Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

Л. А. Молотков

ОБ ИСТОЧНИКАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ БИО, И ОБ ОТРАЖЕНИИ ВОЛН НА ЭТОЙ ГРАНИЦЕ

Предлагаемая работа посвящена исследованию распространения волн в пористых флюидонасыщенных средах на основе модели Био [1, 2]. Для однородного изотропного пористого полупространства, возбужденного нормальными или касательными силами, действующими на границе, строятся точные выражения для волновых полей. Полученные результаты находятся в полном соответствии со статьей [3], где устанавливаются условия существования волны Релея вблизи свободной границы пористой среды Био на основе исследования характеристического уравнения.

История построения волновых полей от точечных источников в пористой среде Био, по-видимому, насчитывает приблизительно 20 лет. Первые работы [4–6] касались внутренних источников (внешняя сила, центр давлений). Затем в статьях [7–9] одним методом были построены и исследованы волновые поля 10 внутренних источников в среде Био. Особенность этого метода состоит в том, что воздействие задается в граничных условиях, а не в уравнениях. Этот метод использовался ранее при решении аналогичных задач теории упругости и акустики [10] и применяется в настоящей работе.

При построении волновых полей используются уравнения Био во втором представлении. В эти уравнения входят вектор смещений упругой фазы $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, вектор относительных смещений жидкой фазы $\mathbf{w}(w_x, w_y, w_z)$, тензор полных напряжений $\boldsymbol{\tau}$ с компонентами τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} и давление в жидкой фазе p. Выбор этого представления обусловлен тем, что величины u_x, u_y, u_z, w_z τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{zz} и p, непрерывные на границах z=const пористых сред, определяются из уравнений второго представления.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 99-05-64127.

§1. Основные уравнения

Пусть задано однородное изотропное пористое флюидонасыщенное полупространство $z > 0$, описываемое уравнениями Био

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xx} = H\frac{\partial u_x}{\partial x} + B\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + C\,\mathrm{div}\,\mathbf{w},\\
&\tau_{yy} = B\frac{\partial u_x}{\partial x} + H\frac{\partial u_y}{\partial y} + B\frac{\partial u_z}{\partial z} + C\,\mathrm{div}\,\mathbf{w},\\
&\tau_{zz} = B\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) + H\frac{\partial u_z}{\partial z} + C\,\mathrm{div}\,\mathbf{w},\\
&-p = C\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + M\,\mathrm{div}\,\mathbf{w},\\
&\tau_{xy} = L\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \quad \tau_{xz} = L\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\\
&\tau_{yz} = L\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\
&\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},\\
&-\mathbf{grad}\,p = \rho_f\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

в которых H, B, C, M и L $(H = B + 2L)$ – модули, ρ – общая плотность среды, ρ_f – плотность жидкой фазы, а коэффициент $m = \rho_f\alpha/\varepsilon$ определяется извилистостью пор $\alpha\,(\alpha > 1)$ и пористостью ε. Для решения уравнений (1.1) полезно ввести потенциалы φ_1, φ_2 и $\boldsymbol{\psi}$ по формулам

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\varphi_1 + \mathbf{grad}\,\varphi_2 + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi},\\
&\mathbf{w} = B_1\,\mathbf{grad}\,\varphi_1 + B_2\,\mathbf{grad}\,\varphi_2 - \frac{\rho_f}{m}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\psi},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где

$$
B_i = \frac{C - \rho_f v_i^2}{m v_i^2 - M} = \frac{H - \rho v_i^2}{\rho_f v_i^2 - C} \quad (i = 1, 2),
\tag{1.3}
$$

$$v_{1,2}^2 = \Big[\pm\sqrt{(mH + \rho M - 2\rho_f C)^2 - 4(HM - C^2)(\rho m - \rho_f^2)} + \\ + mH + \rho M - 2\rho_f C\Big] \Big/ \big[2(\rho m - \rho_f^2)\big].$$

Введенные потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\varphi_i - \frac{1}{v_i^2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\boldsymbol{\psi} - \frac{1}{v_3^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{1.4}$$

где

$$v_3^2 = \frac{Lm}{\rho m - \rho_f^2}. \tag{1.5}$$

Величины v_1, v_2 и v_3, согласно уравнениям (1.4), являются соответственно скоростями распространения двух продольных волн и одной поперечной волны.

§2. Источник в виде нормальной силы

Предположим, что граница $z = 0$ является свободной от напряжений и давления, за исключением точки $r = 0$, $z = 0$, в которой к твердой фазе приложена нормальная сила. Образующееся волновое поле должно удовлетворять граничным условиям

$$\tau_{zz} = -\frac{f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad \tau_{rzz} = p = 0 \tag{2.1}$$

при $z = 0$. Для обоснования построения поля полезно функцию $\delta(r)/r$, описывающую сосредоточенную силу, заменить функцией

$$F_n(r) = \frac{n^2}{(1 + n^2r^2)^{3/2}}, \tag{2.2}$$

характеризующей распределенную силу, и в конце построения совершить предельный переход при $n \to \infty$, соответствующий переходу к точечной силе. Так как источник (2.1) образует осесимметричное поле, то векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$ в цилиндрической системе координат r, θ, z может иметь только одну азимуальную составляющую ψ_θ. Предполагается также, что интенсивность источника $f(t)$ при $t < 0$ обращается в нуль и поэтому образующееся волновое поле должно удовлетворять нулевым начальным данным

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_\theta = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial\psi_\theta}{\partial t} = 0 \tag{2.3}$$

при $t = 0$. Входящие в граничные условия (2.1) напряжения и давление, согласно уравнениям (1.1) и (1.4), выражаются равенствами

$$\tau_{zz} = (\rho + B_1\rho_f)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + (\rho + B_2\rho_f)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} -$$

$$-2L\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{rz} = L\left(2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z} + 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial z} + \frac{1}{v_3^2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2}\right), \qquad (2.4)$$

$$-p = (\rho_f + B_1\, m)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + (\rho_f + B_2\, m)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2}.$$

Решения уравнений (1.4) для полупространства $z \geqslant 0$ с учетом начальных условий (2.3) представляются формулами

$$\varphi_i = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_i(k,\eta)e^{k(t\eta - z\alpha_i)}\,d\eta \quad (i = 1, 2),$$

$$\psi_\theta = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(k,\eta)e^{k(t\eta - z\beta)}\,d\eta, \qquad (2.5)$$

в которых

$$\alpha_i = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_i^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_3^2}}. \qquad (2.6)$$

Для однозначности радикалов (2.6) из точек ветвления $\eta = \pm i v_i$ $(i = 1, 2, 3)$ проводятся разрезы в левую полуплоскость параллельно вещественной оси, а основные ветви фиксируются условиями

$$\alpha_i(0) = 1, \quad \beta(0) = 1. \qquad (2.7)$$

Функции $X_1(k,\eta)$, $X_2(k,\eta)$ и $Y(k,\eta)$ определяются из граничных условий (2.1), которые сводятся к системе уравнений

$$\left[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 + 2L\right]X_1 + \left[(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 + 2L\right]X_2 - 2L\beta Y = -F(k\eta)/(2\pi),$$

$$(\rho_f + B_1\, m)X_1 + (\rho_f + B_2\, m)X_2 = 0, \qquad (2.8)$$

$$2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 - gY = 0,$$

где

$$F(k\eta) = \int_0^\infty f(t)e^{-kt\eta}\,dt, \quad g = 2 + \frac{\eta^2}{v_s^2}. \tag{2.9}$$

После элементарных преобразований система (2.8) заменяется более простой системой

$$\begin{aligned} &g(X_1 + X_2) - 2\beta Y = -F(k\eta)/(2\pi L), \\ &2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 - gy = 0, \\ &(v_4^2 - v_2^2)X_1 - (v_1^2 - v_4^2)X_2 = 0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$v_4 = \sqrt{M/m}\,. \tag{2.11}$$

Решение системы (2.10) представляется равенствами

$$\begin{aligned} &X_1 = -\frac{(v_1^2 - v_4^2)gF(k\eta)}{2\pi L\Delta_0}, \quad X_2 = -\frac{(v_4^2 - v_2^2)gF(k\eta)}{2\pi L\Delta_0}, \\ &Y = -\frac{F(k\eta)}{\pi L\Delta_0}\left[\alpha_1(v_1^2 - v_4^2) + \alpha_2(v_4^2 - v_2^2)\right], \\ &\Delta_0 = \left(v_1^2 - v_4^2\right)\left(g^2 - 4\alpha_1\beta\right) + \left(v_4^2 - v_2^2\right)\left(g^2 - 4\alpha_2\beta\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Соотношения (2.5) и (2.12) определяют потенциалы волнового поля, возбужденного источником (2.1). Чтобы выразить смещения необходимо использовать равенства

$$\begin{aligned} &u_r = \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r}, \\ &w_r = B_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + B_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{\rho_f}{m}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial z}, \\ &w_z = B_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + B_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\rho_f}{m}\left(\frac{\partial\psi_\theta}{\partial t} + \frac{\psi_\theta}{r}\right), \end{aligned} \tag{2.13}$$

записанные на основании формул (1.2). После подстановки соотношений (2.5) в равенства (2.13) приходим к формулам

$$u_r = -\int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(X_1 e^{-kz\alpha_1} +$$

$$+X_2 e^{-kz\alpha_2} - \beta Y e^{-kz\beta}\Big) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$u_z = -\int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Big(\alpha_1 X_1 e^{-kz\alpha_1} +$$

$$+\alpha_2 X_2 e^{-kz\alpha_2} - Y e^{-kz\beta}\Big) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$w_r = -\int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Big(B_1 X_1 e^{-kz\alpha_1} + \tag{2.14}$$

$$+B_2 X_2 e^{-kz\alpha_2} + \frac{\rho_f}{m}\beta Y e^{-kz\beta}\Big) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$w_z = -\int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Big(B_1 \alpha_1 X_1 e^{-kz\alpha_1} +$$

$$+B_2 \alpha_2 X_2 e^{-kz\alpha_2} + \frac{\rho_f}{m} Y e^{-kz\beta}\Big) e^{kt\eta} d\eta,$$

которые с учетом выражений для X_1, X_2 и Y переходят в окончательные соотношения

$$u_r = \frac{1}{2\pi L} \int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\left(v_1^2 - v_4^2\right)\left(g e^{-kz\alpha_1} - 2\alpha_1\beta e^{-kz\beta}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(v_4^2 - v_2^2\right)\left(g e^{-kz\alpha_2} - 2\alpha_2\beta e^{-kz\beta}\right)\right] \frac{F(k\eta)}{\Delta_0} e^{kt\eta} d\eta,$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi L} \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\left(v_1^2 - v_4^2\right)\alpha_1 \left(g e^{-kz\alpha_1} - 2 e^{-kz\beta}\right) +\right.$$

$$\left. + \left(v_4^2 - v_2^2\right)\alpha_2 \left(g e^{-kz\alpha_2} - 2 e^{-kz\beta}\right)\right] \frac{F(k\eta)}{\Delta_0} e^{kt\eta} d\eta, \tag{2.15}$$

$$w_r = \frac{1}{2\pi L} \int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\left(v_1^2 - v_4^2\right)\left(B_1 g e^{-kz\alpha_1} + \frac{2\alpha_1\beta\rho_f}{m} e^{-kz\beta}\right) +\right.$$

$$+\left(v_4^2-v_2^2\right)\left(B_2 g e^{-kz\alpha_2}+\frac{2\alpha_2\beta\rho_f}{m}e^{-kz\beta}\right)\Bigg]\frac{F(k\eta)}{\Delta_0}e^{kt\eta}d\eta,$$

$$w_z=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_0^\infty\frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Bigg[\left(v_1^2-v_4^2\right)\alpha_1\left(B_1 g e^{-kz\alpha_1}+\frac{2\rho_f}{m}e^{-kz\beta}\right)+$$

$$+\left(v_4^2-v_2^2\right)\alpha_2\left(B_2 g e^{-kz\alpha_2}+\frac{2\rho_f}{m}e^{-kz\beta}\right)\Bigg]\frac{F(k\eta)}{\Delta_0}e^{kt\eta}d\eta,$$

для смещений.

Чтобы проверить соответствие полученных формул (2.15) с аналогичными равенствами для упругого полупространства рассмотрим случай, когда

$$C=0,\quad \rho_f=0. \tag{2.16}$$

В этом случае, согласно уравнению (1.1), волны в упругой фазе среды Био распространяются независимо от процессов распространения в жидкой фазе. Скорости продольных волн при условиях (2.16) выражаются равенствами

$$\begin{gathered}
v_1^2=\begin{cases} H/\rho & \text{при}\quad Hm>M\rho,\\ M/m=v_4^2 & \text{при}\quad M\rho>Hm,\end{cases}\\
v_2^2=\begin{cases} M/m=v_4^2 & \text{при}\quad Hm>M\rho,\\ H/\rho & \text{при}\quad M\rho>Hm.\end{cases}
\end{gathered} \tag{2.17}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением только одного часто осуществляющегося случая, когда

$$Hm>M\rho,\quad v_1^2=H/\rho,\quad v_2=v_4. \tag{2.18}$$

В этом случае в выражении (2.12) Δ_0, а также в первых двух формулах (2.15) исчезают члены, содержащие множитель $v_4^2-v_2^2$, и сокращаются множители $v_1^2 - v_4^2$. Полученные при этом формулы

$$u_r = \frac{1}{2\pi L} \int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{g e^{-kz\alpha_1} - 2\alpha_1 \beta e^{-kz\beta}}{g^2 - 4\alpha_1\beta} \, F(k\eta) \, e^{kt\eta} \, d\eta,$$

$$u_z = \frac{1}{2\pi L} \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\alpha_1 (g e^{-kz\alpha_1} - 2e^{-kz\beta})}{g^2 - 4\alpha_1\beta} \, F(k\eta) \, e^{kt\eta} \, d\eta \tag{2.19}$$

описывают смещения в упругом полупространстве под действием источника (2.1) и совпадают с результатами работы [11]. Относительные смещения w_r и w_z в случае выполнения условий (2.16) и (2.18) обращаются в нули. В этом легко убедиться, если использовать соотношения (1.3) и равенство

$$B_2 (v_4^2 - v_2^2) = \big(\rho_f \, v_2^2 - C\big)\big/m. \tag{2.20}$$

Исчезновение поля относительных смещений связано с тем, что это поле при условии (2.16) описывает распространение волн в жидкой среде, а источник (2.1) не создает волн в жидкой фазе.

§3. Центр радиальных сил

Пусть полупространство Био $z \geqslant 0$ возбуждается источником в виде центра радиальных сил, действующих в плоскости $z = 0$. Источник задается граничными условиями

$$\tau_{rz} = -\frac{f(t)\Phi_n(r)}{2\pi}, \quad \tau_{zz} = p = 0 \tag{3.1}$$

при $z = 0$ и $n \to \infty$. Функция $\Phi_n(r)$ выражается равенствами

$$\Phi_n(r) = \frac{3n^4 r}{(1 + n^2 r^2)^{5/2}} = -F_n'(r) \tag{3.2}$$

и при $n \to \infty$ описывает сосредоточенное воздействие, соответствующее функции

$$-\frac{d}{dr} \, \frac{\delta(r)}{r}. \tag{3.3}$$

Волновое поле также выражается через потенциалы φ_1, φ_2 и ψ_θ, которые представляются в виде формул (2.5). Входящие в равенства (2.5) функции $X_1(k,\eta)$, $X_2(k,\eta)$ и $Y(k,\eta)$ определяются на основании граничных условий, которые приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\left[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 + 2L\right] X_1 + \left[(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 + 2L\right] X_2 - 2L\beta Y = 0,\\
&(\rho_f + B_1 m) X_1 + (\rho_f + B_2 m) X_2 = 0,\\
&2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 - gY = \frac{kF(k\eta)}{2\pi L}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

После ряда преобразований система уравнений (3.4) заменяется более простой системой

$$\begin{aligned}
&gX_1 + gX_2 - 2\beta Y = 0,\\
&(v_4^2 - v_2^2)X_1 - (v_1^2 - v_4^2)X_2 = 0,\\
&2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 - gY = \frac{kF(k\eta)}{2\pi L},
\end{aligned} \tag{3.5}$$

решение которой выражается формулами

$$\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{(v_1^2 - v_4^2)k\beta F(k\eta)}{\pi L \Delta_0},\\
X_2 &= -\frac{(v_4^2 - v_2^2)k\beta F(k\eta)}{\pi L \Delta_0},\\
Y &= -\frac{(v_1^2 - v_2^2)kgF(k\eta)}{2\pi L \Delta_0}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

В результате приходим к окончательным равенствам

$$u_r = -\frac{1}{2\pi L}\int_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}\left[\left(v_1^2 - v_4^2\right)\left(ge^{-kz\alpha_1} - 2e^{-kz\alpha_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(v_4^2 - v_2^2\right)\left(ge^{-kz\beta} - 2e^{-kz\alpha_2}\right)\right]\frac{\beta F(k\eta)}{\Delta_0}e^{kt\eta}d\eta,$$

$$u_z = -\frac{1}{2\pi L}\int_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)dk}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty}\left[\left(v_1^2 - v_4^2\right)\left(ge^{-kz\beta} - 2\alpha_1\beta e^{-kz\alpha_1}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(v_4^2 - v_2^2\right)\left(ge^{-kz\beta} - 2\alpha_2\beta e^{-kz\alpha_2}\right)\right]\frac{F(k\eta)}{\Delta_0}e^{kt\eta}d\eta, \tag{3.7}$$

$$w_r=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_0^\infty \frac{k^2J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big[\left(v_1^2-v_4^2\right)\left(\frac{\rho_f}{m}ge^{-kz\beta}+2B_1e^{-kz\alpha_1}\right)+$$

$$+\left(v_4^2-v_2^2\right)\left(\frac{\rho_f}{m}\,g\,e^{-kz\beta}+2B_2e^{-kz\alpha_2}\right)\Big]\,\frac{\beta F(k\eta)}{\Delta_0}e^{kt\eta}d\eta,$$

$$w_z=\frac{1}{2\pi L}\int\limits_0^\infty \frac{k^2J_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big[\left(v_1^2-v_4^2\right)\left(\frac{\rho_f}{m}\,g\,e^{kz\beta}+2B_1\alpha_1\beta e^{-kz\alpha_1}\right)+$$

$$+\left(v_4^2-v_2^2\right)\left(\frac{\rho_f}{m}ge^{-kz\beta}+2B_2\alpha_2\beta e^{-kz\alpha_2}\right)\Big]\,\frac{F(k\eta)}{\Delta_0}e^{kt\eta}d\eta$$

для смещений.

Переход к упругой среде в волновом поле (3.7) проводится теми же самыми приемами и при условиях (2.16) и (2.18) и приводит к формулам

$$u_r=-\frac{1}{2\pi L}\int\limits_0^\infty \frac{k^2J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{ge^{-kz\beta}-2e^{-kz\alpha_1}}{g^2-4\alpha_1\beta}\beta F(k\eta)\,e^{k\eta t}\,d\eta,$$

$$u_z=-\frac{1}{2\pi L}\int\limits_0^\infty \frac{k^2J_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{ge^{-kz\beta}-2\alpha_1\beta e^{-kz\alpha_1}}{g^2-4\alpha_1\beta}\,F(k\eta)\,e^{k\eta t}\,d\eta,$$

$w_r=w_z=0$, которые соответствуют работе [11].

§4. Центр вращения

Пусть на границе $z=0$ полупространства Био $z\geqslant 0$ действует источник в виде центра вращения, определенного условиями

$$\tau_{\theta z}=-\frac{\Phi_n(r)f(t)}{2\pi},\qquad \tau_{zz}=p=0 \tag{4.1}$$

при $z=0$ и $n\to\infty$. Этот источник создает поле смещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$, содержащих только азимуальные составляющие u_θ и w_θ, которые не зависят от координаты θ. Из уравнений (1.1) следует уравнение

$$\frac{\partial^2u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{\partial^2u_\theta}{\partial z^2}=\frac{1}{v_3^2}\frac{\partial^2u_\theta}{\partial t^2} \tag{4.2}$$

для составляющей смещения u_θ и связь

$$\tau_{\theta z} = L\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \tag{4.3}$$

между напряжением $\tau_{\theta z}$ и смещением u_θ.

Чтобы удовлетворить уравнению (4.2), представим смещение u_θ соотношением

$$u_\theta = \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(k,\eta)\, e^{k(t\eta - z\beta)}\, d\eta. \tag{4.4}$$

Используя интегральные представления функций $\Phi_n(r)$ и $f(t)$, а также соотношение (4.3), приходим к формуле

$$Z(k,\eta) = \frac{F(k\eta)}{2\pi L\beta}. \tag{4.5}$$

Смещение u_θ выражается соотношением

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi L} \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k,\eta)}{\beta}\, e^{k(t\eta - z\beta)}\, d\eta. \tag{4.6}$$

Если использовать равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k,\eta)}{\alpha}\, e^{k(t\eta - z\beta)}\, d\eta =$$

$$= \frac{r}{R^2}\left[\frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v}\right) + \frac{1}{v}\, f'\left(t - \frac{R}{v}\right)\right],$$

в котором $f(t)$ – произвольная функция, определенная при $t \geqslant 0$, $F(k\eta)$ – интеграл Лапласа от нее и

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v^2}}, \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}\,, \tag{4.8}$$

то формула (4.6) может быть заменена соотношением вида Стокса

$$u_\theta = \frac{r}{2\pi L R^2}\left[\frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{v_3}\right) - \frac{1}{v_3}\, f'\left(t - \frac{R}{v_3}\right)\right]. \tag{4.9}$$

Из уравнений (1.1) также следует формула

$$w_\theta = -\frac{\rho_f}{m}\, u_\theta, \tag{4.10}$$

определяющая компоненту относительных смещений w_θ.

Соотношения (4.6), (4.9) и (4.10), определяющие волновое поле в случае центра вращения, существенно отличаются от соответствующих равенств (2.15) и (3.7) в случае первых двух источников. Это различие, в частности, сводится к тому, что волновое поле в случае центра вращения содержит только поперечные волны SH, в то время как первые два источника образуют продольные волны P_1, P_2 и поперечные волны SV. Другое различие состоит в том, что знаменатель подынтегральных функций в случае первых двух источников равен величине Δ_0, а в случае третьего источника аналогичный знаменатель равен β. Различие в знаменателях приводит к тому, что источники в виде нормальной силы или центра касательных сил могут также образовать и волну Релея, а центр вращения такой волны не создает. Еще следует добавить, что смещения от центра вращения u_θ в пористой среде Био и в упругой среде (см. [11]) описываются сходными уравнениями и различия между ними состоят только в обозначениях и в существовании дополнительной составляющей относительных смещений w_θ.

§5. Касательная сила

Пусть на границе полупространства Био $z \geqslant 0$ действует точечный источник в виде касательной силы, приложенной к упругой среде и направленной вдоль оси x. Источник задается граничными условиями

$$\tau_{xz} = -\frac{f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zz} = p = 0 \tag{5.1}$$

при $z = 0$. При построении волнового поля, возбужденного этим источником, полезно заменить граничные условия (5.1) на равносильные условия

$$\tau_{rz} = -\frac{\cos\theta f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{\sin\theta f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad \tau_{zz} = p = 0 \tag{5.2}$$

при $z = 0$. Так как источник (5.1) не обладает осевой симметрией, то необходимо предположить, что векторный потенциал $\boldsymbol{\psi}$ имеет две ненулевые составляющие ψ_y и ψ_z. На основании формул

(1.2), получаем выражение для смещений

$$
\begin{aligned}
u_r &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial\psi_y}{\partial z},\\
u_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial\psi_y}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r},\\
u_z &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \cos\theta\frac{\partial\psi_y}{\partial r} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi_y}{\partial\theta},\\
w_r &= B_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + B_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\rho_f}{mr}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} + \frac{\rho_f\cos\theta}{m}\frac{\partial\psi_y}{\partial z},\\
w_\theta &= \frac{B_1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta} + \frac{B_2}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta} - \frac{\rho_f\sin\theta}{m}\frac{\partial\psi_y}{\partial z} + \frac{\rho_f}{m}\frac{\partial\psi_z}{\partial r},\\
w_z &= B_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + B_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\rho_f}{m}\cos\theta\frac{\partial\psi_y}{\partial r} - \frac{\rho_f\sin\theta}{mr}\frac{\partial\psi_y}{\partial\theta}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

через потенциалы φ_1, φ_2, ψ_y и ψ_z. После подстановки формул (5.3) в равенства закона Гука (1.1) приходим к соотношениям

$$
-p = \left(\rho_f + B_1\, m\right)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + \left(\rho_f + B_2\, m\right)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2},
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{zz} &= (\rho + B_1\rho_f)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + (\rho + B_2\rho_f)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - 2L\biggl(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} + \\
&+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\theta^2} - \cos\theta\frac{\partial^2\psi_y}{\partial r\partial z} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial\theta\,\partial z}\biggr),\\
\tau_{rz} &= L\biggl(2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z} + 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial z} + \cos\theta\frac{\partial^2\psi_y}{\partial r^2} - \cos\theta\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2} + \\
&\qquad +\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta\partial z} - \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial\psi_y}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial r\,\partial\theta}\biggr),\\
\tau_{\theta z} &= L\biggl(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta\,\partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\theta\,\partial z} + \sin\theta\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\psi_y}{\partial r} - \\
&\qquad -\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r\partial z} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial\psi_y}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial\theta^2}\biggr)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

для давления и напряжений, входящих в условия (5.2).

Для построения волнового поля представим потенциалы φ_1, φ_2, ψ_y и ψ_z выражениями

$$\begin{aligned}
\varphi_i &= \cos\theta \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_i(k,\eta)\, e^{k(t\eta - z\alpha_i)}\, d\eta \quad (i=1,2),\\
\psi_y &= \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(k,\eta)\, e^{k(t\eta - z\beta)}\, d\eta; \qquad (5.5)\\
\psi_z &= \sin\theta \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(k,\eta)\, e^{k(t\eta - z\beta)}\, d\eta,
\end{aligned}$$

которые являются решениями уравнений (1.4) при любых подынтегральных функциях $X_1(k,\eta)$, $X_2(k,\eta)$, $Y(k,\eta)$ и $Z(k,\eta)$. После подстановки соотношений (5.5) в граничные условия (5.2), ряда преобразований и после приравнивания подынтегральных функций приходим к системе уравнений

$$\big(\rho_f + B_1 m\big) X_1 + \big(\rho_f + B_2\, m\big) X_2 = 0,$$

$$\Big[\big(\rho_f + B_1\rho_f\big)\eta^2 + 2L\Big] X_1 + \Big[\big(\rho_f + B_2\rho_f\big)\eta^2 + 2L\Big] X_2 + 2L\beta Y = 0,$$

$$2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 + Y - \beta Z = 0, \qquad (5.6)$$

$$\beta^2 Y + \beta Z = F(k\eta)/(2\pi L).$$

Система уравнений (5.6) равносильна системе

$$\begin{aligned}
&g X_1 + g X_2 + 2\beta Y = 0,\\
&(v_4^2 - v_2^2) X_1 - (v_1^2 - v_4^2) X_2 = 0,\\
&2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 + Y - \beta Z = 0,\\
&\beta^2 Y + \beta Z = F(k\eta)/(2\pi L).
\end{aligned} \qquad (5.7)$$

Решение системы уравнений (5.7) выражается равенствами

$$
\begin{aligned}
X_1 &= -\frac{(v_1^2 - v_4^2)\beta F(k\eta)}{\pi L\Delta_0},\\
X_2 &= -\frac{(v_4^2 - v_2^2)\beta F(k\eta)}{\pi L\Delta_0},\\
Y &= \frac{(v_1^2 - v_2^2) g F(k\eta)}{2\pi L\Delta_0},\\
Z &= \frac{\left[(v_1^2 - v_2^2)g - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2\beta\right] F(k\eta)}{2\pi L\beta\Delta_0}.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

После подстановки формул (5.5) в соотношения (5.3) приходим к выражениям

$$
u_r = \cos\theta \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(X_1\, e^{-kz\alpha_1} + X_2\, e^{-kz\alpha_2} + \beta Y\, e^{-kz\beta}\right) e^{kt\eta}\, d\eta -
$$

$$
-\frac{\cos\theta}{r} \int_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(X_1\, e^{-kz\alpha_1} + X_2\, e^{-kz\alpha_2} - Z\, e^{-kz\beta}\right) e^{kt\eta}\, d\eta,
$$

$$
u_\theta = -\frac{\sin\theta}{2\pi L} \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(k\eta)}{\beta}\, e^{k(t\eta - z\beta)}\, d\eta -
$$

$$
-\frac{\sin\theta}{r} \int_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(X_1\, e^{-kz\alpha_1} + X_2\, e^{-kz\alpha_2} - Z\, e^{-kz\beta}\right) e^{kt\eta}\, d\eta,
$$

$$
u_z = -\cos\theta \int_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(\alpha_1 X_1 e^{-kz\alpha_1} + \alpha_2 X_2 e^{-kz\alpha_2} + Y\, e^{-kz\beta}\right) e^{kt\eta}\, d\eta,
$$

$$
w_r = \cos\theta \int_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(B_1 X_1 e^{-kz\alpha_1} + B_2 X_2 e^{-kz\alpha_2} - \frac{\rho_f}{m}\beta Y\, e^{-kz\beta}\right) e^{kt\eta}\, d\eta -
$$

$$
-\frac{\cos\theta}{r} \int_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(B_1 X_1 e^{-kz\alpha_1} + B_2 X_2 e^{-kz\alpha_2} + \frac{\rho_f}{m} Z e^{-kz\beta}\right) e^{kt\eta}\, d\eta,
$$

$$w_\theta = \frac{\sin\theta\rho_f}{2\pi Lm}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta}\,e^{k(t\eta-z\beta)}\,d\eta- \tag{5.9}$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\int\limits_0^\infty\frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Big(B_1X_1e^{-kz\alpha_1}+B_2X_2e^{-kz\alpha_2}+\frac{\rho_f}{m}Ze^{-kz\beta}\Big)\,e^{kt\eta}d\eta,$$

$$w_z = -\cos\theta\int\limits_0^\infty\frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\big(B_1\,\alpha_1\,X_1\,e^{-kz\alpha_1}+$$

$$+B_2\,\alpha_2\,X_2\,e^{-kz\alpha_2}-\frac{\rho_f}{m}\,Y\,e^{-kz\beta}\big)\,e^{kt\eta}\,d\eta,$$

которые совместно с формулами (5.8) определяют векторы смещений. В равенствах (5.9) составляющие u_θ и w_θ имеют по одному особому члену, не содержащему знаменатель Δ_0. Эти члены подобны выражению (4.6), описывают волны SH и оказываются единственными на больших расстояниях и под углом $\theta=\pi/2$. Остальные члены в выражениях (5.9) описывают волны P_1SV, P_2SV и содержат знаменатель Δ_0.

При условиях (2.18) волновое поле (5.9) с учетом (5.8) переходит в волновое поле

$$u_r = \cos\theta\int\limits_0^\infty\frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\big(X\,e^{-kz\alpha_1}+\beta Y\,e^{-kz\beta}\big)\,e^{kt\eta}\,d\eta-$$

$$-\frac{\cos\theta}{r}\int\limits_0^\infty\frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\big(X\,e^{-kz\alpha_1}-Z\,e^{-kz\beta}\big)\,e^{kt\eta}\,d\eta,$$

$$u_\theta = -\frac{\sin\theta}{2\pi L}\int\limits_0^\infty\frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta}\,e^{k(t\eta-z\beta)}\,d\eta- \tag{5.10}$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\int\limits_0^\infty\frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\big(X\,e^{-kz\alpha_1}-Z\,e^{-kz\beta}\big)\,e^{kt\eta}\,d\eta,$$

$$u_z = -\cos\theta\int\limits_0^\infty\frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\big(\alpha_1\,X\,e^{-kz\alpha_1}+Y\,e^{-kz\beta}\big)\,e^{kt\eta}\,d\eta$$

в случае упругого полупространства, возбужденного источником (5.1) (см. [11]), при этом

$$X = -\frac{\beta F(k\eta)}{\pi L\, R_1}, \qquad Y = \frac{gF(k\eta)}{2\pi L\, R_1},$$
$$Z = \frac{(g - 4\alpha\beta)F(k\eta)}{2\pi L\beta\, R_1}, \qquad R_1 = g^2 - 4\alpha_1\beta. \tag{5.11}$$

На основании сравнения волновых полей (5.9) и (5.10) можно сформулировать правила построения волнового поля от источника (5.1) в пористой среде при использовании соответствующих выражений для смещений (5.10) в упругой среде:

1. Волновое поле в пористой среде Био представляется равенствами

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)}(v_1^2 - v_4^2) + \mathbf{u}^{(2)}(v_4^2 - v_2^2),$$
$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(1)}(v_1^2 - v_4^2) + \mathbf{w}^{(2)}(v_4^2 - v_2^2). \tag{5.12}$$

2. Чтобы выразить составляющие вектора $\mathbf{u}^{(1)}$, необходимо в равенствах (5.10) заменить R_1 на Δ_0, а к члену, не содержащему знаменателя R_1, добавить множитель R_1/Δ_0.

3. Для получения формул, определяющих вектор $\mathbf{u}^{(2)}$, следует в равенствах для вектора $\mathbf{u}^{(1)}$ заменить все радикалы α_1 на α_2.

4. Выражения для относительных смещений w_r, w_θ и w_z записываются на основании формул для u_r, u_θ и u_z с использованием замен

$$u_r \to w_r, \quad u_\theta \to w_\theta, \quad u_z \to w_z, \quad e^{-kz\alpha_1} \to B_1\, e^{-kz\alpha_1},$$
$$e^{-kz\alpha_2} \to B_2\, e^{-kz\alpha_2}, \quad e^{-kz\beta} \to -\frac{\rho_f}{m}\, e^{-kz\beta}. \tag{5.13}$$

Указанные правила справедливы также и для других рассмотренных источников, действующих на свободной границе пористого полупространства и приложенных к твердой фазе.

§6. Отражение от свободной границы пористого полупространства Био

Чтобы рассматривать распространение волн от внутренних источников в пористом полупространстве Био $z \geqslant 0$, полезно исследовать процессы отражения на свободной границе $z = 0$.

Пусть задано пористое полупространство Био $z \geqslant 0$, на границе которого $z = 0$ выполняются условия

$$\tau_{zz} = \tau_{xz} = p = 0 \tag{6.1}$$

при $z = 0$. Полупространство возбуждется некоторым внутренни источником. От этого источника к границе $z = 0$ распространяются волны, которые описываются потенциалами

$$\begin{gathered}
\varphi_i^0 = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_i^0(k,\eta) e^{k(t\eta+z\alpha_i)}\, d\eta \quad (i=1,2), \\
\psi_\theta = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y^0(k,\eta)\, e^{k(t\eta+z\beta)}\, d\eta
\end{gathered} \tag{6.2}$$

и подходят к границе не раньше момента $t = 0$. Потенциалы образующихся отраженных волн удовлетворяют нулевым начальным условиям

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_\theta = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial\psi_\theta}{\partial t} = 0 \tag{6.3}$$

при $t = 0$ и выражаются соотношениями

$$\begin{gathered}
\varphi_i = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_i(k,\eta)\, e^{k(t\eta-z\alpha_i)}\, d\eta \quad (i=1,2), \\
\psi_\theta = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(k,\eta) e^{k(t\eta-z\beta)}\, d\eta,
\end{gathered} \tag{6.4}$$

Чтобы выразить функции $X_1(k,\eta)$, $X_2(k,\eta)$ и $Y(k,\eta)$ через известные функции $X_1^0(k,\eta)$, $X_2^0(k,\eta)$ и $Y^0(k,\eta)$, запишем на основании граничных условий (6.1) систему уравнений

$$\begin{gathered}
\Big[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 + 2L\Big] X_1 + \Big[(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 + 2L\Big] X_2 - 2L\beta Y = \\
= -\Big[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 + 2L\Big] X_1^0 - \Big[(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 + 2L\Big] X_2^0 - 2L\beta Y^0, \\
(\rho_f + B_1 m) X_1 + (\rho_f + B_2\, m) X_2 =
\end{gathered} \tag{6.5}$$

$$= (\rho_f + B_1 m)X_1^0 - (\rho_f + B_2\, m)X_2^0,$$

$$2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 - gY = 2\alpha_1 X_1^0 + 2\alpha_2 X_2^0 + gY^0.$$

Как и в предыдущих параграфах, полезно предварительно упростить систему уравнений (6.5) и заменить ее равносильной системой

$$\begin{gathered} gX_1 + gX_2 - 2\beta Y = -gX_1^0 - gX_2^0 - 2\beta Y_0, \\ (v_4^2 - v_2^2)X_1 - (v_1^2 - v_4^2)X_2 = -(v_4^2 - v_2^2)X_1^0 + (v_1^2 - v_4^2)X_2^0, \\ 2\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 X_2 - gY = 2\alpha_1 X_1^0 + 2\alpha_2 X_2^0 + gY^0. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Для записи решения системы (6.6) обозначим через P_1, P_2 и S волны, описываемые потенциалами φ_1, φ_2 и ψ_θ (или величинами X_1, X_2 и Y). Следуя сейсмической терминологии в отношении коэффициентов отражения, представим решение системы уравнений (6.6) в виде равенств

$$\begin{aligned} X_1 &= (P_1P_1)X_1^0 + (P_2P_1)X_2^0 + (SP_1)Y^0, \\ X_2 &= (P_1P_2)X_1^0 + (P_2P_2)X_2^0 + (SP_2)Y^0, \\ Y &= (P_1S)X_1^0 + (P_2S)X_2^0 + (SS)Y^0, \end{aligned} \tag{6.7}$$

в которых, например, величина (SP_1) – коэффициент отражения в случае падающей волны S и отраженной волны P_1. Входящие в соотношения (6.7) коэффициенты отражения выразятся равенствами

$$\begin{aligned} &(P_1P_1) = -\frac{(v_1^2 - v_2^2)T_1 + (v_4^2 - v_2^2)R_2}{(v_1^2 - v_4^2)R_1 + (v_4^2 - v_2^2)R_2}, && (P_2P_1) = -\frac{8\alpha_2\beta(v_1^2 - v_4^2)}{\Delta_0}, \\ &(SP_1) = -\frac{4\beta g(v_1^2 - v_4^2)}{\Delta_0}, && (P_1P_2) = -\frac{8\alpha_1\beta(v_4^2 - v_2^2)}{\Delta_0}, \\ &(P_2P_2) = -\frac{(v_1^2 - v_4^2)R_1 + (v_4^2 - v_2^2)T_2}{(v_1^2 - v_4^2)R_1 + (v_4^2 - v_2^2)R_2}, && (SP_2) = -\frac{4\beta g(v_4^2 - v_2^2)}{\Delta_0}, \\ &(P_1S) = -\frac{4\alpha_1 g(v_1^2 - v_2^2)}{\Delta_0}, && (P_2S) = -\frac{4\alpha_2 g(v_1^2 - v_2^2)}{\Delta_0}, \end{aligned}$$

$$(SS) = -\frac{(v_1^2 - v_4^2)T_1 + (v_4^2 - v_2^2)T_2}{(v_1^2 - v_4^2)R_1 + (v_4^2 - v_2^2)R_2}, \tag{6.8}$$

в которых

$$\begin{aligned} &R_i = g^2 - 4\alpha_i\beta, \quad T_i = g^2 + 4\alpha_i\beta, \quad (i = 1, 2) \\ &\Delta_0 = (v_1^2 - v_4^2)R_1 + (v_4^2 - v_2^2)R_2. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Формулы (6.8) записаны в виде, удобном для перехода к случаю упругого полупространства, когда $v_4 = v_2$ и выполняются соотношения

$$(P_1P_1) = (SS) = -\frac{T_1}{R_1}, \quad (SP_1) = -\frac{4\beta g}{R_1}, \quad (P_1S) = -\frac{4\alpha_1 g}{R_1}. \quad (6.10)$$

Выражения (6.8) могут рассматриваться как коэффициенты отражения плоских волн. Область $|\eta| \gg v_1$ соответствует случаю, когда нормаль к падающей плоской волне почти перпендикулярна границе $z = 0$. В этой области выполняются асимптотические равенства

$$(P_1P_1) = -1, \quad (P_2P_1) = O\left(v_1^2/|\eta|^2\right), \quad (SP_1) = O\left(v_2/|\eta|\right),$$

$$(P_1P_2) = O\left(v_1^2/|\eta|^2\right), \quad (P_2P_2) = -1, \quad (SP_2) = O\left(v_2/|\eta|\right), \quad (6.11)$$

$$(P_1S) = O\left(v_1/|\eta|\right), \quad (P_2S) = O\left(v_1/|\eta|\right), \quad (SS) = -1.$$

На основании формул (6.11) приходим к выводу, что коэффициенты отражения обменных волн при нормальном падении обращаются в нули. Это утверждение также справедливо и в случае упругой среды. Следует еше отметить, что для коэффициентов отражения (P_1P_2) и (P_2P_1) порядок убывания при $|\eta| \to \infty$ оказывается более высоким, чем в случае обменных коэффициентов (P_1S), (P_2S), (SP_1) и (SP_2).

Литература

1. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28, No. 2** (1956), 168–178.
2. M. A. Biot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — J. Appl. Phys. **33,** No. 4 (1962), 1482–1498.
3. Л. А. Молотков, *О распространении нормальных волн в изолированном пористом флюидонасыщенном слое Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **257** (1999), 165–183.
4. R. Burridge, C. A. Vargas, *The fundamental solution in dynamic poroelasticity.* — Geophys. J. Roy. Astr. Soc. **58** (1979), 61–90.
5. A. N. Norris, *Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid.* — J. Acoust. Soc. Am. **77,** No. 6 (1985), 2012–2023.
6. G. Bonnet, *Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range.* — J. Acoust. Soc. Am. **82,** No. 5 (1987), 1758–1762.
7. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Об источниках типа центров расширения и давления в моделях Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 196–213.

8. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Разрывы смещений и напряжений как сейсмические источники в среде Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 164–196.
9. L. A. Molotkov, A. V. Bakulin, *Internal point sources in a poroelastic Biot medium.* — Geophysical press limited (1998), 73–88.
10. К. И. Огурцов, Г. И. Петрашень, *Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии.* — Ученые записки ЛГУ **149** (1951), 3–117.
11. Г. И. Петрашень, И. Н. Успенский, *О распространении волн в слоисто-изотропных упругих средах I.* — Ученые записки ЛГУ **208** (1956), 58–141.

Molotkov L. A. About the sources acting on the free boundary of porous Biot medium and about reflection on this boundary.

A homogeneous isotropic porous Biot half-space $z \geqslant 0$ with free boundary $z = 0$ is considered. This half-space is excited by the point sources situated on the boundary $z = 0$ and applied to the elastic phase. Four sources: 1) Normal force, 2) Center of tangential forces, 3) Center of rotation, and 4) Tangential force are considered. For all sources the wave fields are established. The relation between the wave fields in the porous medium and the corresponding wave fields in the elastic medium is investigated. The reflection coefficients on the free boundary of the porous Biot half-space are defined and studied.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 11 ноября 1999 г.