Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

А. П. Киселев, А. С. Старков

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ИНТЕГРАЛ ТИПА ПИРСИ ДЛЯ ПРЕЛОМЛЕННОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

1. Введение

Эффекты полного внутреннего отражения при преломлении высокочастотных волн на резкой границе являются предметом внимания многих исследований (см., например, работы [1–7] и ссылки в них). Один из таких эффектов состоит в возникновении волн с комплексными эйконалами, описание которых в рамках традиционного лучевого метода встречается с трудностями.

Мы интересуемся полем преломленной волны в окрестности предельного луча в медленной среде, когда источник находится в быстрой среде недалеко от границы раздела. Используется метод параболического уравнения, см., например, [8, 9], который не связан с возможностью разделения переменных. Строится общее решение параболического уравнения, затем находится его асимптотика при удалении от предельного луча в докритическом направлении. Из сшивания с построенной ранее лучевым методом [5–7] "нелучевой" преломленной волной, называемой сейчас P^*, или же с существующей в докритической области волной P, что мы предпочитаем, решение параболического уравнения определяется однозначно. Оно выражается через интеграл типа Пирси [10]. Можно проследить, что это решение склеивается в закритической области с существующими там волнами. Подобные интегралы фигурировали уже в работе [11], не связанной с конкретными дифракционными задачами, и в связи с анализом точного решения, построенного методом Фурье [12]. Отметим, что окрестность предельного луча для источника, расположенного в медленной среде, описывается другими интегралами, сводящимися к функциям параболического цилиндра [2, 3].

Работа завершена при частичной поддержке гранта ИНТАС-РФФИ 95-0012 и гранта Минвуза РФ 97-0-13.1-29.

В работе, исключительно для краткости, обе среды считаются однородными, а граница плоской. Конструкция переносится на уравнения теории упругости и другие уравнения, описывающие линейные волновые процессы.

2. Постановка задачи

Мы рассматриваем двумерную задачу, математическая постановка которой такова. Пусть x и z – декартовы координаты, см. Рис. 1. Поле, возбуждаемое источником, расположенным в точке $Q = (0, z_0), z_0 > 0$, быстрой среды, описывается уравнениями

$$u_{xx} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{a^2}\, u = -\delta(x)\delta(z - z_0), \quad z > 0, \tag{2.1}$$

$$u_{xx} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{b^2}\, u = 0, \quad z < 0, \tag{2.2}$$

удовлетворяет краевым условиям

$$u\big|_{z=+0} = u\big|_{z-0} = 0, \quad u_z\big|_{z=+0} = u_z\big|_{z-0} = 0, \tag{2.3}$$

и условию излучения, отвечающему временно́й зависимости $\exp(-i\omega t)$. Здесь a и b – скорости распространения в верхней (быстрой), и нижней (медленной) средах,

$$a > b > 0,$$

z_0 – расстояние источника до границы, а $\omega > 0$ – угловая частота.

Волновые фронты в интересующей нас медленной среде изображены на Рис. 1. Для источника на границе, в точке Q^*, фронты волн P и P^* - дуги окружности, а $\tilde{P}$ – прямолинейный фронт головной волны. В этом случае имеется особая прямая – предельный луч, выходящий из Q^* под углом полного внутреннего отражения и изображенный пунктиром на Рис.1. На этой прямой сливаются фронты трех волн, и лучевые формулы становятся непригодны. Из численного моделирования и анализа точного решения (см.,например, ссылки в [4]) вытекает, что при малых и умеренных значениях безразмерной глубины источника $\omega z_0/a$ картина фронтов качественно сохраняется. Фронты волн P и P^* близки к окружностям, а $\tilde{P}$ - к прямой.

Непосредственное применение лучевого метода к их вычислению (в виду близости источника к границе) затруднительно, однако возможны трюки, основанные на использовании принципа

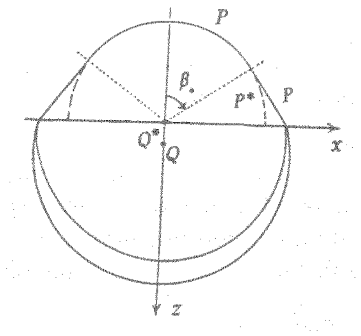

Рис. 1. Фронты волн.

взаимности [5, 6] или рассмотрении комплексных лучей [7]. Из получающегося при этом выражения, см. далее формулу (3.3), видно, что вблизи предельного луча лучевые формулы для волн P и P^*, как и для поверхностного источника, непригодны.

Нашей целью является исследование поля в окрестности предельного луча в медленной среде на больших безразмерных удалениях от проекции $Q^* = (0,0)$ источника на границу, $\omega r/b \gg 1$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Вследствие симметрии задачи мы ограничиваемся только значениями $x > 0$.

Предельный луч задается уравнением

$$\beta = \beta_*, \tag{2.4}$$

где β – угол между осью z (вертикалью) и направлением на наблюдателя из точки Q^*, а

$$\beta_* = \arcsin\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.5}$$

– угол полного внутреннего отражения.

3. Лучевые разложения волн

Опишем старшие члены лучевых разложений волн P и P^*. Нам потребуется величина α, связанная с углом преломления β законом Снеллиуса

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}. \tag{3.1}$$

В докритической области $\beta < \beta_*$ величина α действительна и имеет смысл угла падения на границу плоской волны из быстрой среды, см. Рис. 2. В закритической области $\beta > \beta_*$ угол α, определяемый из (3.1), комплексный, поскольку

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\sin^2\beta} = i\frac{a}{b}\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\beta_*}\ .$$

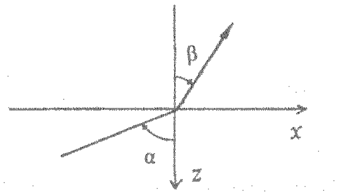

Рис. 2. Углы α и β в докритическом случае.

Волна P^* имеет, как известно [4, 5–7], лучевой вид

$$u \approx u^0 \exp(i\omega\tau) \tag{3.2}$$

с эйконалом

$$\tau = \frac{r}{b} + \frac{h\cos\alpha}{a} + \frac{h^2}{2br}\left(\frac{a\cos\beta}{b\cos\alpha}\right)^2 \sin^2\beta + O\left(\frac{h^3}{br^2}\right), \tag{3.3}$$

где $r = \sqrt{x^2+z^2}$ – расстояние между наблюдателем и Q^*.

В двумерном случае амплитуда u^0 имеет вид [7]

$$u^0 = A\frac{W(\beta)}{\sqrt{r}}, \tag{3.4}$$

причем

$$W(\beta) = \frac{2\frac{\cos\beta}{b}}{\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b}} \tag{3.5}$$

описывает зависимость поля от угла преломления β, а константа A, определяемая размерностью пространства и амплитудой источника, равна

$$A = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi\varkappa}}, \tag{3.6}$$

где

$$\varkappa = \frac{\omega}{b}$$

– волновое число медленной среды.

Выражение для волны P точно такое же, и получается так же, только α в формулах (3.3) и (3.5) вещественное.

Введем еще (малый) угол, составляемый радиусом-вектором наблюдателя с критическим лучом,

$$\beta' = \beta - \beta_*. \tag{3.7}$$

Отметим, что третий член в (3.3) сингулярен при $\beta = \beta_*$, и это свидетельствует о необходимости другого описания поля при малых β'.

В окрестности предельного луча нам удобно пользоваться прямоугольными координатами ξ и η, см. Рис. 3,

$$\xi = x \sin\beta_* - z\cos\beta_*, \quad \eta = x\cos\beta_* + z\sin\beta_*, \tag{3.8}$$

введенными так, что ξ – расстояние вдоль предельного луча от Q^* до наблюдателя. Докритическим точкам отвечают отрицательные β' и η, закритическим – положительные, а на самом критическом луче $\beta' = 0$ и $\eta = 0$.

Из (3.3) следует, что при $\beta' \to 0$ для волн P и P^*

$$\omega\tau \approx \varkappa\xi. \tag{3.9}$$

Таков же, как можно показать, и главный член фазы волны $\widetilde{P}$.

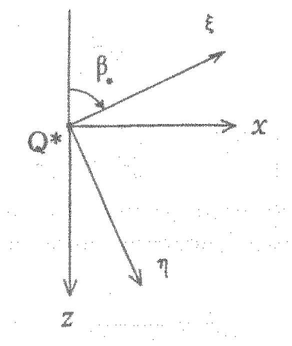

Рис. 3. Координаты ξ и η.

4. Параболическое уравнение

Для описания поля в окрестности предельного луча, где становятся одинаковыми фазы всех трех волн, P, P^* и $\widetilde{P}$, выделим общий для них множитель, т.е. будем искать поле в виде

$$u = \exp(i\varkappa\xi)\Psi, \tag{4.1}$$

откуда $2i\varkappa\Psi_\xi + \Psi_{\eta\eta} + \Psi_{\xi\xi} = 0$. Предполагая, как обычно делается в методе параболического уравнения [8, 9], что Ψ меняется по поперечной переменной η быстрее, чем по продольной ξ, отбрасываем $\Psi_{\xi\xi}$, и получаем приближенное уравнение

$$2i\varkappa\Psi_\xi + \Psi_{\eta\eta} = 0, \tag{4.2}$$

или

$$2i\Psi_\xi + \Psi_{HH} = 0, \tag{4.3}$$

где введена растянутая переменная

$$H = \sqrt{\varkappa}\,\eta.$$

Преобразование Фурье по H дает общее решение уравнения (4.3) в виде

$$\Psi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Phi}(p)\exp\left[i\left(Hp - \xi\frac{p^2}{2}\right)\right]dp,$$

где $\widetilde{\Phi}(p)$ – произвольная функция. Заменив переменную, получаем

$$\Psi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(s)\exp\left[i\varkappa\xi\left(\theta s - \frac{s^2}{2}\right)\right]ds, \tag{4.4}$$

где $\Phi(s) = \widetilde{\Phi}(s/\sqrt{\varkappa})/\sqrt{\varkappa}$, а

$$\theta = \frac{\eta}{\xi} = \mathrm{tg}\beta' \approx \beta'. \tag{4.5}$$

Функцию $\Psi(s)$ мы определим при сшивании асимптотики интеграла (4.4) с лучевыми решениями для больших отрицательных H, но малых $\beta' < 0$.

5. Асимптотика в докритической области, сшивание с волной P и интеграл типа Пирси

При $\theta < 0$, т.е. в закритической области, фазовая функция в (4.4) $\theta s - s^2/2$ имеет одну стационарную точку $s = \theta$. Предполагая гладкость Φ в ее окрестности, для вклада стационарной точки имеем

$$\Psi^{st} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa\xi}}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\, \Phi(\theta), \quad \beta' < 0. \tag{5.1}$$

Вблизи предельного луча

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \approx \xi + \frac{\eta^2}{2\xi} = \xi + \xi\frac{\theta^2}{2},$$

и $\theta \approx \beta'$.

Вклад стационарной точки в поле (4.1) приобретает вид

$$u^{st} \approx \frac{\exp(i\varkappa r)}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa}}\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\, \Phi(\beta'). \tag{5.2}$$

Преобразовав с помощью асимптотики

$$\cos\alpha \approx \sqrt{\sin 2\beta_*}\,\sqrt{-\beta'},$$

$\sin 2\beta_* = 2\sqrt{b/a}\,\sqrt{1-(b/a)^2}$, выражение (3.2)–(3.6) для волны P и сопоставив его с (5.2), получаем

$$\Phi(s) = A\sqrt{\frac{\varkappa}{2\pi}}\, W(\beta_* + s)\exp\left(i\varkappa h\sqrt{-\beta'} - \frac{i\pi}{4}\right), \tag{5.3}$$

где обозначено

$$h = \frac{b}{a}\sqrt{\sin 2\beta_*}\, z_0. \tag{5.4}$$

В результате

$$\Psi = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(\beta_* + s)\exp\left[i\varkappa(h\sqrt{-s} + \eta s - \xi\frac{s^2}{2})\right] ds \approx$$

$$\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W(\beta_* + s)\exp\left[i\varkappa r(\frac{h}{r}\sqrt{-s} + \beta' - \frac{s^2}{2})\right] ds. \tag{5.5}$$

Этот выражение можно преобразовать к стандартному виду интеграла типа Пирси. Перейдя к переменной $t = \sqrt{-s}$, получим интеграл

$$\Psi = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} t \left(1 - \frac{b}{a}\sqrt{2\mathrm{tg}\beta_*}\, t + O(t^2)\right) \exp\left[i\varkappa(ht - \eta t^2 - \xi\frac{t^4}{2})\right] dt, \tag{5.6}$$

где контур Г изображен на Рис. 4. Интегралы, сводящиеся к (5.6) при учете лишь старшего члена 1 в амплитуде, встречались в [12]. Та же экспонента, но другой контур (вещественная ось) возникает в задаче о каустике с острием [10]. При $z_0 = 0$ (т.е. для поверхностного источника) выражение (5.6) сводится к функциям параболического цилиндра, известным для этого случая из [1-3].

Отметим, что прием, с помощью которого мы построили решение параболического уравнения, имеет сходство с тем, который использован в [13] для совершенно иной задачи.

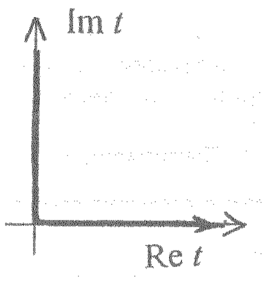

Рис. 4. Контур Г.

6. Закритическая область

Обсудим поле (4.1), (4.4) при $H \to +\infty$, пользуясь представлением (5.5). Проведем разрез в комплексной плоскости от 0 до $i\infty$. По-прежнему $s = \theta$ - единственная стационарная точка. Ее вклад в поле равен

$$u^{st} \approx \frac{W(\beta_* + \beta')}{2\sqrt{2\pi\varkappa r}} \exp\left[i\varkappa(r - h\sqrt{\beta'}) + \frac{i\pi}{4}\right], \tag{6.1}$$

и переходит в асимптотику волны P^* (3.2)–(3.5). Однако, в отличие от докритической области, при деформировании контура в перевальный, см. Рис. 5, возникает дополнительный вклад от интегрирования по берегам разреза. Он и дает волну $\widetilde{P}$.

Отметим, что задача о детальном прослеживании перехода преломленной волны $\widetilde{P}$ в головную при $z_0 \to 0$, насколько нам известно, не решена.

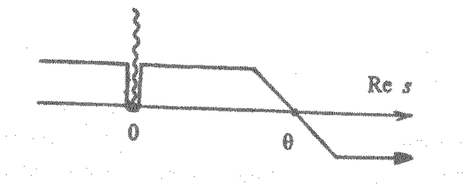

Рис. 5. Деформация контура в интеграле (5.5) для закритического случая.

7. Благодарность

Авторы признательны В. М. Бабичу и В. В. Камоцкому, доклад которых по их работе [14], где параболическое уравнение (4.3) и интеграл типа Пирси (5.6) возникают в другой ситуации и на основе других рассмотрений, заставил вспомнить о настоящей работе, выполненной около десяти лет назад.

Литература

1. Л. М. Бреховских, *Волны в слоистых средах.* Изд. АН СССР, Москва (1957).
2. T. B. Yanovskaya, *Uniform asymptotic representation of a field of reflected and head waves.* Proc. Roy. Soc. London, **A313** (1969), 477–490.
3. Т. Б. Яновская, *Равномерное асимптотическое представление поля отраженной волны в упругой среде,.* Вычислительная сейсмология, **24**, (1991), 185–196.
4. V. M. Babich, A. P. Kiselev, *Nongeometrical waves – are there any? An asymptotic description of some "nongeometrical" phenomena in seismic wave propagation.* Geophys. J., **99**, No. 2 (1989), 415–420.
5. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Геометрическое описание "нелучевых" волн* $P^*, S^*, \ldots$. Препринт ЛОМИ АН СССР, Ленинград (1987).
6. В. М. Бабич, А. П. Киселев, *Геометросейсмическое описание "нелучевой" волны* S^*. Изв. АН СССР. Физика Земли, No. 10 (1988), 67–71.
7. В. М. Бабич, *Применение комплексных лучей к расчету "негеометрических" волн в скалярном случае.* Зап. научн. семин. ЛОМИ, **186** (1990), 20–32.

8. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, Москва (1972).
9. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Изд. ЛГУ, Ленинград (1975).
10. T. Pearcey, *The structure of an electromagnetic field in a neighborhood of a cusp of a caustic.* Philosophical Magazine, **37** (1946), 311–317.
11. F. J. Wright, *The Stokes set of the cusp diffraction catastrophe.* J. Phys. A, **13**, No. 9 (1980), 2913–2928.
12. А. С. Старков, *Коротковолновая асимптотика поля преломленной сферической волны вблизи предельного луча.* Журнал технической физики, **58**, No. 6 (1988), 1224–1226.
13. В. С. Буслаев М. М. Скриганов, *Координатная асимптотика решения задачи рассеяния для уравнения Шредингера.* Теор. и матем. физика, **19**, No. 2 (1974), 217–232.
14. В. М. Бабич, В. В. Камоцкий, *О волновом поле вблизи точки падения предельного луча.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 22-32.

Kiselev A. P., Starkov A. S. Parabolic equation and Pearcey-type integral for a transmitted wavefield.

High-frequence wavefield of a point source situated near an interface of two homogeneous media and placed in the faster medium is considered. We are interested in description of a vicinity the critical ray in the slower medium. The description is given via the parabolic equation method. The result involves a Pearcey-type integral. The approach is not based on the Fourier method and can be generalised to inhomogeneous media with curved interfaces.

Институт проблем
машиноведения РАН

Поступило 14 декабря 1999 г.

С.-Петербургский
государственный университет