Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

М. Белишев

К ТРЕУГОЛЬНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ИЗОМОРФИЗМОВ

0. Введение

Предмет работы – предложенная в [1] операторная конструкция (т.н. амплитудный интеграл) и ее приложение в задаче треугольной факторизации. Класс факторизуемых операторов – изоморфизмы гильбертова пространства. Для них вводится континуальный аналог диагонали; устанавливается единственность факторизации, в которой один из факторов имеет заданную диагональ. При дополнительных условиях на оператор получено представление для факторов через амплитудный интеграл. Это представление – эффективное средство факторизации. В ряде случаев мы обобщаем классические результаты [5], относящиеся к факторизации операторов вида "единичный плюс компактный".

Работа продолжает начатое в [2] изучение абстрактной версии амплитудного интеграла. Интерес стимулируется приложениями: интеграл используется при решении динамических обратных задач [3, 4].

1. Треугольная факторизация

1.1. Определения.

Пусть $\mathcal{H}$ есть гильбертово пространство; $\mathcal{B}$ – алгебра ограниченных операторов в $\mathcal{H}$; $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ – класс ограниченно обратимых операторов (изоморфизмов).

Семейство подпространств $\mathcal{H}^\xi \subset \mathcal{H}$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$ $(T < \infty)$ со свойствами $\mathcal{H}^0 = \{0\}$, $\mathcal{H}^{\xi'} \subset \mathcal{H}^{\xi''}$ при $\xi' < \xi''$; $\mathcal{H}^T = \mathcal{H}$ назовем *цепочкой* [5]. Через P^ξ обозначаются соответствующие ортогональные проекторы: $P^\xi\mathcal{H} = \mathcal{H}^\xi$.

Оператор $V \in \mathcal{B}$ называется *треугольным* (относительно це-

---

Работа поддержана грантом РФФИ 99-01-00107.

почки $\{\mathcal{H}^\xi\})$[1], если $V\mathcal{H}^\xi \subset \mathcal{H}^\xi$ для всех ξ или, что равносильно,

$$VP^\xi = P^\xi VP^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{1.1}$$

Класс треугольных операторов обозначаем через $\mathcal{T}$.

Оператор $V \in \mathcal{T}$ называется *сильно треугольным*, если

$$\operatorname{clos} V\mathcal{H}^\xi = \mathcal{H}^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T; \tag{1.2}$$

класс сильно треугольных операторов обозначаем через $\mathcal{T}_s$.

Обозначим $V^{[-1]}\mathcal{H}^\xi := \{x \in \mathcal{H} \mid Vx \in \mathcal{H}^\xi\}$. Оператор $V \in \mathcal{T}_s$ называется *вполне треугольным*, если

$$V^{[-1]}\mathcal{H}^\xi = \mathcal{H}^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T; \tag{1.3}$$

класс вполне треугольных операторов обозначаем через $\mathcal{T}_s$.

По определениям имеем: $\mathcal{T}_c \subset \mathcal{T}_s \subset \mathcal{T}$; поскольку для изоморфизма свойства (1.2) и (1.3) равносильны, классы $\mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$ и $\mathcal{T}_c \cap \mathcal{I}$ совпадают.

Оператор $B \in \mathcal{B}$ назовем *приводимым*, если

$$BP^\xi = P^\xi B, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{1.4}$$

Представление оператора $C \in \mathcal{B}$ в виде

$$C = V_\#^* V, \tag{1.5}$$

где $V_\#$, $V \in \mathcal{T}$ называется *треугольной факторизацией*; операторы $V_\#$ и V суть *левый* и *правый* факторы. В случае $V_\#$, $V \in \mathcal{T}_s$ ($\in \mathcal{T}_c$) факторизация называется *сильно треугольной* (*вполне треугольной*).

1.2. Диагональ. Пусть $W \in \mathcal{B}$; F^ξ, $G^\xi \in \mathcal{B}$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$ суть два операторных семейства в $\mathcal{H}$. Пусть $\Xi := \{\xi\}_{j=1}^N$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_N = T$ есть конечное разбиение интервала $[0,T]$; $r(\Xi) := \max\limits_j(\xi_j - \xi_{j-1})$ – его ранг. Обозначим $\Delta F^{\xi_j} := F^{\xi_j} - F^{\xi_{j-1}}$, $\Delta G^{\xi_j} := G^{\xi_j} - G^{\xi_{j-1}}$. Определим (операторный) *интеграл*

$$\int\limits_0^T dF^\xi W dG^\xi := w - \lim_{r(\Xi)\to 0} \sum_{\xi_j \in \Xi} \Delta F^{\xi_j} W \Delta G^{\xi_j} \tag{1.6}$$

[1]Ниже в обозначениях и терминах мы опускаем указание на цепочку, предполагая ее фиксированной.

(сходимость в слабой операторной топологии).

Интеграл

$$\int_0^T dP^\xi W dP^\xi =: D_W \tag{1.7}$$

называется *диагональю* оператора W (вдоль цепочки $\{\mathcal{H}^\xi\}$). Соответствие $\widehat{D} : W \to D_W$ есть линейный трансформатор в $\mathcal{B}$; приведем его общие свойства [2]:

(i) трансформатор $\widehat{D}$ определен не всюду: в [2] приведен пример оператора, для которого интеграл (1.6) расходится;

(ii) $D_{\mathbb{I}} = \mathbb{I}$, т.е. $\widehat{d}(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$;

(iii) по ортогональности P^ξ имеем:

$$\Big\| \sum_{\xi_j \in \Xi} \Delta P^{\xi_j} W \Delta P^{\xi_j} x \Big\|^2 = \sum_{\xi_j \in \Xi} \Big\| \Delta P^{\xi_j} W \Delta P^{\xi_j} x \Big\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|W\|^2 \sum_{\xi_j \in \Xi} \Big\| \Delta P^{\xi_j} x \Big\|^2 = \|W\|^2 \|x\|^2,$$

откуда следует априорная оценка $\|D_W\| \leqslant \|W\|$, в силу которой $\widehat{D}$ есть сжатие в $\mathcal{B}$;

(iv) справедливо равенство

$$D_{W^*} = (D_W)^*, \tag{1.8}$$

т.е. $\widehat{D}$ коммутирует с сопряжением;

(v) если для $B \in \mathcal{B}$ выполнено (1.4), то

$$D_{BW} = BD_W; \quad D_{WB} = D_W B,$$

т.е. $\widehat{D}$ коммутирует с умножением на приводимый оператор; в частности $\widehat{D}P^\xi = P^\xi \widehat{D}$;

(vi) из последнего, с учетом (ii), следует: $\widehat{D}^2 = \widehat{D}$, т.е. $\widehat{D}$ есть (ограниченный) проектор;

(vi) если $W \in \mathfrak{S}_\infty$ – компактный оператор, а цепочка $\{\mathcal{H}^\xi\}$ *непрерывна*: $P^\xi = s - \lim\limits_{\tau \to \xi} P^\tau$, то

$$D_W = \mathbb{O}, \tag{1.9}$$

т.е. $\mathfrak{S}_\infty \subset \ker \widehat{D}$. Этот факт прямо следует из [5; гл. 4; Лемма 5.1].

1.3. Основные результаты. Представление (1.5), очевидно, неединственно: если B есть приводимый изоморфизм, то пара $(B^{-1})^* V_\#$, BV также определяет треугольную факторизацию оператора C.

С другой стороны, в теории матриц известен следующий факт: если $C = \{c_{ik}\}_{i,k=1}^n$, $\det C \neq 0$, то представление $C = V_\#^* V$ с $V_\# = \{v_{\# ik}\}_{i,k=1}^n$, $V = \{v_{ik}\}_{i,k=1}^n$: $v_{\# ik} = v_{ik} = 0$ при $i > k$ становится единственным, если фиксировать диагональ одного из факторов, например, правого. Точнее, если $C = V_\#^* V = Z_\#^* Z$ суть две треугольные факторизации невырожденной матрицы C, то равенство $v_{ii} = z_{ii}$, $i = 1, \dots, n$ влечет $V = Z$, $V_\# = Z_\#$. Основной результат нашей работы – следующий континуальный аналог этого факта.

Теорема 1. *Пусть $C = V_\#^* V = Z_\#^* Z$ суть две треугольные факторизации оператора $C \in \mathcal{I}$ с факторами V, $V_\#$, Z, $Z_\# \in \mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$. Если D_V, $D_Z \in \mathcal{I}$ и $D_V = D_Z$, то факторизации совпадают: $V = Z$, $V_\# = Z_\#$.*

При дополнительных условиях на оператор удается найти представление для факторов через интеграл (1.6). Опишем результат.

Пусть e^ξ есть вложение $\mathcal{H}^\xi$ в $\mathcal{H}$: $(e^\xi)^* e^\xi = \mathbb{I}_{\mathcal{H}^\xi}$, $e^\xi (e^\xi)^* = P^\xi$; через

$$C^\xi := (e^\xi)^* C e^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T$$

($C^T = C$) обозначим *блок* оператора C в подпространстве $\mathcal{H}^\xi$. Оператор C назовем *невырожденным* (относительно цепочки), если все C^ξ суть изоморфизмы в соответствующих $\mathcal{H}^\xi$. Отметим, что в матричном случае C допускает треугольную факторизацию, если и только если он невырожден [5]. Невырожденный C определяет операторное семейство $\{\mathcal{P}^\xi\} \subset \mathcal{B}$:

$$\mathcal{P}^0 := \mathbb{O}, \quad \mathcal{P}^\xi := e^\xi [C^\xi]^{-1} (e^\xi)^* C, \quad 0 < \xi \leqslant T. \tag{1.10}$$

Скажем, что треугольная факторизация $C = E_\#^* E$ является *канонической*, если $E_\#$, $E \in \mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$ и $D_{E_\#} = \mathbb{I}$.

Теорема 2. *Если оператор C невырожден и допускает каноническую факторизацию, то справедливы представления:*

$$E = \int_0^T dP^\xi C d\mathcal{P}^\xi; \quad E_\# = \left[E^*\right]^{-1} C^*. \tag{1.11}$$

Представления (1.10) определяются оператором C, что делает их эффективным инструментом факторизации.

В оставшейся части работы мы доказываем теоремы 1 и 2. Некоторые леммы доказываются в условиях более общих, нежели это необходимо для получения основных результатов: мы надеемся на дальнейшие обобщения.

2. Единственность факторизации

2.1. Связь между факторизациями. Обозначим $\mathcal{H}_\perp^\xi := \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^\xi$; пусть $P_\perp^\xi : \mathbb{I} - P^\xi$ есть проектор на $\mathcal{H}_\perp^\xi$.

Лемма 1. *Пусть $C = V_\#^* V = Z_\#^* Z$ суть две факторизации, с V, $V_\#$, Z, $Z_\# \in \mathcal{T}_s$. Тогда:*

(i) *существует линейный обратимый замыкаемый оператор B, $\operatorname{Dom} B = \operatorname{Ran} V$, такой, что $Z = BV$;*

(ii) *на области определения оператора $BP_\perp^\xi$ выполнено соотношение:*

$$BP_\perp^\xi = P_\perp^\xi B P_\perp^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T; \tag{2.1}$$

(iii) *если фактор V вполне треуголен, то на области определения оператора BP^ξ выполнено соотношение:*

$$BP^\xi = P^\xi B, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{2.2}$$

Доказательство. (i) В $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ рассмотрим линеал $\mathcal{R}_{VZ} := \{\{Vx, Zx\} \mid x \in \mathcal{H}\}$. Пусть $Vx = 0$; тогда

$$0 = V_\#^* Vx = Z_\#^* Zx,$$

откуда $Zx = 0$ в силу $\operatorname{Ker} Z_\#^* = \mathcal{H} \ominus \operatorname{clos} \operatorname{Ran} Z_\# = \{0\}$ (см. (1.2) для $\xi = T$). Следовательно, $\mathcal{R}_{VZ}$ есть график; пусть $B : Vx \to Zx$ есть соответствующий оператор; тогда $BV = Z$.

Меняя ролями V и Z, легко понять, что B обратим и $B^{-1}Z = V$.

Из равенств

$$\big(BVx, Z_{\#}y\big) = \big(Zx, Z_{\#}y\big) = (Cx, y) = \big(Vx, V_{\#}y\big)$$

следует: $\operatorname{Dom} B^* \supset \operatorname{Ran} Z_{\#}$, $B^* Z_{\#} = V_{\#}$. Таким образом, B^* плотно задан; значит B замыкаем.

(ii) Справедливы равенства:

$$\big(P^{\xi} BVx, Z_{\#}P^{\xi}y\big) = \big(BVx, P^{\xi}Z_{\#}P^{\xi}y\big) = \langle \text{см. } (1.1)\rangle =$$

$$= \big(Zx, Z_{\#}P^{\xi}y\big) = \big(Vx, V_{\#}P^{\xi}y\big) = \langle \text{см. } (1.1)\rangle = \big(P^{\xi}Vx, V_{\#}P^{\xi}y\big),$$

по которым включение $Vx \in \mathcal{H}^{\xi}_{\perp}$ влечет $(P^{\xi}BVx, Z_{\#}P^{\xi}y) = 0$ для любого $y \in \mathcal{H}$. Поскольку $Z_{\#}\mathcal{H}^{\xi}$ плотно в $\mathcal{H}^{\xi}$ (см. (1.2)), из последнего равенства следует: $P^{\xi}BVx = 0$, т.е. $BVx \in \mathcal{H}^{\xi}_{\perp}$. Итак, включение $Vx \in \mathcal{H}^{\xi}_{\perp}$ влечет $BVx \in \mathcal{H}^{\xi}_{\perp}$, что равносильно (2.1).

(iii) Пусть $V \in \mathcal{T}_c$ и $Vx \in \mathcal{H}^{\xi}$; тогда согласно (1.3) имеем: $x \in \mathcal{H}^{\xi}$, откуда $BVx = Zx \in \mathcal{H}^{\xi}$. Значит включение $Vx \in \mathcal{H}^{\xi}$ приводит к $BVx \in \mathcal{H}^{\xi}$, что равносильно соотношению

$$BP^{\xi} = P^{\xi}BP^{\xi}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T \tag{2.3}$$

на области определения BP^{ξ}.

На той же области имеем:

$$P^{\xi}B = P^{\xi}BP^{\xi} + P^{\xi}BP^{\xi}_{\perp} = \langle \text{см. } (2.1),\ (2.3)\rangle = BP^{\xi},$$

чем установлено (2.2). Лемма доказана.

В дополнение к полученному результату отметим следующее. Если оператор B, связывающий сильно треугольные факторы V и Z ограничен, то (2.2) выполнено без предположения о *полной* треугольности V. В самом деле, в этом случае, согласно (1.2), для $Vx \in \mathcal{H}^{\xi}$ найдется последовательность $x_j \in \mathcal{H}^{\xi}$ такая, что $Vx_j \to Vx$. Тогда по непрерывности B имеем:

$$BVx = \lim BVx_j = \lim Zx_j \in \mathcal{H}^{\xi},$$

т.е. из $Vx \in \mathcal{H}^{\xi}$ следует $BVx \in \mathcal{H}^{\xi}$. Последнее равносильно (2.3) и, вместе с (2.1), ведет к (2.2). Значит, ограниченный оператор, связывающий факторы класса $\mathcal{T}_s$, обязательно приводится цепочкой.

2.2. Факторизация изоморфизмов. Следующий вспомогательный результат относится к ситуации леммы 1 и заключительному замечанию п. 2.1.

Лемма 2. *Пусть* $C = V_{\#}^{*}V = Z_{\#}^{*}Z$ *суть две факторизации с* V, $V_{\#}$, Z, $Z_{\#} \in \mathcal{T}_s$, *причем оператор* B, *связывающий* V *и* Z *ограничен. Тогда* V *и* Z *имеют или не имеют диагонали одновременно и выполнено равенство:*

$$D_Z = BD_V. \tag{2.4}$$

Доказательство. Для операторных сумм, соответствующих диагоналям (см. (1.6)) имеем:

$$\sum_{\xi_j \in \Xi} \Delta P^{\xi_j} Z \Delta P^{\xi_j} = \sum_{\xi_j \in \Xi} \Delta P^{\xi_j} BV \Delta P^{\xi_j} =$$

$$= \langle \text{см. } (2.2) \rangle = B \sum_{\xi_j \in \Xi} \Delta P^{\xi_j} V \Delta P^{\xi_j} \tag{2.5}$$

по приводимости B. Предельный переход в (2.5) дает (2.4). Лемма доказана.

Следствие. *Пусть в условиях леммы* 2 *выполнено* $D_V = D_Z =: D$, *причем* $\operatorname{clos}\operatorname{Ran} D = \mathcal{H}$. *Тогда справедливы равенства:* $V = Z$, $V_{\#} = Z_{\#}$.

В самом деле, в этом случае из (2.4) следует $B = \mathbb{I}$, откуда $V = Z$. Затем из равенства $V_{\#}^{*}V = Z_{\#}^{*}Z$ по плотности $\operatorname{Ran} V$ имеем: $V_{\#}^{*} = Z_{\#}^{*}$ и, наконец, $V_{\#} = Z_{\#}$.

Обратимся к доказательству теоремы 1. Пусть $C = V_{\#}^{*}V = Z_{\#}^{*}Z$ суть две факторизации с факторами из $\mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$. Тогда $B = ZV^{-1} \in \mathcal{I}$ и, по следствию леммы 2, равенство диагоналей ведет к совпадению факторизаций. Теорема доказана.

Как нетрудно видеть, к тому же результату – единственности факторизации, приводит фиксация диагонали левого фактора: если $D_{V_{\#}} = D_{Z_{\#}}$, то $V = Z$, $V_{\#} = Z_{\#}$.

3. Каноническая факторизация

3.1. Семейство Π^{ξ}. С треугольной факторизацией $C = Z_{\#}^{*}Z$ свяжем операторное семейство

$$\Pi^{\xi}_{Z_{\#}Z} := Z_{\#}^{*} P^{\xi} Z, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{3.1}$$

Примечателен следующий факт: если C допускает хотя бы одну факторизацию с правым фактором класса $\mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$, то семейство (3.1) определяется оператором C (не зависит от факторизации) в следующем смысле.

Лемма 3. *Пусть $C = Z_{\#}^* Z = V_{\#}^* V$ с Z, $Z_{\#}$, $V_{\#} \in \mathcal{T}$ и $V \in \mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$; тогда*

$$\Pi^{\xi}_{Z_{\#}Z} = \Pi^{\xi}_{V_{\#}V}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T.$$

Доказательство. Для оператора, связывающего факторизации имеем: $B = ZV^{-1} \in \mathcal{B}$. Как отмечено в конце п. 2.1, ограниченность B ведет к его приводимости: $BP^{\xi} = P^{\xi}B$. Из последнего заключаем: $\operatorname{Ran} P^{\xi}B \subset \operatorname{Ran} B = \operatorname{Dom} B^{-1}$.

Из равенств

$$\big(BVx, Z_{\#}y\big) = \big(Zx, Z_{\#}y\big) = \big(Vx, V_{\#}y\big)$$

следует: $B^* Z_{\#} = V_{\#}$, откуда $Z_{\#}^* = V_{\#}^* B^{-1}$ на $\operatorname{Dom} B^{-1}$. Из последнего имеем:

$$\Pi^{\xi}_{Z_{\#}Z} = V_{\#}^* B^{-1} P^{\xi} BV = V_{\#}^* P^{\xi} V = \Pi^{\xi}_{V_{\#}V}.$$

Лемма доказана.

Условимся, в ситуации леммы 3, в обозначении семейства (3.1) опускать нижние индексы, указывающие на факторизацию. Следующая ниже лемма 5 усиливает лемму 3 для невырожденных C. В формулировке участвует операторное семейство (1.10) и мы начнем с относящегося к нему вспомогательного предложения.

Лемма 4. *Оператор $\mathcal{P}^{\xi}$ есть косой проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^{\xi}$ параллельно подпространству $C^{-1}\mathcal{H}^{\xi}_{\perp}$.*

Доказательство. Указанный проектор характеризуется условиями: $\big(\mathcal{P}^{\xi}\big)^2 = \mathcal{P}^{\xi}$; $\operatorname{Ran} \mathcal{P}^{\xi} = \mathcal{H}^{\xi}$; $\operatorname{Ker} \mathcal{P}^{\xi} = C^{-1}\mathcal{H}^{\xi}_{\perp}$. Легко проверяется, что правая часть (1.10) им удовлетворяет. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если оператор C невырожден и допускает факторизацию $C = V_{\#}^* V$ с V, $V_{\#} \in \mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$, то справедливо представление:*

$$\Pi^{\xi} = C\mathcal{P}^{\xi}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{3.2}$$

Доказательство. Фиксируем $\xi > 0$ и выберем $x \in \mathcal{H}$. По лемме 4 имеем представление

$$x = \mathcal{P}^{\xi} x + C^{-1} y$$

с $y \in \mathcal{H}_{\perp}^{\xi}$, отвечающее разложению в прямую сумму $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{\xi} \dot{+} C^{-1}\mathcal{H}_{\perp}^{\xi}$. Отсюда имеем представление

$$Cx = C\mathcal{P}^{\xi} x + y, \tag{3.3}$$

отвечающее разложению

$$\mathcal{H} = C\mathcal{H}^{\xi} \dot{+} \mathcal{H}_{\perp}^{\xi} \tag{3.4}$$

(сумма прямая по изоморфности C).

Пусть $C = V_{\#}^{*} V$ с V, $V_{\#} \in \mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$; тогда

$$Cx = V_{\#}^{*}\big(P^{\xi} + P_{\perp}^{\xi}\big) V x = \Pi^{\xi} x + V_{\#}^{*} P_{\perp}^{\xi} V x. \tag{3.5}$$

Поскольку классы $\mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$ и $\mathcal{T}_c \cap \mathcal{I}$ совпадают, фактор V вполне треуголен. В силу последнего, найдется элемент $x_1 \in \mathcal{H}^{\xi}$ такой, что $P^{\xi} V x = V x_1$, откуда $\Pi^{\xi} x = V_{\#}^{*} P^{\xi} V x = C x_1 \in C\mathcal{H}^{\xi}$. Из (1.1) следует равенство $P^{\xi} V_{\#}^{*} = P^{\xi} V_{\#}^{*} P^{\xi}$, откуда имеем: $P^{\xi} V_{\#}^{*} P_{\perp}^{\xi} V x = 0$, т.е. $V_{\#}^{*} P_{\perp}^{\xi} V x \in \mathcal{H}_{\perp}^{\xi}$. Значит, представление (3.5), как и представление (3.3) отвечает разложению (3.4). По единственности такого представления заключаем: $C\mathcal{P}^{\xi} x = \Pi^{\xi} x$. Лемма доказана.

3.2. Доказательство теоремы 2. Начнем с простого предложения общего характера. Если $C = V_{\#}^{*} V$ с V, $V_{\#} \in \mathcal{T}$, то справедливы интегральные представления

$$\big(D_{V_{\#}}\big)^{*} V = \int_0^T dP^{\xi}\, d\Pi_{V_{\#} V}^{\xi}; \quad \big(D_V\big)^{*} V_{\#} = \int_0^T dP^{\xi}\, d\big(\Pi_{V_{\#} V}^{\xi}\big)^{*}, \tag{3.6}$$

причем существование диагоналей равносильно сходимости интегралов. В самом деле, имеем равенства

$$\big(D_{V_{\#}}\big)^{*} V = \langle \text{см. } (1.8) \rangle = D_{V_{\#}^{*}} V =$$

$$= \Big(\int_0^T dP^{\xi} V_{\#}^{*} dP^{\xi}\Big) V = \int_0^T dP^{\xi}\, d\Pi_{V_{\#} V}^{\xi};$$

второе из равенств (3.6) выводится аналогично.

Напомним условия теоремы 1: оператор C невырожден и допускает каноническую факторизацию $C = E^*_{\#}E : E,\ E_{\#} \in \mathcal{T}_s \cap \mathcal{I}$; $D_{E_{\#}} = \mathbb{I}$. В этом случае имеем равенства:

$$E = \left(D_{E_{\#}}\right)^* E = \langle \text{см. } (3.6)\rangle = \int\limits_0^T dP^\xi\, d\Pi^\xi_{E_{\#}E} =$$

$$= \langle \text{см. } (3.2)\rangle = \int\limits_0^T dP^\xi C d\mathcal{P}^\xi,$$

что дает первое из представлений (1.11); второе очевидно. Теорема доказана.

3.3. Замечания. Если $C = \mathbb{I} + K$ с $K \in \mathfrak{S}_\infty$, а цепочка $\{\mathcal{H}^\xi\}$ непрерывна, то каноническая факторизация совпадает с т.н. *специальной* факторизацией $C = (\mathbb{I}+L)^*(\mathbb{I}+R)$ с $L,\ R \in \mathfrak{S}_\infty$, изучавшейся в [5]. Совпадение $E_{\#} = \mathbb{I} + L$ вытекает из соотношений

$$D_{\mathbb{I}+L} = D_{\mathbb{I}} + D_L = \langle \text{см. } (1.9)\rangle = \mathbb{I},$$

которые суть следствия свойств диагонали.

Для операторов L и R известны классические представления через интеграл треугольного усечения (ИТУ), причем невырожденность C и сходимость ИТУ необходимы и достаточны для существования специальной факторизации. В смысле сказанного, наши результаты обобщают результаты [5] на класс изоморфизмов, но лишь частично: вопрос о достаточности упомянутых условий для существования канонической факторизации остался открытым. Отметим также, что связь ИТУ с нашей конструкцией (Амплитудным Интегралом) не является простой [2].

Литература

1. М. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* Препринт ЛОМИ I-P-90, Ленинград 1990, 41с.
2. М. И. Белишев, А. Б. Пушницкий, *К треугольной факторизации положительных операторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 45–60.
3. M. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method).* — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), 1–45.

4. М. И. Белишев, *К единственности восстановления младших членов волнового уравнения по динамическим граничным данным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **249** (1997), 55–76.
5. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве.* Наука, М. (1967).

Belishev M. I. On the triangular factorization of isomorphisms.

The paper deals with an operator construction (so-called the Amplitude Integral) working in the BC-method for dynamical inverse problems. The AI is applied to the problem of the triangular factorization, the class of factorized operators being isomorphisms of the Hilbert space. A continual analog of matrix diagonal is introduced. Uniqueness of the factorization in which one of the factors has the prescribed diagonal is established. Under additional assumptions on operator, the representation of the factors through the AI is obtained. This representation gives efficient tool of the factorization. Some of the obtained results generalize the classical ones concerning to the factorization of operators of the class "unit plus compact."

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 октября 1999 г.