 19 ноября № 7348-84. Деп.13 стр. 3 рис.
7. В. П. Смышляев, *Рассеяние коротких волн в окрестности точки перегиба границы рассеянной вершиной произвольного конуса.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **148** (1985), 152–166.
8. В. М. Бабич, В. П. Смышляев, *О задаче рассеяния для уравнения Шредингера в случае линейного по времени и координате потенциала. II Корректность, гладкость, поведение решения на бесконечности.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **148** (1985), 13–29.

Babich V. M. and Kamotskii V. M. On the wave field in the small neighbourhood of the point of incidence of the limiting ray.

The plane scalar problem of refrecting highfrequency wave defined by its ray expansion by a curvilinear interface is considered. It is assumed that the velocity in the medium where the refracted wave propagates is greater than the velocity where the incident wave propagates. It is assumed also that a point on the interface exist such as on one side of it the ordinary refraction takes place and the complete internal reflection of the incident wave on another side of the point takes place. It is deduced an analutical formula for the wave field in a small neighbourhood of this point.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 9 сентября 1999 г.