Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

Н. Я. Кирпичникова,
В. Б. Филиппов, А. С. Кирпичникова

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ РАЗЛИЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ИМПЕДАНСА НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СРЕД

В работе [1] рассматривалась *задача дифракции* электромагнитной плоской волны *от скачка импеданса* на границе раздела двух сред. Импеданс в плоскости раздела двух сред всюду, кроме узкой полосы, имел постоянное значение. *В узкой полосе* импеданс имел *другое постоянное значение, не сильно отличающееся от первого.*

В настоящей статье мы проанализируем *задачи дифракции* электромагнитной плоской волны от *слабо изменяющегося переменного импеданса* в полосе $|x| \leqslant l$. Поведение рассеянной волны будет существенно зависеть как от ширины этой полосы, так и от закона изменения импеданса. Рассмотрим полосу, много меньше длины волны: $kl \ll 1$, и полосу, сравнимую с длиной волны: $kl \sim O(1)$.

Будут исследованы следующие виды изменения импеданса (см. рис. 1):

I. Импеданс g первой группы задач определен условиями:

$$g = \begin{cases} g_0, & \text{при} \quad |x| > l/2, \\ g_0 + f(x), & \text{при} \quad |x| \leqslant l/2. \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь функция скачка $f(x)$ принимает различные, но малые, значения:

(i) функция *линейно* зависит от x, принимая значения от 0 до $g_1 - g_0$ на отрезке $[-l/2, 0]$ и значение от $g_1 - g_0$ до 0 на отрез-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (грант 99-01-00107).

ке $[0, l/2]$:

$$f(x) = \begin{cases} (g_1 - g_0)\left(1 + \dfrac{2x}{l}\right), & \text{при} \quad x \in [-l/2, 0], \\ (g_1 - g_0)\left(1 - \dfrac{2x}{l}\right), & \text{при} \quad x \in [0, l/2], \end{cases} \qquad (0.1')$$

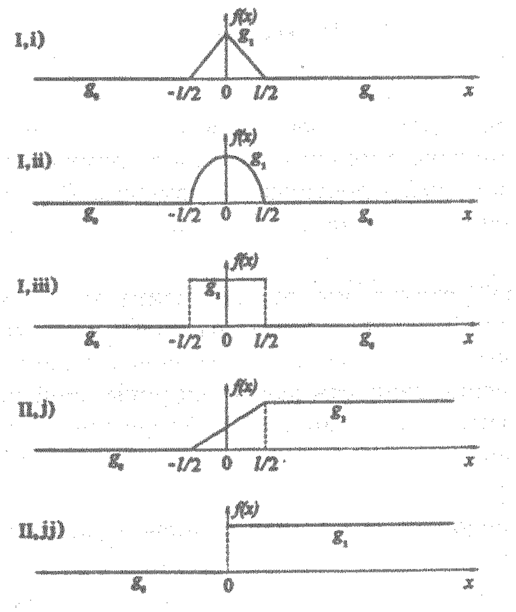

Рис. 1.

(ii) функция $f(x)$ является гладкой монотонно возрастающей от 0 до $g_1 - g_0$ на отрезке $[-l/2, 0]$ и монотонно убывающей от $g_1 - g_0$ до 0 на отрезке $[0, l/2]$ функцией. Отметим, что как и в предыдущем случае $\max|f(x)| \leqslant (g_1 - g_0)$. Для определенности считаем, что закон изменения функции $f(x)$ является *квадратичным*:

$$f(x) = (g_1 - g_0)\left[1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2\right], \quad \text{при} \quad x \in [-l/2, l/2], \qquad (0.1'')$$

(iii) функция $f(x)$ изменяется *скачкообразно*:

$$f(x) = g_1 - g_0, \quad \text{при} \quad x \in [-l/2, l/2]. \qquad (0.1''')$$

II. Импеданс g второй группы задач дифракции определен так:

(j) импеданс *линейно* изменяется с одного постоянного значения на другое:

$$g = \begin{cases} g_0 & \text{при} \quad x < -l/2, \\ g_1 & \text{при} \quad x > l/2, \\ g_0 + \dfrac{g_1 - g_0}{2}\left(\dfrac{2x}{l} + 1\right) & \text{при} \quad |x| \leqslant l/2. \end{cases} \tag{0.2}$$

(jj) импеданс *скачкообразно* изменяется с одного постоянного значения на другое при $x = 0$:

$$g = \begin{cases} g_0, & \text{при} \quad x < 0, \\ g_1, & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{0.2$'$}$$

Общее, объединяющее рассматриваемые задачи состоит в том, что изменение импеданса на полосе является малой величиной $|g_1 - g_0| \ll 1$. Ввиду этого,

(1) при исследовании электромагнитных волн, рассеянных от измененного импеданса, будем исходить из уравнений Максвелла для однородной изотропной среды;

(2) для решения интегральных уравнений будет применен метод последовательных приближений.

Электрическая и магнитная составляющие поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца, импедансным условиям на границе раздела сред и условиям излучения Зоммерфельда. При исследовании полученных задач будет использована плодотворная идея В. А. Фока [2, 3] о сведении этих задач к решению некоторых интегральных уравнений. Затем полученные интегральные уравнения исследовались методом последовательных приближений.

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы плоскость xy совпадала с границей раздела сред, а плоскость xz с плоскостью падения волны.

Угол падения волны (угол между направлением падения волны и осью z) обозначим через θ_0, угол преломления через θ_1, угол скольжения волны для верхней и нижней сред соответственно обозначим через φ_j, $j = 0, 1$.

Обычно предполагается, что поверхности раздела являются идеально проводящими. Так, если плоскость $z = 0$ принимается идеально проводящей, то на ней ставятся граничные условия:

$$E_y = 0, \quad E_x = 0, \quad \text{при} \quad z = 0.$$

Естественным обобщением этих условий являются условия импедансного типа (см. [2, 3, 4]). Если электромагнитное поле рассматривается в полупространстве $z > 0$, а в полупространстве $z < 0$ имеется большой комплексный показатель преломления, то на его границе ставятся граничные условия Леонтовича

$$E_y = \mathcal{Z} H_x, \quad E_x = -\mathcal{Z} H_y, \quad \text{при} \quad z = 0,$$

связывающие тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей. Величину $\mathcal{Z}$ называют волновым сопротивлением среды и $\mathcal{Z}$ не зависит от z.

Два условия на границе раздела сред можно заменить одним, если импеданс $\mathcal{Z}_1$ приближенно считать не зависящим от угла преломления θ_1.

Тогда для случая $\mathbf{E}$, лежащего в плоскости падения, имеем

$$z = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} + \gamma_{\|} H_y = 0, \quad \gamma_{\|} = i\frac{\omega\varepsilon}{c}\mathcal{Z}_1, \quad \mathcal{Z}_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}},$$

а для случая $\mathbf{E}$, перпендикулярного плоскости падения, получаем:

$$z = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} + \gamma_{\perp} E_y = 0, \quad \gamma_{\perp} = i\frac{\mu\omega}{c\mathcal{Z}_1}.$$

Мы получили “граничное условие третьего рода” или “импедансное условие”, при помощи которого задача о поле в верхней среде решается полностью, без обращения к полю в нижней среде.

Итак, пусть на границу раздела сред (плоскость xy, $z = 0$) в плоскости xz падает электромагнитная волна, которая может быть представлена в виде суперпозиции двух волн, у одной из которых вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости падения, а у другой лежит в этой плоскости (см. рис. 2).

Составляющие электромагнитного поля E_y и H_y в верхней среде для двух поляризаций обозначим через u, причем функция u удовлетворяет уравнению Гельмгольца, стандартным условиям излучения при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty$ и “импедансным условиям” на границе раздела двух сред:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{0.3}$$

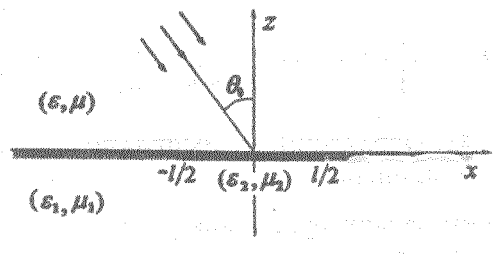

Рис. 2.

где
$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Условие излучения Зоммерфельда для поля u формулируется так
$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0, \quad \operatorname{Im} k > 0, \tag{0.4}$$
и, наконец, импедансное условие на границе раздела сред следующее:
$$\frac{\partial u}{\partial z} + ikgu = 0, \qquad z = 0. \tag{0.5}$$
Для импеданса, постоянного на всей плоскости раздела, функция $ikg = ikg_0$ определена выражениями
$$ikg_{0\|} = ik\sqrt{\frac{\varepsilon_0\mu_1}{\varepsilon_1\mu_0}} = ik_1\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} = ik_1\varkappa_\varepsilon, \quad \varkappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}, \tag{0.6$_\|$}$$
$$ikg_{0\perp} = ik_0\sqrt{\frac{\varepsilon_1\mu_0}{\varepsilon_0\mu_1}} = ik_1\frac{\mu_0}{\mu_1} = ik_1\varkappa_\mu, \quad \varkappa_\mu = \frac{\mu_0}{\mu_1}, \tag{0.6$_\perp$}$$
(ε_1 может быть большой величиной по модулю, когда велика проводимость нижней среды σ_1).

Решение задачи (0.3)–(0.5) с импедансом (0.6) представим в виде падающей и отраженной волн с различными коэффициентами отражения для двух поляризаций (их будем отличать значками $\perp$ и $\|$ в коэффициентах отражения).

В случае импедансного граничного условия (0.5) с постоянным импедансом g_0 такие решения имеют вид:
$$u_\perp^0 = E_0 e^{ikx\sin\theta_0}\left[e^{-ikz\cos\theta_0} + \frac{\cos\theta_0 - g_{0\perp}}{\cos\theta_0 + g_{0\perp}}e^{ikz\cos\theta_0}\right]. \tag{0.7}$$

Другая поляризация определяется формулой:

$$u_{\|}^{0} = H_0 e^{ikx\sin\theta_0}\left[e^{-ikz\cos\theta_0} + \frac{\cos\theta_0 - g_{0\|}}{\cos\theta_0 + g_{0\|}} e^{ikz\cos\theta_0}\right]. \qquad (0.8)$$

§1. Отражение от импеданса, возмущенного на малой полосе

(I): Рассмотрим задачу отражения падающей плоской электромагнитной волны от границы раздела двух сред, на которой заданы импедансные условия (0.1), возмущенные на полосе ширины $|x| \leqslant l$. Будем предполагать, что ширина полосы является малой величиной по сравнению с длиной волны: $l \ll \lambda$, ($\lambda = \frac{2\pi}{k}$ – длина электромагнитной волны).

Пусть поле u при $z > 0$ удовлетворяет задаче (0.3)–(0.5).

Импеданс g в (0.5) определен условием (0.1):

$$g = \begin{cases} g_0, & \text{при} \quad |x| > l/2, \\ g_0 + f(x) & \text{при} \quad |x| \leqslant l/2. \end{cases}$$

Здесь функция скачка $f(x)$ принимает различные, но малые значения (i), (ii), (iii).

Решение u задачи (0.3)–(0.5) представим в виде суммы неизвестного слагаемого U и известного решения этой же задачи u^0, но с постоянным импедансом g_0:

$$u = U + u^0. \qquad (1.1)$$

В формуле (1.1) u^0 означает либо $u_{\perp}^0$, либо $u_{\|}^0$, (см. формулы (0.7)–(0.8)), в зависимости от направленности падающего поля.

Для функции U получим следующую задачу (условия излучения удовлетворяют равенству (0.4) для функции U):

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad z > 0, \quad k \equiv k_0, \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + ikgU = -iku^0 \begin{cases} 0, & \text{при} \quad |x| > l/2,\ z = 0, \\ f(x), & \text{при} \quad |x| \leqslant l/2,\ z = 0. \end{cases} \qquad (1.3)$$

Решение задачи (1.2)–(1.3) найдем, используя функцию Грина для постоянного импеданса.

Функция Грина $G(M, M_0)$ удовлетворяет задаче

$$(\Delta + k^2)G(M, M_0) = -\delta(M - M_0), \quad z > 0, \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} + ikg_0 G = 0, \quad z = 0, \tag{1.5}$$

и условию излучения (0.4).

С помощью функции Грина решение задачи (1.2)–(1.3) может быть представлено в виде

$$U(x,z) = -ik \int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')U(x',0)G(x,z;x',0)dx' -$$

$$-ik \int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')u^0(x',0)G(x,z;x',0)dx'. \tag{1.6}$$

Формулу (1.6) будем рассматривать на границе раздела, т.е. при $z = 0$:

$$U(x,0) = -ik \int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')U(x',0)G(x,0;x',0)dx' -$$

$$-ik \int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')u^0(x',0)G(x,0;x',0)dx'. \tag{1.7}$$

Подставив в формулу (1.7) значение функции Грина $G(M, M_0)$, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода для нахождения решения задачи (1.2), (1.3) при $z = 0$.

Зная $U(x,0)$, по формуле (1.6) найдем $U(x,z)$. Подставив $U(x,z)$ в равенство (1.1), окончательно отыщем решение искомой задачи (0.3)–(0.5). Решение u^0 для постоянного импеданса g_0 определено формулами (0.7)–(0.8).

Обратимся к нахождению функции Грина.

Построение функции $G(M, M_0)$ проведем стандартным методом преобразования Фурье

$$G(M, M') = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')\xi} kG_1(z, z', \xi) d\xi.$$

Окончательно функция Грина $G_1(z,z',\xi)$, представляется в виде

$$G_1(z,z',\xi)= \tag{1.8}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{e^{ik(z-z')\sqrt{1-\xi^2}}(\sqrt{1-\xi^2}+g_0)+e^{ik(z+z')\sqrt{1-\xi^2}}(\sqrt{1-\xi^2}-g_0)}{-2ik\sqrt{1-\xi^2}(\sqrt{1-\xi^2}+g_0)}, & z>z', \\ \dfrac{e^{ik(z'-z)\sqrt{1-\xi^2}}(\sqrt{1-\xi^2}+g_0)+e^{ik(z'+z)\sqrt{1-\xi^2}}(\sqrt{1-\xi^2}-g_0)}{-2ik\sqrt{1-\xi^2}(\sqrt{1-\xi^2}+g_0)}, & z<z'. \end{cases}$$

Обращая внимание на то, что в интегральном уравнении (1.6) значение функции Грина необходимо знать лишь при $z'=0$, получим для функции Грина в этом случае формулу:

$$G(x,z;x',z'=0)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik[(x-x')\xi+z\sqrt{1-\xi^2}]}}{\sqrt{1-\xi^2}+g_0}d\xi. \tag{1.9}$$

Решение интегрального уравнения (1.7) найдем приближенно с помощью метода итераций, так как ядро интегрального уравнения на малом промежутке интегрирования $kl\ll 1$ либо мало, либо ограничено, так как $\max|f(x)|\leqslant|g_1-g_0|\ll 1$ является малой величиной по условию задачи.

За начальное приближение выберем известную правую часть:

$$U^{(0)}(x,0)=-ik\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(x')u^0(x',0)G(x,0;x',0)dx', \tag{1.10}$$

где $G(x,0;x',0)$ определена выражением (1.9). Тогда начальное приближение искомой функции $U^{(0)}(x,z)$ находится по формуле:

$$U^{(0)}(x,z)=-ik\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(x')\Big[-ik\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(x'')u^0(x'',0)G(x',0;x'',0)dx''\Big]\times$$

$$\times G(x,z;x',0)dx'-ik\int\limits_{-l/2}^{l/2}f(x')u^0(x',0)G(x,z;x',0)dx'. \tag{1.11}$$

Нас будет интересовать поведение поля в дальней от возмущенного импеданса области, т.е. мы ищем поле, рассеянное от этого возмущения.

В области $kr \gg 1$, $r = \sqrt{(x-x')^2+z^2}$ функция Грина (1.9) имеет вид

$$G(x,z;x',0) = \frac{i}{2}\frac{\sin\varphi}{(\sin\varphi+g_0)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}\left(1+O\left(\frac{1}{kr}\right)\right). \quad (1.12)$$

Здесь угол φ есть угловая координата точки наблюдения.

В случае, когда обе точки (источника и наблюдателя) лежат на границе раздела (при $z=0$), функция Грина представляется также формулой (1.12), но для $r = |x-x'|$.

Исследуем первое приближение к решению интегрального уравнения (1.7).

Пусть точка наблюдения располагается в зоне, далекой от возмущения импеданса, ($k|x| \gg 1$), и, кроме того, отрезок, на котором возмущен импеданс, мал $kl \ll 1$.

Асимптотическое поведение функции G при $k|x-x'| \gg 1$ приводит к следующему выражению для итерации $U^0(x,0)$:

$$U^0(x,0) \sim \frac{k}{2}A^0\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi+g_0}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi k|x|}}e^{i(k|x|-\frac{\pi}{4})}\times$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1}{k|x|}\right)\right)\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')dx'. \quad (1.13)$$

По условию задачи в формуле (1.13) $\max|f(x)| \leqslant |g_1-g_0|$ малая величина и зависит от поляризации электромагнитного поля. Соответственно, для разных поляризаций значение амплитудного множителя у поля $u^0(x',0)$ при экспоненте $\exp\{-ikx'\cos\varphi_0\}$ так же будет различным:

$$A^0_\perp = E_0\left[\frac{2\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0+g_{0\perp}}\right], \quad (1.14)$$

$$A^0_\parallel = H_0\left[\frac{2\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0+g_{0\parallel}}\right]. \quad (1.15)$$

Используя значение итерации $U^0(x,0)$, запишем первое приближение неизвестной функции $U(x,z)$, обозначенное через $U^0(x,z)$, формулой:

$$U^0(x,z) = -ik\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')(U^0(x',0)+u^0(x',0))G(x,z;x',0)dx'. \quad (1.16)$$

Окончательно, из формулы (1.16) получим добавочное к падающей волне u^0 слагаемое в виде произведения цилиндрической волны с коэффициентом рассеяния $F(\varphi_0,\varphi)$ на величину порядка $(k\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')dx')$:

$$U^0(x,z)\sim E_0(H_0)\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}F(\varphi_0,\varphi)k\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')dx'\times$$

$$\Big(1+O(kl(g_1-g_0)\Big), \tag{1.17}$$

$$F(\varphi_0,\varphi)=\frac{\sin\varphi}{(\sin\varphi+g_{0\perp(\|)})}\frac{\sin\varphi_0}{(\sin\varphi_0+g_{0\perp(\|)})}. \tag{1.18}$$

Замечание. Отметим, что

(i) в случае, когда функция $f(x)$ аппроксимируется *линейной* функцией и определена формулой $(0.1')$, интеграл $k\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')dx'$ равен $(g_1-g_0)\,kl/2$;

(ii) если функция $f(x)$ подчинена *квадратичному* закону изменения $(0.1'')$, то интеграл $k\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')dx'$ равен $(g_1-g_0)2/3kl$.

(iii) *скачкообразное* изменение функции $f(x)$ приводит интеграл $k\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')dx'$ к равенству $(g_1-g_0)kl$.

Скачок импеданса (g_1-g_0) по условию задачи мал и $kl\ll 1$.

Окончательно, получим формулу для поля, рассеянного от возмущения (0.1) импеданса на отрезке $kl\ll 1$.

Выпишем выражение для итерации $U^0(x,z)$ при $kr\gg 1$ с учетом того, что $|kl|\ll 1$

$$U^0(x,z)\sim E_0(H_0)\frac{\sin\varphi}{(\sin\varphi+g_{0\perp(0\|)})}\frac{\sin\varphi_0}{(\sin\varphi_0+g_{0\perp(0\|)})}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}\times$$

$$\times\left[k\int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')dx'\right]\Big(1+O\big(kl(g_1-g_0)\big)\Big). \tag{1.19}$$

Выражение в квадратных скобках $\left[k\int_{-l/2}^{l/2}f(x')dx'\right]$ для трех случаев (i), (ii) и (iii) различных возмущений $f(x)$ импеданса оценивается величиной

$$(g_1-g_0)kl/2\leqslant k\int_{-l/2}^{l/2}f(x')dx'\leqslant(g_1-g_0)kl,$$

зависящей от скачка импеданса

$$(g_{1\perp}-g_{0\perp})=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\right], \tag{1.20}$$

$$(g_{1\|}-g_{0\|})=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}\right], \tag{1.21}$$

и от ширины полосы $|kl|\ll 1$, на которой происходит скачок импеданса.

Дифракция от импеданса, возмущенного (гладко или скачкообразно) на отрезке $|x|\leqslant l$ *при* $|kl|\ll 1$ *по формуле* (0.1), *(случаи* (i), (ii), (iii)*), подобна дифракции от точечного источника, сосредоточенного на оси y-ов.*

Сравним линейное и квадратичное изменение импеданса (i), (ii) настоящей работы с результатами работы [1], где рассмотрено скачкообразное изменение импеданса: (iii) $f(x)=g_1-g_0$, $g_0\approx g_1$, на малом промежутке $|kl|\ll 1$. Оказалось, что качественная картина из-за малости полосы изменения импеданса во всех трех случаях совпадает. Количественно эта разница колеблется от 1 до 1/2 в коэффициенте $kl(g_1-g_0)$.

Совсем другое поведение мы имеем, исследуя задачу дифракции от импеданса, возмущенного на конечном промежутке.

§2. Отражение от импеданса (0.1), возмущенного на конечном промежутке

(II): Рассмотрим задачу дифракции от импеданса вида (0.1), возмущенного на полосе конечной ширины $kl\sim O(1)$.

Исследуем первое приближение к решению интегрального уравнения (1.7) в случае конечного отрезка, на котором возмущен импеданс (0.1).

Пусть точка наблюдения располагается в дальней от возмущения импеданса зоне ($kr \gg 1$) *и отрезок, на котором возмущен импеданс, ограничен* $kl \sim O(1)$.

Представим следующим интегралом первую итерацию $U^0(x,z)$ к неизвестному слагаемому $U(x,z)$ решения вида (1.1) рассматриваемой задачи дифракции:

$$U^0(x,z) = -ik \int\limits_{-l/2}^{l/2} f(x')u^0(x',0)G(x,z;x',0)dx'. \tag{2.1}$$

На конечном промежутке интегрирования использование метода итераций при решении интегрального уравнения (1.16) оправдано тем, что функция $f(x)$ мала по условию задачи. Значение этой функции ограничено сверху величиной разности $g_1 - g_0$, $g_0 \approx g_1$.

Подставляя в интеграл (2.1) значение функции Грина $G(M,M')$ (1.12) при $kr \gg 1$ и решение u^0 (формулы (0.7)–(0.8)) для постоянного импеданса, получим интеграл

$$U^0(x,z) = C^0 \int\limits_{-l/2}^{l/2} \frac{f(x')}{g_1 - g_0} e^{ik(x-x')\cos\varphi_0} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} dx'. \tag{2.2}$$

Здесь C^0 есть подинтегральный множитель, независящий от переменной интегрирования x', равный

$$C^0 = kE_0(H_0)F(\varphi_0,\varphi)(g_1 - g_0)\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-ikx\cos\varphi_0}. \tag{2.3}$$

Сделаем в интеграле (2.2) замену переменной

$$x - x' = r\cos\varphi, \quad -dx' = drcos\varphi, \tag{2.4}$$

и тогда получим три разных интеграла, соответствующих трем рассматриваемым видам импеданса ((i), (ii), (iii)) формулы (0.1):

(i) Перейдем к исследованию задачи дифракции от возмущенного *линейно* на конечном промежутке импеданса (0.1′):

$$U_i^0(x,z) =$$

$$= -C^0\cos\varphi \Big\{ \Big[1 + \frac{2x}{l}\Big] \int\limits_{r_{-l/2}}^{r_0} + \Big[1 - \frac{2x}{l}\Big] \int\limits_{r_0}^{r_{l/2}} \Big\} e^{ikr[1+\cos\varphi\cos\varphi_0]} \frac{dr}{\sqrt{kr}} +$$

$$+\frac{2C^0\cos^2\varphi}{kl}\left\{\int\limits_{r_{-l/2}}^{r_0}-\int\limits_{r_0}^{r_{l/2}}\right\}e^{ikr[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]}\sqrt{kr}dr, \qquad (2.5)$$

где

$$r_{l/2}=\sqrt{(x-l/2)^2+z^2}, \quad r_{-l/2}=\sqrt{(x+l/2)^2+z^2}, \quad r_0=\sqrt{x^2+z^2}.$$

Далее для вычисления $U_i^0(x,z)$ воспользуемся подстановкой

$$kr[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]=t^2, \quad k[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]\,dr=2t\,dt, \qquad (2.6)$$

и введем обозначение для интеграла Френеля:

$$\Phi\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right)=\frac{2}{\sqrt{i\pi}}\int\limits_0^z e^{it^2}\,dt. \qquad (2.7)$$

Тогда с помощью формул (2.6), (2.7) запишем интеграл $U_i^0(x,z)$ в виде:

$$U_i^0(x,z)=\frac{2C^0\sqrt{i\pi}\cos^2\varphi}{kl\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\left[r_{-l/2}\Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)+r_{l/2}\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)-2r_0\Phi\left(\frac{t_0}{\sqrt{i}}\right)\right]+$$

$$+\frac{2C^0 i\cos^2\varphi}{k^2l[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]^{3/2}}\left\{[t_{**}e^{it_{**}^2}+t_*e^{it_*^2}-2t_0e^{it_0^2}]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\pi i}}{2}\left[\Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)+\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)-2\Phi\left(\frac{t_0}{\sqrt{i}}\right)\right]\right\}, \qquad (2.8)$$

где параметры t_*, t_{**} и t_0 равны:

$$t_*=\sqrt{kr_{l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]},$$

$$t_{**}=\sqrt{kr_{-l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]},$$

$$t_0=\sqrt{kr_0[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]}. \qquad (2.9)$$

Подставляя в (2.8) значение C^0, получим первую итерацию к решению u^0 при дифракции от *линейного* возмущения $(0.1')$ импеданса на конечном промежутке. При этом отметим, что третья группа слагаемых интегралов Френеля, содержащих в знаменателе большой параметр $kr \gg 1$, мала по сравнению с первой. Вторая группа слагаемых представляет из себя цилиндрические волны, рассеивающиеся от точек $x = -l/2, 0, l/2$, в которых происходит изменение значений импеданса $(0.1')$. Окончательно имеем:

$$U_i^0(x,z) = \frac{-\sqrt{2}E_0(H_0)\cos\varphi F(\varphi_0,\varphi)(g_1 - g_0)e^{-ikx\cos\varphi_0}}{\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}} \times$$

$$\times\left\{\left(1+\frac{2x}{l}\right)\left[\Phi\left(\frac{t_0}{\sqrt{i}}\right) - \Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right) + \frac{e^{i(t_0^2+\pi/4)}}{\sqrt{\pi}t_0} - \frac{e^{i(t_{**}^2+\pi/4)}}{\sqrt{\pi}t_{**}}\right]\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right) - \Phi\left(\frac{t_0}{\sqrt{i}}\right) + \frac{e^{i(t_*^2+\pi/4)}}{\sqrt{\pi}t_*} - \frac{e^{i(t_0^2+\pi/4)}}{\sqrt{\pi}t_0}\right]\right\}. \quad (2.10)$$

В формуле (2.10) выражения

$$(g_1 - g_0)\left(1+\frac{2x}{l}\right) \quad \text{и} \quad (g_1 - g_0)\left(1-\frac{2x}{l}\right)$$

есть значения функции $f_i(-l/2 < x < 0)$ и $f_i(0 < x < l/2)$, описывающей линейный закон изменения импеданса на промежутке $[-l/2, 0, l/2]$ от постоянного значения g_0 до g_1, (см. рис. 1).

(ii) Проводя выкладки, аналогичные предыдущим, дадим окончательную формулу для первой итерации к решению u^0 при дифракции от *квадратичного* возмущения импеданса $(0.1'')$:

$$U_{ii}^0(x,z) = \frac{-C^0\cos\varphi\sqrt{i\pi}}{k\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\left(1-\frac{4x^2}{l^2}\right)\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right) - \Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)\right] -$$

$$+\frac{8C^0 ix\cos^2\pi}{k^2l^2[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]^{3/2}}\left(t_* e^{it_*^2} - t_{**}e^{it_{**}^2} - \frac{\sqrt{\pi i}}{2}\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right) - \Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)\right]\right)$$

$$-\frac{4C^0 i\cos^3\varphi}{k^3l^2[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]^{5/2}}\left[\left(t_{**}^3 + \frac{3i}{2}t_{**}\right)e^{it_{**}^2} - \left(t_*^2 - \frac{3i}{2}t_*\right)e^{it_*^2}\right]. \quad (2.11)$$

Преобразуем выражение (2.11) к более компактному виду, используя формулы (2.9):

$$U_{ii}^0(x,z) = \frac{-C^0\sqrt{i\pi}\cos\varphi}{k\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\left(1-\frac{4x^2}{l^2}\right)\left\{\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right) - \Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)\right] -\right.$$

$$+\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{e^{it_*^2}}{t_*}-\frac{e^{it_{**}^2}}{t_{**}}\right]+\frac{3}{2\sqrt{i\pi}}\left[\frac{e^{it_*^2}}{t_*t_{**}^2}-\frac{e^{it_{**}^2}}{t_{**}t_*^2}\right]$$

$$-\left[\frac{ix}{(x+l/2)t_*^2}+\frac{3}{4t_*^2t_{**}^2}\right]\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)-\Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)\right]\Bigg\}. \qquad (2.12)$$

Ввиду того, что мы исследуем рассеянное поле при $kr \gg 1$ и $kl \sim O(1)$, все параметры t_0, t_*, t_{**} в (2.9) являются величинами порядка $\sqrt{kr} \gg 1$. Следовательно, в формуле (2.12) последние два слагаемых малы по сравнению с первым. Основной вклад дает разность Френелевских интегралов, описывающих полутеневые эффекты от краев отрезка $[-l/2, l/2]$. Подставим значение C^0 в формулу (2.12) и получим главное слагаемое первой итерации к решению u^0 в виде:

$$U_{ii}^0(x,z)=\frac{-\sqrt{2}E_0(H_0)(g_1-g_0)\cos\varphi F(\varphi_0,\varphi)e^{-ikx\cos\varphi_0}}{\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\times$$

$$\times\left[1-\frac{4x^2}{l^2}\right]\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)-\Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)+\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{it_*^2}}{t_*}-\frac{e^{it_{**}^2}}{t_{**}}\right)\right]. \qquad (2.13)$$

Осталось рассмотреть случай *скачкообразного* возмущения импеданса.

(iii) Здесь первая итерация к решению u^0 даст только одно слагаемое:

$$U_{iii}^0(x,z)=\frac{-C^0\cos\varphi\sqrt{i\pi}}{k\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)-\Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)\right]. \qquad (2.14)$$

Используя формулу для C^0, окончательно получим

$$U_{iii}^0(x,z)=\frac{-\sqrt{2}E_0(H_0)(g_1-g_0)\cos\varphi F(\varphi_0,\varphi)e^{-ikx\cos\varphi_0}}{\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\times$$

$$\times\left[\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)-\Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)\right]. \qquad (2.15)$$

Сравним характер рассеянной волны для трех видов (2.10), (2.13), (2.15) малого возмущения импеданса на конечном промежутке. Малость возмущения импеданса определяется множителем (g_1-g_0), входящим во все три формулы. Основной вклад от концов отрезка в случаях (ii), (iii)) и от трех точек изменения импеданса $(-l/2, 0, l/2)$ в случае (i) дает линейная комбинация Френелевских интегралов, описывающих полутеневые эффекты. При скачкообразном возмущении импеданса полутеневые эффекты не пропадают при любом положении точки наблюдателя. При линейном и квадратичном возмущении импеданса для наблюдателя находящегося в точках $(\pm l/2, z)$ или в точках $(0, z)$ эти эффекты могут пропадать.

§3. Дифракция от импеданса, линейно и скачкообразно переходящего от одного постоянного значения к другому, на отрезке конечной длины

(III): Рассмотрим задачу отражения падающей плоской электромагнитной волны от границы раздела двух сред, на которой заданы импедансные условия с линейным переходом на полосе $|x| \leqslant l/2, \quad kl \sim O(1)$ от одного постоянного значения к другому.

Пусть поле u при $z > 0$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (0.3), условиям излучения (0.4) при $z > 0$ и импедансному краевому условию (0.5):

$$\frac{\partial u}{\partial z} + ikgu = 0, \quad z = 0. \tag{3.1}$$

Импеданс g в (3.1) определен следующим условием:

(j) *линейно* изменяется от g_0 до g_1:

$$g = \begin{cases} g_0, & \text{при} \quad x < -l/2, \\ g_1, & \text{при} \quad x > l/2, \\ g_0 + \frac{g_1 - g_0}{2}\left(\frac{2x}{l} + 1\right) & \text{при} \quad |x| \leqslant l/2. \end{cases} \tag{3.2}$$

(jj) *скачкообразно* от g_0 до g_1:

$$g = \begin{cases} g_0, & \text{при} \quad x < 0, \\ g_1, & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{3.2$'$}$$

Отметим, что разность импедансов $|g_1 - g_0| \ll 1$.

Решение u задачи (0.3)–(0.5) представим в виде суммы неизвестного слагаемого U и известного решения этой же задачи u^0, но с постоянным импедансом g_0:

$$u = U + u^0. \tag{3.3}$$

Здесь u^0 означает либо $u^0_\perp$, либо $u^0_\parallel$, (см. формулы (0.7)–(0.8)), в зависимости от направленности падающего поля.

Для функции U получим следующую задачу (функция U удовлетворяет условию излучения (0.4)):

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad z > 0, \quad k \equiv k_0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + ikUg = -iku^0 \begin{cases} 0, & \text{при } \ x < -l/2,\ z = 0, \\ g_1 - g_0, & \text{при } \ x > l/2,\ z = 0, \\ \frac{g_1 - g_0}{2}\left(\frac{2x}{l} + 1\right), & \text{при } \ |x| \leqslant l/2,\ z = 0. \end{cases}$$

Используя функцию Грина $G(M, M')$ (1.9) для постоянного импеданса g_0 на всей плоскости раздела, представим решение задачи для U в виде

$$U(x,z) = -ik(g_1 - g_0)\int\limits_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{x'}{l} + \frac{1}{2}\right)(U(x',0) + u^0(x',0))G(x,z;x',0)dx' -$$

$$-ik(g_1 - g_0)\int\limits_{l/2}^{\infty}(U(x',0) + u^0(x',0))G(x,z;x',0)dx'. \qquad (3.4)$$

Уравнение (3.4) будем искать методом последовательных приближений, так как разность импедансов мала $(g_1 - g_0) \ll 1$.

Рассмотрим поведение решения (3.4) в дальней зоне при $kr \gg 1$, где $r = \sqrt{(x - x')^2 + z^2}$. В этой области изменения функция Грина имеет следующее выражение

$$G(x,z;x',0) = \frac{i}{2}\frac{\sin\varphi}{(\sin\varphi + g_0)}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}\left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right)\right). \qquad (3.5)$$

Вычислим первую итерацию интеграла (3.4) в случае изменения импеданса по законам (3.1), (3.2), (3.2$'$). Проводя выкладки, аналогичные параграфам 1 и 2, получим, что интеграл по бесконечному промежутку интегрирования будет равен:

$$I^\infty = -\frac{C^0\cos\varphi\sqrt{i\pi}}{k\sqrt{1 + \cos\varphi_0\cos\varphi}}\left(1 - \Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)\right). \qquad (3.6)$$

Воспользовавшись формулой (2.3) для C^0, окончательно интеграл I^∞ запишем в виде

$$I^\infty = - \frac{\sqrt{2}E_0(H_0)e^{-ikx\cos\varphi_0}\cos\varphi F(\varphi_0,\varphi)(g_1-g_0)}{\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\left(1-\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)\right). \quad (3.7)$$

Наконец осталось вычислить интеграл $I(x,z)$ по конечному интервалу:

$$I(x,z) = -ik(g_1-g_0)\int\limits_{-l/2}^{l/2}(\frac{x'}{l}+\frac{1}{2})u^0(x',0)G(x,z;x',0)dx'.$$

Подставляя в интеграл $I(x,z)$ значение функции Грина $G(M,M')$ и решение для постоянного импеданса на всей границе раздела u^0, получим два различных подинтегральных выражения и, следовательно, два интеграла

$$I(x,z) = I1 + I2 = C^0\int\limits_{-l/2}^{l/2}\left[\frac{x'-x}{l}+\left(\frac{x}{l}+\frac{1}{2}\right)\right]e^{ik(x-x')\cos\varphi_0}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}dx'.$$

Проводя выкладки, аналогичные вышеупомянутым, имеем для интеграла $I2$:

$$I2 = -\frac{C^0\cos\varphi\sqrt{i\pi}}{k\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\left[\frac{x}{l}+\frac{1}{2}\right]\left(\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right)-\Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right)\right), \quad (3.8)$$

а параметры t_*, t_{**} определены формулами (2.9).

Проведя замену переменной в интеграле $I1$, получим его в виде:

$$I1 = \frac{2C^0\cos^2\varphi}{k^2 l[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]^{3/2}}\int\limits_{t_{**}}^{t_*}t^2e^{it^2}\,dt,$$

где нижний и верхний параметры интегрирования t_{**}, t_* определены формулой (2.9). Возьмем этот интеграл по частям и найдем его в виде

$$I1 = \frac{C^0\cos^2\varphi e^{-i\pi/2}}{k^2 l[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]^{3/2}}\left[te^{it^2}\Big|_{t_{**}}^{t_*} - \int\limits_{t_{**}}^{t_*}e^{it^2}\,dt\right].$$

Окончательно имеем

$$I1 = \frac{C^0 \cos^2 \varphi e^{-i\pi/2}}{k^2 l[1+\cos\varphi_0 \cos\varphi]^{3/2}} \times$$

$$\times \left[[t_* e^{it_*^2} - t_{**} e^{it_{**}^2}] - \frac{\sqrt{i\pi}}{2} \left(\Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right) \right) - \Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right) \right) \right]. \qquad (3.9)$$

Нулевое приближение $U_j^0(x,z)$ в случае *линейного* перехода импеданса с одного постоянного значения на другое запишется в таком виде:

$$U_j^0(x,z) = -\frac{C^0 \cos\varphi \sqrt{i\pi}}{k\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}} \times$$

$$\times \left\{ 1 + \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right] \left[1 + \frac{i}{2t_*^2}\right] \Phi\left(\frac{t_*}{\sqrt{i}}\right) - \left[\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right] \left[1 + \frac{i}{2t_{**}^2}\right] \Phi\left(\frac{t_{**}}{\sqrt{i}}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\pi}} \left(\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{2}\right) \frac{e^{it_*^2}}{t_*} - \left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{it_{**}^2}}{t_{**}} \right) \right\}. \qquad (3.10)$$

Подставив значения C^0, параметров

$$t_{**} = \sqrt{kr_{-l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]}, \quad t_* = \sqrt{kr_{l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]},$$

и учитывая то, что одновременно с $kr \gg 1$ будут велики и параметры t_*, t_{**}, получим заключительную формулу для первого приближения к решению

$$U_j^0(x,z) = -\frac{E_0(H_0)(g_1-g_0)\sqrt{2} e^{-ikx\cos\varphi_0} \cos\varphi F(\varphi_0,\varphi)}{\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2x}{l}\right] \Phi\left(\frac{\sqrt{kr_{l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]}}{\sqrt{i}} \right) - \right.$$

$$- \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2x}{l}\right] \Phi\left(\frac{\sqrt{kr_{-l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]}}{\sqrt{i}} \right)$$

$$+ \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\left(1 - \frac{2x}{l}\right) \frac{e^{ikr_{l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi] - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{kr_{l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]}} + \right.$$

$$\left. \left. + \left(1 + \frac{2x}{l}\right) \frac{e^{ikr_{-l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi] - i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{kr_{-l/2}[1+\cos\varphi_0\cos\varphi]}} \right] \right\}, \qquad (3.11)$$

где

$$r_{l/2} = \sqrt{(x - l/2)^2 + z^2}, \quad r_{-l/2} = \sqrt{(x + l/2)^2 + z^2}.$$

Два последних слагаемых формулы (3.11) определяют цилиндрические волны, расходящиеся от концов отрезка $[-l/2, l/2]$.

Используя предыдущие формулы и подстановки, легко можно записать выражение для первой итерации U^0_{jj} в случае *скачкообразного* изменения импеданса:

$$U^0_{jj}(x,z) = -\frac{C^0 \cos\varphi\sqrt{i\pi}}{k\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\left\{1 - \Phi\left(\frac{t_0}{\sqrt{i}}\right)\right\}, \tag{3.12}$$

где

$$r_0 = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad t_0 = \sqrt{kr_0[1 + \cos\varphi_0\cos\varphi]}.$$

Подставим значение C^0 в формулу (3.12)

$$U^0_{jj}(x,z) = -\frac{E_0(H_0)(g_1 - g_0)\sqrt{2}e^{-ikx\cos\varphi_0}\cos\varphi F(\varphi_0,\varphi)}{\sqrt{1+\cos\varphi_0\cos\varphi}}\times$$

$$\times\left\{1 - \Phi\left(\frac{t_0}{\sqrt{i}}\right)\right\}, \tag{3.13}$$

и после этого сравним рассеянное поле (3.11) и (3.13) в двух случаях изменения импеданса:

(j) с g_0 линейно до g_1 и jj) скачкообразно с g_0 до g_1.

Оказалось, что в случае *линейного* изменения импеданса характер рассеянной волны определяется поверхностной волной $e^{-ikx\cos\varphi_0}$ с общим множителем для всех задач. На эту поверхностную волну накладываются полутеневые эффекты, возникающие от линейной комбинации интегралов Френеля, и цилиндрические волны, расходящиеся от концов отрезка $[-l/2, l/2]$.

В случае *скачкообразного* изменения импеданса рассеянная волна определяется такой же поверхностной волной $e^{-ikx\cos\varphi_0}$ с тем же общим множителем, как и для всех задач. На поверхностную волну накладывается полутеневая френелевская волна, возникающая от скачка импеданса.

Литература

1. В. Б. Филиппов, Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция электромагнитных волн на малых неоднородностях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 304-322.
2. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* Изд-во "Советское радио", М. (1970).
3. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации.* М. (1966).
4. Г. А. Гринберг, В. А. Фок, *К теории береговой рефракции электромагнитных волн.* В сб.: Исследования по распространению радиоволн. 2, Изд. АН СССР (1948).

Kirpichnikova N. Ya., Phillipov V. B., and Kirpichnikova A. S. Diffraction of electromagnetic waves from different perturbations of impedance on the interface between two media.

The problems of the diffraction of the electromagnetic flat wave, scattered from small perturbations of impedance on small and finite segments on the interface between two media, are investigated. The impedance perturbations are subjected to linear, guadratic or jump-like laws.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 12 октября 1999 г.