Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис

ЗАТУХАЮЩИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ МОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ, ПОМЕЩЕННОМ В УПРУГУЮ СРЕДУ

Ранее было показано, что в плоском слое, находящемся в нежестком контакте с окружающей средой, образуются волноводные моды (Kr-волны), имеющие ряд характерных особенностей, отличающих их от нормальных мод в свободном слое [1, 2]. К ним в частности относятся резонансный характер спектров распространяющихся импульсов, равенство групповой скорости промежуточному значению между скоростями продольной и поперечной волн в материале слоя, преимущественная поляризация вдоль слоя. Здесь будет показано, что в круговом цилиндрическом включении, находящемся внутри упругой среды и имеющим с ней нежесткий контакт, образуются волны с похожими особенностями.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат (r, z, θ) упругий стержень (1) $(-\infty < z < \infty, r \leqslant r_1)$, помещенный в упругую среду (2). Обозначим через a_i, b_i продольную и поперечную скорости в соответствующей i-й среде, а через ρ_i, μ_i, λ_i плотности и упругие модули. Между этими величинами существует известная связь: $\lambda_i + 2\mu_i = \rho_i a_i^2$, $\mu_i = \rho_i b_i^2$. Введем также следующие обозначения: $\mu_{21} = \mu_2/\mu_1$, $\rho_{21} = \rho_2/\rho_1$. На границе стержня и упругой среды выполняются условия скользящего контакта, сводящиеся к равенству нормальных смещений u_r и напряжений t_{rr} и к отсутствию касательных напряжений. Задачу будем считать осесимметричной и будем рассматривать собственные колебания в системе.

Уравнения движения в такой среде запишутся через продольные φ_i и поперечные ψ_i потенциалы в виде:

$$\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial z^2} = \frac{1}{a_i^2}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) гранты 99-01-00107, 99-05-64127.

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi_i}{\partial r} - \frac{\psi_i}{r^2} + \frac{\partial^2\psi_i}{\partial z^2} = \frac{1}{b_i^2}\,\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} \quad (i=1,2). \tag{1}$$

Напряжения t_{rr}, t_{rz} и смещения u_r, u_z связаны с потенциалами посредством равенств

$$\begin{aligned} t_{rz} &= \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial r} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},\\ t_{rr} &= \frac{\lambda}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial r},\\ u_r &= \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial z},\quad u_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}. \end{aligned} \tag{2}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} t_{rr1} &= t_{rr2}\\ t_{rz1} &= 0\\ t_{rz2} &= 0\\ u_{r1} &= u_{r2} \end{aligned}\right\} .r = r_1. \tag{3}$$

Применяя к уравнениям (1)–(2) последовательно преобразования Фурье по координате z и Лапласа по времени, трансформанты потенциалов можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_1 &= A\cos kzJ_0(krx_1)\,e^{k\eta t};\quad \overline{\psi}_1 = B\sin kzJ_1(kry_1)\,e^{k\eta t};\\ \overline{\varphi}_2 &= C\cos kzH_0^{(2)}(krx_2)\,e^{k\eta t};\quad \overline{\psi}_2 = D\sin kzH_1^{(2)}(kry_2)\,e^{k\eta t} \end{aligned} \tag{4}$$

где $x_1 = -i\alpha_1$, $y_1 = -i\beta_1$, $x_2 = -i\alpha_2$, $y_2 = -i\beta_2$, $\eta = -iv$,

$$\alpha_i = \sqrt{1-(v/a_i)^2},\quad \beta_i = \sqrt{1-(v/b_i)^2},\quad kr = \omega r/v$$

– безразмерное волновое число, v – фазовая скорость.

Подставляя (4) в граничные условия (3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, C, D. Приравнивая определитель системы Δ нулю, имеем дисперсионное уравнение:

$$\Delta(kr_1, v) = 0. \tag{5}$$

Для рассматриваемой модели (стержень в упругой среде) элементы a_{ik} $(1 \leqslant i \leqslant 4,\ 1 \leqslant k \leqslant 4)$ определителя Δ, отличные от нуля, имеют следующий вид:

$$a_{11} = -g_1 J_0\bigl(kr_1x_1\bigr) + \frac{2i\alpha_1}{kr_1}J_1\bigl(kr_1x_1\bigr);$$

$$a_{12} = -2i\beta_1 J_0(kr_1 y_1) - \frac{2}{kr_1} J_1(kr_1 y_1);$$

$$a_{13} = \mu_{21}\left[g_2 H_0^{(2)}(kr_1 x_2) - \frac{2i\alpha_2}{kr_1} H_1^{(2)}(kr_1 x_2)\right];$$

$$a_{14} = \mu_{21}\left[2i\beta_2 H_0^{(2)}(kr_1 y_2) + \frac{2}{kr_1} H_1^{(2)}(kr_1 y_2)\right];$$

$$a_{21} = -2i\alpha_1 J_1(kr_1 x_1); \quad a_{22} = g_1 J_1(kr_1 y_1); \tag{6}$$

$$a_{33} = -2i\alpha_2 H_1^{(2)}(kr_1 x_2); \quad a_{34} = g_2 H_1^{(2)}(kr_1 y_2);$$

$$a_{41} = i\alpha_1 J_1(kr_1 x_1); \quad a_{42} = -J_1(kr_1 y_1);$$

$$a_{43} = -i\alpha_2 H_1^{(2)}(kr_1 x_2); \quad a_{44} = H_1^{(2)}(kr_1 y_2),$$

где

$$g_1 = 2 - \frac{v^2}{b_1^2}; \quad g_2 = 2 - \frac{v^2}{b_2^2}.$$

В предельном случае ($\mu_{21} \to 0$) для модели стержень в жидкости дисперсионное уравнение упрощается и представляется в виде

$$2\rho_{21}\frac{v^4}{b_1^4}\alpha_1\frac{H_0^{(2)}(kr_1 x_2)}{H_1^{(2)}(kr_1 x_2)}+$$

$$+\alpha_2\left[-g_1^2\frac{J_0(kr_1 x_1)}{J_1(kr_1 x_1)} + 4\alpha_1\beta_1\frac{J_0(kr_1 y_1)}{J_1(kr_1 y_1)} - \frac{2i\alpha_1}{kr_1}\,\frac{v^2}{b_1^2}\right] = 0. \tag{7}$$

Корни дисперсионных уравнений (5), (7) описывают дисперсию и радиационное затухание нормальных волн, распространяющихся в стержне. Рассмотрим вначале случай, когда окружающая среда жидкая. При низких частотах ($kr_1 \to 0$) в модели распространяется только стержневая волна со скоростью, равной

$$v = \left(\frac{3 - 4\gamma_1^2}{1 - \gamma_1^2}\right)^{1/2} \quad (\gamma_1 = b_1/a_1),$$

которая совпадает со скоростью в свободном стержне [3]. С ростом частоты скорость волны изменяется и становится комплексной величиной, если скорость продольной волны в материале стержня больше скорости звуковой волны в окружающей жидкости. Для большинства реальных моделей такое условие выполняется. С увеличением частоты появляются новые затухающие моды колебаний. Однако существуют частоты, которые мы назовем резонансными, при которых фазовая скорость мод вещественна и равна продольной скорости в материале стержня. Рассмотрим случай, когда kr_1 конечно, а $|\alpha_1| \ll 1$. Разлагая левую часть (7) по степеням α_1 и ограничиваясь главным членом разложения, приходим к уравнению

$$J_1\left(kr_1\frac{\sqrt{1-\gamma_1^2}}{\gamma_1}\right) = 0, \tag{8}$$

из которого следует выражение для резонансных волновых чисел k_n^* и резонансных частот f_n^*:

$$k_n^* = \frac{\gamma_1}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}\,\frac{\sigma_n}{r_1}, \qquad f_n^* = \frac{\sigma_n\, b_1}{2r_1\pi\sqrt{1-\gamma_1^2}}, \tag{9}$$

где σ_n – корни функции Бесселя первого порядка ($\sigma_1 = 3.83$, $\sigma_2 = 7.02$, $\sigma_3 = 10.17\ldots$). Интересно заметить, что значения резонансных частот для стержня, определяемые равенством (9), оказываются близкими к значениям резонансных частот для слоя мощностью $h = 2r_1$, находящегося в нежестком контакте с упругой средой [1]:

$$f_n^* = \frac{nb_1}{2r_1\sqrt{1-\gamma_1^2}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Фазовая скорость колебаний v_{ph} при выполнении условий (9) равна скорости продольной волны в материале стержня. Групповая скорость v_g определяется по известной формуле

$$v_g = v_{ph} + kr_1\frac{dv_{ph}}{dkr_1}, \tag{11}$$

она находится между значениями скоростей продольной и поперечной волн. Для резонансных частот групповая скорость определяется в явном виде:

$$v_g = \left[1 - \frac{(1-2\gamma_1^2)^2(1-\gamma_1^2)}{(1-2\gamma_1^2)^2 + 4\gamma_1^2(1-\gamma_1^2)}\right]a_1. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь дисперсионное уравнение для модели стержень в упругой среде (5), (6). В случае, когда частота равна нулю, в модели существует только стержневая волна со скоростью равной

$$v = \left(\frac{3 - 4\gamma_1^2 + \mu_{21}}{1 - \gamma_1^2 + \gamma_1^2\mu_{21}}\right)^{1/2} b_1. \tag{13}$$

Из приведенного выражения следует, что окружающая среда влияет на скорость только через посредство модуля сдвига. С ростом частоты скорость стержневой волны становится комплексной величиной, если скорость продольной волны в материале стержня больше скорости поперечной волны в окружающей среде. Для большинства реальных моделей это условие выполняется.

Как и в случае модели стержень в жидкости, в рассматриваемой модели (стержень в упругой среде со скользящим контактом) также возникают затухающие моды (Kr) с резонансными частотами и волновыми числами, определяемыми равенствами (9). При отклонении от граничных частот увеличивается затухание волн, причем чем больше отличается частота от резонансной, тем затухание становится больше.

При проведении численных расчетов были выбраны две модели со следующими параметрами: 1. стержень в жидкости ($a_1 = 4$ км/с, $b_1 = 2.17$ км/с, $\rho_1 = 3$ г/см^3, $a_2 = 1.5$ км/с, $\rho_2 = 1$ г/см^3, $r_1 = 0.1$ м), 2. стержень в упругой среде ($a_1 = 4$ км/с, $b_1 = 2.17$ км/с, $\rho_1 = 3$ г/см^3, $a_2 = 3.0$ км/с, $b_2 = 1.5$ км/с, $\rho_2 = 2$ г/см^3, $r_1 = 0.1$ м). Затухание с расстоянием z происходит по закону $\exp(-\varkappa z)$, где коэффициент затухания $\varkappa$ вычисляется по формуле $\varkappa = \frac{\omega \operatorname{Im} v}{\operatorname{Re}^2 v}$. Результаты численных расчетов приведены на рис. 1, 2. Стрелкой на рисунках указано положение резонансных безразмерных волновых чисел. Сравнение поведения дисперсионных кривых $v_{ph}(kr)$ и $v_g(kr)$ для обеих моделей и обеих типов колебаний (стержневой и первой Kr) указывает на их близость. В то же время коэффициенты затухания значительно отличаются для обеих моделей. В случае модели со стержнем в упругой среде коэффициент затухания при kr отличном от резонансного значения оказывается значительно большим, чем для модели стержня в жидкости. Такое поведение $\varkappa$ объясняется тем, что в первом случае при распространении вдоль стержня в окружающую среду излучается две волны: продольная и поперечная, в то время, как в другой модели в жидкость излучается только продольная волна. В связи с этим в процессе распространения упругих затухающих колебаний вдоль цилиндрических упругих волноводов, имеющих с окружающей средой нежесткий контакт, происходит быстрое обогащение спектров волн Kr резонансными частотами. Эта же особенность затухающих волн была выявлена и для модели слой в упругой среде.

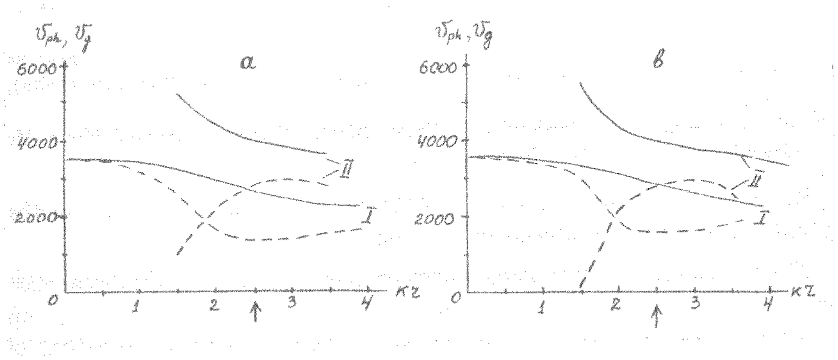

Рис. 1. Дисперсия фазовой (сплошные линии) и групповой (штриховые линии) скоростей стержневой волны (I) и первой моды Kr-волны (II) для двух моделей сред: стержень в жидкости (а) и стержень в упругой среде (в).

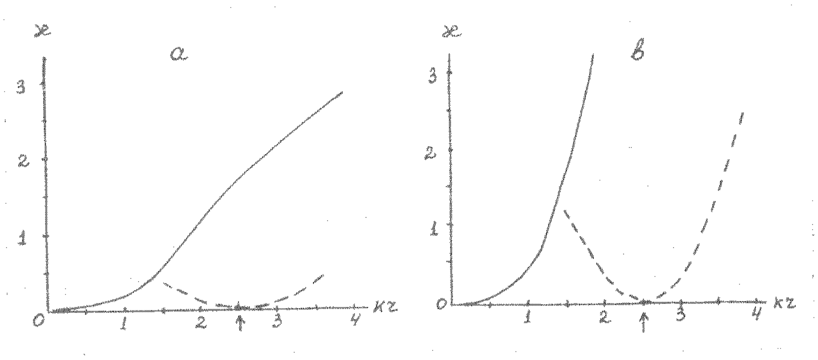

Рис. 2. Затухание стержневой волны (сплошные линии) и первой моды Kr-волны (штриховые линии) для двух моделей сред: стержень в жидкости (а) и стержень в упругой среде (в).

Таким образом показано, что волны типа Kr появляются и в стержневых структурах, помещенных в упругую среду. В инженерной геологии это может представлять интерес при изучении свайных сооружений, а в геологии при картировании жильных интрузий.

Литература

1. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **173** (1988), 113–122.
2. П. В. Крауклис, Л. А. Крауклис, *О влиянии границ разрыва в среде на интерференционные волны.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **179** (1989), 110–115.
3. W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, F. Press, *Elastic Waves in Layered Media.* Mc Graw-Hill Book Co., New York (1957).

Krauklis P. V., Krauklis L. A. Attenuating resonance modes in the cylindrical waveguide, placed in an elastic medium.

The interference attenuating waves propagating in the cylindrical elastic waveguide, placed in an elastic medium are considered. The group velocity of waves is intermediate between that of P-wave and that of S-wave, the phase velocity equal that P-wave. The frequency of wave is almost constant and determined by a requirement of the constructive inerference. The dispersion and attenuation of these waves are described.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 31 января 2000 г.