Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

М. А. Лялинов

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, ПАДАЮЩЕЙ НАКЛОННО НА РЕБРО ИМПЕДАНСНОГО КЛИНА: ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

1. Введение

При изучении дифракции коротких волн на рассеивающих объектах достаточно сложной структуры ключевое значение приобретает вычисление дифракционных коэффициентов. Дифракционные коэффициенты, вычисленные для ряда канонических задач, в силу принципа локальности могут быть использованы для построения коротковолновых асимптотических решений в ситуациях со значительно более сложной геометрией рассеивателя. Одной из наиболее известных канонических задач дифракции является задача о нормальном падении плоской электромагнитной волны на ребро импедансного клина. В этом случае, векторная задача сводится к двум независимым скалярным задачам, каждая из которых решается в замкнутой форме [1]. Решение скалярной задачи представлено в виде интеграла Зоммерфельда, который является разложением по плоским волнам. Спектральная функция этого разложения удовлетворяет функциональным уравнениям, называемым уравнениями Малюжинца. Функциональные уравнения решаются явно в терминах специальной мероморфной функции $\Psi_\phi(z)$ (функции Малюжинца).

Однако, даже непосредственное обобщение на случай наклонного падения плоской электромагнитной волны на ребро импедансного клина приводит к существенному усложнению задачи: расщепление на две скалярных задачи оказывается невозможным. Соответствующие спаренные уравнения Малюжинца связывают обе спектральные функции. Несмотря на многочисленные попытки, явные решения удалось найти только для некоторых специальных случаев [2–5]. Следует заметить, что отсутствие решения "в квадратурах" в общем случае вполне объяснимо, так как решение спаренных уравнений Малюжинца может быть сведено к некоторой задаче матричной факторизации. Известно, что явная факторизация матриц проводится лишь для специального класса матриц.

В последние годы предложен подход [6], позволяющий свести функциональные уравнения к сингулярным интегральным уравнениям, которые затем регуляризуются и исследуются традиционными методами. Заметим, что в ряде задач дифракции на клине применение стандартного метода возмущений для системы уравнений Малюжинца оказывается достаточно эффективным [7]. Некоторые интересные результаты для рассеяния волн в секториальных средах изложены в диссертации [8]. Существует много работ посвященных приближенному построению дифракционных коэффициентов (см., например, [9]) в задаче дифракции на клине.

2. Постановка задачи

Пусть импедансный клин освещается наклонно падающей плоской волной (Рис. 1). Угол β наклонного падения на ребро клина удовлетворяет неравенству $0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$. При нормальном падении на ребро $\beta = \frac{\pi}{2}$ и задача решается в явной форме. Ось Z совпадает с ребром клина, который является осью цилиндрической системы координат (r, φ, z). Пусть угол раскрыва клина 2Φ $\left(\frac{\pi}{2} < \Phi \leqslant \pi\right)$. Компоненты H_z^i и E_z^i падающей плоской волны описываются выражениями

$$[W_0 H_z^i, E_z^i]^T = \vec{U}_0 \exp(-ik' r \cos(\varphi - \varphi_0) + ik'' z), \tag{1}$$

где вектор-столбец $\vec{U}_0 = (U_{o1}, U_{02})^T$, $k' = k \sin\beta$, $k'' = k \cos\beta$, (зависимость от времени $e^{-i\omega t}$ в формуле (1) и далее опускается), k волновое число, W_0 волновой импеданс среды вне клина. Компоненты H_z и E_z полного поля удовлетворяют соотношениям

$$[W_0 H_z, E_z]^T = \vec{U}(r,\varphi) \exp(ik'' z), \quad \vec{U}(r,\varphi) = (U_1(r,\varphi), U_2(r,\varphi))^T, \tag{2}$$

где $\vec{U}(r,\varphi)$ является решением уравнения Гельмгольца вне клина

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (k')^2\right)\vec{U}(r,\varphi) = 0. \tag{2'}$$

Заметим, что если z-компоненты волнового поля известны, то остальные составляющие вычисляются по ним дифференциарова-

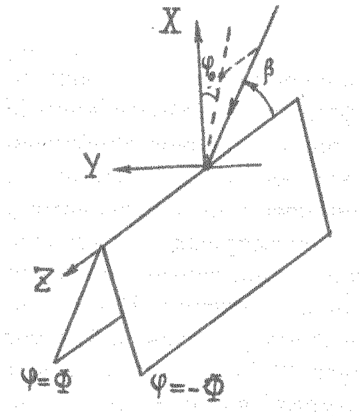

Рис. 1.

нием в соответствии с уравнениями Максвелла. На гранях клина выполнены импедансные граничные условия

$$\frac{i}{kr}\,\frac{\partial\vec{U}}{\partial\varphi}(r,\pm\Phi)=\mp\sin^2\beta A^{\pm}\vec{U}(r,\pm\Phi)+\cos\beta\,B\frac{i}{k}\,\frac{\partial\vec{U}}{\partial r}(r,\pm\Phi),\qquad(3)$$

где

$$A^{\pm}=\begin{pmatrix}W_{\pm} & 0\\ 0 & (W_{\pm})^{-1}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

W_+ и W_- импедансы граней $\varphi=\Phi$ и $\varphi=-\Phi$ соответственно,

$$\operatorname{Re}W_{\pm}>0.\qquad(4)$$

Условие Мейкснера на ребре имеет вид

$$U_i(r,\varphi)=C_i+O(r^{\delta}),\quad \delta>0,\quad i=1,2,\quad r\to 0,\qquad(5)$$

где C_i, δ постоянные.

Так как исследуется рассеяние плоской волны на клине с границами, уходящими на бесконечность, то условие при $r\to\infty$ формулируется следующим образом. Пусть волновое число $k=k_0+i\varkappa$ имеет малую положительную мнимую часть $\varkappa$. Обозначим U_i^g, $i=1,2$ геометрооптическое волновое поле, включающее падающую волну и волны отраженные от граней клина по законам геометрической оптики. Заметим, что U_i^g не являются непрерывными по φ и заменяют значения скачком на соответствующих границах света-тени. Геометрооптическая часть поля U_i^g, $i = 1, 2$ может быть вычислена явно с помощью известных законов отражения плоских волн от плоских границ. Мы требуем, чтобы при $r \to \infty$

$$|U_i(r,\varphi) - U_i^g(r,\varphi)| \leqslant D_i e^{-\varkappa a r}, \quad a > 0, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

т.е. модуль разности в левой части неравенства (6) экспоненциально стремится к нулю при $r \to \infty$. D_i, a некоторые постоянные.

Замечание 1. Предположим, что для любого малого $\varkappa > 0$ найдено единственное классическое решение $\vec{U}^{\varkappa}$ задачи дифракции (1)–(6). Если существует предельное классическое решение $\vec{U}^{(0)}$ при $\varkappa \to 0$, то говорят, что $\vec{U}^{(0)}$ есть классическое решение задачи дифракции, удовлетворяющее принципу предельного поглощения.

3. Единственность классического решения при $\varkappa > 0$

Пусть имеется два классических решения задачи (1)–(6). Составим их разность и обозначим ее $\vec{U}$. Вектор $\vec{U}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, граничному условию (3), условию Мейкснера $|\vec{U}(r,\varphi)| = O(r^{\delta})$ и оценке

$$|U_i(r,\varphi)| < D_i\, e^{-\varkappa a r} \tag{7}$$

при $r \to \infty$. Наша цель показать, что $\vec{U} \equiv \vec{0}$.

Удобно перейти к новому вектору $\vec{V}(r,\varphi) = P^{-1}\vec{U}(r,\varphi)$, где P преобразование подобия, диагонализующее матрицу B,

$$i\sigma = P^{-1} B P,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Вектор $\vec{V}$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца, тем же условиям, что и $\vec{U}$ при $r \to 0$ и $r \to \infty$ (см. (7)). Граничное условие (3) принимает вид

$$\frac{(\pm 1)}{r}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \varphi}(r,\pm\phi) = ik' \sin\beta\, J_{\pm} \vec{V}(r,\pm\phi) \pm i\cos\beta\sigma \frac{\partial \vec{V}}{\partial r}(r,\pm\phi), \tag{8}$$

где соответственно берутся верхние или нижние знаки,

$$J_{\pm}=\begin{pmatrix} \frac{W_{\pm}+W_{\pm}^{-1}}{2} & \frac{W_{\pm}-W_{\pm}^{-1}}{2i} \\ -\frac{W_{\pm}-W_{\pm}^{-1}}{2i} & \frac{W_{\pm}+W_{\pm}^{-1}}{2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим область $\Omega_{\varepsilon,R}\subset\mathbb{R}^2$ вне острого угла величины $2\pi-2\phi$, находящуюся внутри окружности радиуса R и вне окружности малого радиуса ε. Обе окружности имеют своим центром вершину угла. Граница $\partial\Omega_{\varepsilon,R}=S_R\cup S_\varepsilon\cup S_+\cup S_-$ состоит из дуг упомянутых окружностей и отрезков сторон угла S_+ и S_-, заключенных между этими окружностями. Умножим уравнение Гельмгольца для V_i, $i=1,2$ на $\overline{V_i}$, проинтегрируем по области $\Omega_{\varepsilon,R}$ и воспользуемся формулой Грина

$$(-1)\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}}|\nabla V_i|^2dv+(k')^2\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}}|V_i|^2dv+\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}}\frac{\partial V_i}{\partial n}\,\overline{V_i}ds=0, \qquad (9)$$

$i=1,2$, n внешняя нормаль к $\Omega_{\varepsilon,R}$. Вычислим комплексно сопряженное к (9), вычтем полученное равенство из (9) и выделим мнимую часть результата

$$\operatorname{Im}((k')^2-(\overline{k'})^2)\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}}|V_i|^2dv+\operatorname{Im}\int\limits_{\partial\Omega_{\varepsilon,R}}\left(\frac{\partial V_i}{\partial n}\,\overline{V_i}-\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial n}\,V_i\right)ds=0,\ \ i=1,2.$$

Сложим эти равенства для $i=1$ и $i=2$. Получим

$$\operatorname{Im}((k')^2-(\overline{k'})^2)\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}}(|V_1|^2+|V_2|^2)dv+$$

$$+\operatorname{Im}\int\limits_{\partial\Omega_{\varepsilon,R}}\left(\left\langle\frac{\partial\vec V}{\partial n},\,\vec V\right\rangle_{\mathbb{C}^2}-\overline{\left\langle\frac{\partial\vec V}{\partial n},\,\vec V\right\rangle_{\mathbb{C}^2}}\right)ds=0, \qquad (10)$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}^2}$ означает скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$. Примем во внимание, что $\operatorname{Im}((k')^2-(\overline{k'})^2)>0$, тогда очевидно, что для доказательства единственности классического решения ($\vec V=\vec 0$) достаточно проверить неотрицательность мнимой части интеграла по границе области $\Omega_{\varepsilon,R}$ в левой части равенства (10), когда $\varepsilon\to0$, $R\to\infty$. Заметим, что в силу условия Мейкснера и условия на бесконечности, соответственно интегралы по дугам S_ε и S_R стремятся к нулю. Для оценки интегралов по S_+ и S_- воспользуемся граничным условием (8) в подинтегральном выражении

$$\operatorname{Im}\left(\Big\langle \pm\frac{1}{r}\frac{\partial\vec V}{\partial\varphi},\vec V\Big\rangle_{\mathbb{C}^2}-\overline{\Big\langle \pm\frac{1}{r}\frac{\partial\vec V}{\partial\varphi},\vec V\Big\rangle_{\mathbb{C}^2}}\right)\Bigg|_{S_\pm}=$$

$$=2\operatorname{Im}\Big\langle \pm\frac{1}{r}\frac{\partial\vec V}{\partial\varphi},\vec V\Big\rangle_{\mathbb{C}^2}\Bigg|_{S_\pm}=\operatorname{Im}\left\{ik'\langle(J_\pm+J_\pm^*)\vec V,\vec V\rangle_{\mathbb{C}^2}\Big|_{S_\pm}+\right.$$

$$\left.+(\pm i)\cos\beta\left(\Big\langle\sigma\frac{\partial\vec V}{\partial r},\vec V\Big\rangle_{\mathbb{C}^2}+\overline{\Big\langle\sigma\frac{\partial\vec V}{\partial r},\vec V\Big\rangle_{\mathbb{C}^2}}\Bigg|_{S_\pm}\right)\right\}=$$

$$\operatorname{Im}\left\{ik'\langle(J_\pm+J_\pm^*)\vec V,\vec V\rangle_{\mathbb{C}^2}\Big|_{S_\pm}+(\pm i)\cos\beta\frac{\partial}{\partial r}\big\langle\sigma,\vec V,\vec V\big\rangle_{\mathbb{C}^2}\Big|_{S_\pm}\right\}.$$

Если подставить полученное выражение в интеграл, то интегрирование полной производной по r приводит к вычислению $\langle\sigma\vec V,\vec V\rangle\big|_{S_\pm}$ при $r=\varepsilon$ и $r=R$. Пользуясь условием Мейкснера и условием на бесконечности, убеждаемся, что в пределе $\varepsilon\to0$, $R\to\infty$ эта квадратичная форма аннулируется.

Остается проверить, что

$$\operatorname{Im}\left\{ik'\langle(J_\pm+J_\pm^*)\vec V,\vec V\rangle_{\mathbb{C}^2}\Big|_{S_\pm}\right\}\geqslant 0.$$

Если взять $\varkappa$ достаточно малым ($k'=(k_0+i\varkappa)\sin\beta$), то последнее неравенство следует из того, что $\operatorname{Re}(J_\pm+J_\pm^*)>0$ или равносильно $\operatorname{Re}W_\pm>0$ (см. (4)). Таким образом, для пассивных импедансов граней клина классическое решение задачи дифракции единственно, т.к. из $\vec V=\vec 0$ следует $\vec U=\vec 0$.

4. Интегралы Зоммерфельда и функциональные уравнения Малюжинца

Решение задачи ищется в виде интеграла Зоммерфельда

$$U_i(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^{-ik'r\cos\alpha}f_i(\alpha+\varphi)\,d\alpha,\quad i=1,2,\qquad(11)$$

где γ симметричный контур Зоммерфельда [1, 5], состоящий из двух петель γ_+ и γ_-, $\gamma_+ = (i\infty + \pi/2, \frac{\pi}{2} + id] \cup [\frac{\pi}{2} + id, -\frac{3\pi}{2} + id] \cup [-\frac{3\pi}{2} + id, -\frac{3\pi}{2} + i\infty)$, $d > 0$, а γ_- симметричен γ_+ относительно начала координат. Интегралы Зоммерфельда (11) удовлетворяют уравнению Гельмгольца, а для нахождения спектральных функций $f_i(\alpha)$ подставим решение (10) в граничное условие (3) и воспользуемся теоремой Малюжинца об обращении интеграла Зоммерфельда. Мы получим систему спаренных функциональных уравнений Малюжинца

$$A_j(\alpha)\vec{\psi}(\alpha - (-1)^j\Phi) = A(-\alpha)\vec{\psi}(-\alpha - (-1)^j\Phi), \quad j = 1, 2, \tag{12}$$

$$A_j(\alpha) = \begin{pmatrix} \sin\alpha - (-1)^j \sin\beta W_j & -\cos\beta\cos\alpha \\ \cos\beta\cos\alpha & \sin\alpha - (-1)^j \sin\beta W_j^{-1} \end{pmatrix}.$$

Решение системы функциональных уравнений (12) ищется в специальном классе мероморфных функций, а именно $\vec{p}si(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha))^T$ имеет единственный полюс в точке $\alpha = \varphi_0$ в полосе $\Pi_\Phi = \{\alpha : |\operatorname{Re}\alpha| < \Phi\}$, т.е. вектор

$$\vec{\psi}(\alpha) - \frac{1}{\alpha - \varphi_0}\vec{U} \quad \text{регулярен в} \quad \Pi_\phi. \tag{13}$$

Как и в скалярной задаче [1], наличие полюса в $\alpha = \varphi_0$ с заданным вычетом позволяет описать плоскую падающую волну, которая включается в полное поле $\vec{U}(r, \varphi)$ наряду с отраженными и рассеянными волнами. Необходимость удовлетворить условию Мейкснера (5) приводит к ограничению класса допустимых векторов

$$|f_i(\alpha) - f_i(\pm i\infty)| \leqslant \text{const}\, e^{-\delta|\operatorname{Im}\alpha|}, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

при $\operatorname{Im}\alpha \to \pm i\infty$ соответственно. Заметим, что если существует мероморфное решение уравнений (12), которое удовлетворяет (13), (14), то волновое поле (11) допускает оценку (6) при $r \to \infty$. Мероморфное решение уравнений (12), удовлетворяющее условиям (13) и (14), находится единственным образом. Если бы это было не так, то существовало бы по меньшей мере два классических решения задачи дифракции (1)–(6) вида (11), что противоречит единственности классического решения.

Заметим, что в случае единичного относительно импеданса $W_\pm = 1$, функциональные уравнения решаются явно в замкнутой форме. Это частный случай более общей ситуации, рассмотренной в [5]. Для произвольного импеданса граней явного решения построить не удается. В общем случае можно редуцировать функциональные уравнения к интегральным уравнениям фредгольмовского типа, тогда из единственности решения интегральных уравнений следует их разрешимость. Соответствующий подход будет рассмотрен в одной из последующих публикаций.

Литература

1. Г. Д. Малюжинец, *Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданным импедансами граней.* Доклады АН СССР, **121**, No. 3 (1958), 436–439.
2. V. G. Vaccaro, *The generalized reflection method in electromagnetism.* AEÜ, **34** (1980), 493–500.
3. O. M. Bucci, G. Franceschetti, *Electromagnetic scattering by a half plane with two face impedances.* Radio Sci., **11** (1976), 49–59.
4. J.-M. L. Bernard, *Diffraction at skew incidence by an anisotropic impedance wedge in electromagnetism theory: a new class of canonical cases.* J. Phys. A: Math. Gen., **31** (1998), 595–613.
5. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu, *Diffraction of a skewly incident plane wave by an anisotropic impedance wedge – a class of exactly solvable cases.* Wave Motion, **30** (1999), 275–288.
6. B. V. Budaev, *Diffraction by wedges.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, **322**. Essex: Longman. (1995).
7. M. A. Lyalinov, *Difraction by a highly contrast transparent wedge.* J. Phys. A: Math. Gen., **32** (1999), 2183–2206.
8. А. В. Осипов, *Новые методы исследования волновых полей в угловых областях.* Докторская диссертация, С.-Петербургский Университет (1995).
9. T. B. A. Senior, J. L. Volakis, *Approximate boundary conditions in electromagnetics.* The Institution of Electrical Engineers. Vol. 41, London (1995).

Lyalinov M. A. Diffraction of an electromagnetic plane wave obliquely incident on the edge of an impedance wedge: uniqueness of the classical solution.

The problem of diffraction of an electromagnetic plane wave by an impedance wedge is considered. Uniqueness of the classical solution is proved.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 10 января 2000 г.