Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 264, 2000 г.

Л. А. Молотков

ОБ ОДНОМ ВНУТРЕННЕМ ИСТОЧНИКЕ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Исследование особенностей распространения волн в упругих трансверсально-изотропных средах представляет большой интерес для сейсмики. При изучении этих волн исключительно важными являются задание источников и выражения для волновых полей, возбужденных этими источниками. Осесимметрические источники рассматривались в работах [1–3]. В монографии [2] указывается способ построения волнового поля осесимметрического источника в упругой трансверсально-изотропной среде на основании волнового поля такого же источника в упругой изотропной среде. Более сложным оказывается построение волновых полей в случае источников, не обладающих осевой симметрией. Таким источником, в частности, является касательная сила, перпендикулярная оси анизотропии. Для случая, когда такая сила приложена к границе упругого трансверсально-изотропного полупространства, выражения для поля смещений были представлены в работе [1].

Подобный источник, расположенный внутри указанной среды, рассматривался в статье [4]. Особенность этого рассмотрения состоит в том, что для волнового поля строился лучевой ряд, который на основании компьютерных исследований обрывается и переходит в конечное выражение. Поскольку этот подход представляется неоправданно сложным и окончательные выражения могут быть записаны в более простой форме, в настоящей работе рассматривается та же задача, как и в работе [4], и для нее строится и исследуется точное решение. Автор благодарит М. М. Попова, в беседах с которым появилось намерение провести описываемое исследование.

Пусть задана однородная трансверсально-изотропная упругая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) грант 99-01-00107.

среда с осью анизотропии вдоль оси z. Среда в цилиндрической системе координат r, θ z описывается уравнениями закона Гука

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + \lambda'\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\sigma_{\theta\theta} = \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda+2\mu)\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + \lambda'\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\sigma_{zz} = \lambda'\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right) + (\lambda'+2\mu')\frac{\partial u_z}{\partial z},\\
&\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right),\\
&\sigma_{rz} = \mu''\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\right), \quad \sigma_{\theta z} = \mu''\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)
\end{aligned} \tag{1}$$

и уравнениями Ламе

$$\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_r + \frac{\mu}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} + \mu''\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} +\\
&+ \frac{\lambda+\mu}{r}\,\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial\theta} - \frac{\lambda+3\mu}{r^2}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + (\lambda'+\mu'')\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z} = 0,\\
&\frac{\lambda+\mu}{r}\,\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial\theta} + \frac{\lambda+3\mu}{r^2}\,\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_\theta +\\
&+ \frac{\lambda+2\mu}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2} + \mu''\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} + \frac{\lambda'+\mu''}{r}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta\partial z} = 0,\\
&(\lambda'+\mu'')\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta\partial z}\right) +\\
&+ \mu''\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}\right) +\\
&+ (\lambda'+2\mu')\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

где u_z, u_θ, u_z – составляющие вектора смещения, а σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz}, $\sigma_{r\theta}$, σ_{rz}, $\sigma_{\theta z}$ – компоненты тензора напряжения. Источник в виде точечной силы $f(t)$, приложенной к началу координат и действующей вдоль оси x, задается граничными условиями

$$\begin{gathered}
[\sigma_{rz}] = \frac{\cos\theta f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad [\sigma_{\theta z}] = -\frac{\sin\theta f(t)\delta(r)}{2\pi r}, \quad [\sigma_{zz}] = 0,\\
[u_z] = [u_\theta] = [u_r] = 0,
\end{gathered} \tag{3}$$

в которых символ [ ] обозначает скачок при $z = 0$ функции, стоящей в квадратных скобках. Условия (3) также выражают жесткий контакт на плоскости $z = 0$, где приложена внешняя сила. Так как заданный условиями (3) источник начинает действовать с момента времени $t = 0$ и

$$f(t) \equiv 0 \tag{4}$$

при $t < 0$, то образующиеся смещения должны удовлетворять нулевым начальным данным

$$u_r = u_\theta = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

при $t = 0$. Все волновое поле является решением уравнений (1) и (2) с граничными (3) и начальными (5) условиями.

Поле смещений обладает симметрией относительно плоскости $z = 0$ (рис. 1). Из этой симметрии следует, что u_r, u_θ, σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$, σ_{zz} – четные относительно z функции, а u_z, σ_{rz} и $\sigma_{\theta z}$ – нечетные.

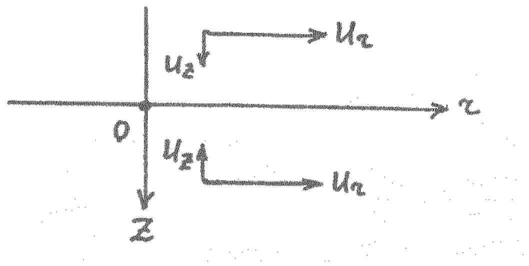

Рис. 1.

Поэтому условия

$$[\sigma_{zz}] = 0, \quad [u_r] = [u_\theta] = 0 \tag{6}$$

при $z = 0$ выполняются автоматически, а остальные три условия (3) заменяются равенствами

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\cos\theta f(t)\delta(r)}{4\pi\mu'' r}, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta f(t)\delta(r)}{4\pi\mu'' r}, \quad u_z = 0 \tag{7}$$

при $z = 0$. Нахождение поля смещений сводится к решению смешанной задачи с уравнениями (2), граничными и начальными условиями (7) и (5).

Перед построением решения поставленной задачи приведем ее решение в случае изотропной среды, в которой

$$\lambda = \lambda', \quad \mu = \mu' = \mu''. \tag{8}$$

Для решения смешанной задачи при условии (8) вводились по формулам

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\varphi + \mathbf{rot}\,(\psi_y \mathbf{j} + \psi_z \mathbf{k})$$

потенциалы φ, ψ_y и ψ_z [5, 6], удовлетворяющие волновым уравнениям. В результате образующееся поле смещений может быть представлено формулами

$$u_r = \frac{\cos\theta}{4\pi}\left[\frac{1}{\rho}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha\eta^2}\left(e^{-k|z|\alpha} - \alpha\beta e^{-k|z|\beta}\right)e^{kt\eta}\,d\eta - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\mu r}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta}\,e^{k(t\eta-|z|\beta)}\,d\eta\right],$$

$$u_\theta = -\frac{\sin\theta}{4\pi}\left[\frac{1}{\rho r}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha\eta^2}\left(e^{-k|z|\alpha} - \alpha\beta e^{-k|z|\beta}\right)e^{kt\eta}\,d\eta - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty \frac{J_1'(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\beta}\,e^{k(t\eta-|z|\beta)}\,d\eta\right], \tag{9}$$

$$u_z = -\frac{\operatorname{sign} z\cos\theta}{4\pi\rho}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\eta^2}\left(e^{-k|z|\alpha} - e^{-k|z|\beta}\right)e^{kt\eta}\,d\eta,$$

в которых

$$F(k\eta) = \int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-kt\eta}\,dt, \tag{10}$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_p^2}}, \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_s^2}}, \tag{11}$$

а v_p и v_s – скорости продольных и поперечных волн. Для однозначности радикалов и для удовлетворения начальных условий

(5) проводятся разрезы из точек ветвления $\eta = \pm i v_p$ и $\eta = \pm i v_s$ в левую полуплоскость η параллельно вещественной оси. В приведенных формулах (9) поле состоит из трех волн P, SV и SH, которые отличаются друг от друга поляризацией на фронтах. Первые слагаемые в выражениях для u_r и u_θ и все выражение для u_z описывают волны P и SV, при этом члены, содержащие α, соответствуют продольной волне, а члены с β – поперечной волне SV. Вторые слагаемые в формулах для u_r и u_θ характеризуют волну SH. В заключение рассмотрения изотропного случая отметим, что соответствующее волновое поле в потенциалах было получено в работе [6], но с небольшой опечаткой.

По аналогии с формулами (9) будем искать волновое поле в случае трансверсально-изотропной среды в виде

$$u_r = \cos\theta \Bigg[\int\limits_0^\infty \frac{k J_1'(kr) dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(X_1 \, e^{-k|z|\alpha_1} + Y_1 \, e^{-k|z|\alpha_2} \right) \, e^{kt\eta} \, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{r} \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr) dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} Z_1 \, e^{k(t\eta - |z|\alpha_3)} \, d\eta \Bigg],$$

$$u_\theta = \sin\theta \Bigg[\frac{1}{r} \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr) dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(X_2 \, e^{-k|z|\alpha_1} + Y_2 \, e^{-k|z|\alpha_2} \right) \, e^{kt\eta} \, d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \frac{k J_1'(kr) dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} Z_2 \, e^{k(t\eta - |z|\alpha_3)} \, d\eta \Bigg], \tag{12}$$

$$u_z = \operatorname{sign} z \cos\theta \int\limits_0^\infty \frac{k J_1(kr) dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left(X_3 \, e^{-k|z|\alpha_1} + Y_3 \, e^{-k|z|\alpha_2} \right) \, e^{kt\eta} \, d\eta.$$

Задача состоит в решении уравнений (2), в удовлетворении начальных и граничных условий (5), (7) и в установлении формул для функций $X_i(k,\eta)$, $Y_i(k,\eta)$, $Z_i(k,\eta)$ и $\alpha_i(\eta)$ $(i = 1, 2, 3, Z_3 = 0)$. Выражения (12), как и (9), могут быть разделены на три слагаемых. Эти слагаемые удовлетворяют уравнениям (2) при выполнении условий

$$X_1 = -X_2, \quad X_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2; \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&(d\alpha_1^2 - a - \rho\eta^2)X_1 - \alpha_1 c X_3 = 0,\\
&\alpha_1 c X_1 + (b\alpha_1^2 - d - \rho\eta^2)X_3 = 0,\\
&(d\alpha_2^2 - a - \rho\eta^2)Y_1 - \alpha_2 c Y_3 = 0,\\
&\alpha_2 c Y_1 + (b\alpha_2^2 - d - \rho\eta^2)Y_3 = 0,\\
&d\alpha_3^2 - \mu - \rho\eta^2 = 0,
\end{aligned} \tag{14}$$

в которых используются принятые обозначения

$$a = \lambda + 2\mu, \quad b = \lambda' + 2\mu', \quad c = \lambda' + \mu'', \quad d = \mu''. \tag{15}$$

Из условий (14) следует, что α_1 и α_2 являются корнями биквадратного уравнения

$$bd\alpha^4 - \left[ab + d^2 - c^2 + \rho\eta^2(b+d)\right]\alpha^2 + (a + \rho\eta^2)(d + \rho\eta^2) = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) и последнее условие (14) определяют функции

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{\chi \mp \sqrt{\chi^2 - \theta}}{2bd}}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\frac{\mu + \rho\eta^2}{d}}, \tag{17}$$

при этом

$$\chi = ab - c^2 + d^2 + (b+d)\rho\eta^2, \quad \theta = 4bd(a + \rho\eta^2)(d + \rho\eta^2). \tag{18}$$

Из соотношений (14) следуют связи

$$X_3 = -\beta_1 X_1, \quad Y_3 = -\beta_2 Y_1, \tag{19}$$

в которых

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \frac{\alpha_1 c}{b\alpha_1^2 - d - \rho\eta^2} = \frac{a + \rho\eta^2 - d\alpha_1^2}{\alpha_1 c},\\
\beta_2 &= \frac{\alpha_2 c}{b\alpha_2^2 - d - \rho\eta^2} = \frac{a + \rho\eta^2 - d\alpha_2^2}{\alpha_2 c}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, выражения (12) при условиях (13), (17) и (19) являются решениями уравнений (2).

Перед тем, как приступить к удовлетворению граничных условий (7), укажем, что входящую в эти условия сосредоточенную функцию $\delta(r)/r$ полезно предварительно заменить распределенной функцией

$$F_n(r) = \frac{n^2}{(1 + n^2r^2)^{3/2}}, \tag{21}$$

которая представляется интегралом Фурье–Бесселя

$$F_n(r) = \int\limits_0^\infty k e^{-k/n} J_0(kr)\,dk. \tag{22}$$

Благодаря этой замене все промежуточные интегралы оказываются сходящимися. В окончательных же формулах следует совершить предельный переход $n \to \infty$, который приводит к обратной замене функции (21) на $\delta(r)/r$. Для удовлетворения первого и второго условий (7) полезно использовать соотношение

$$J_1'(kr) = J_0(kr) - J_1(kr)/(kr). \tag{23}$$

В результате указанные условия приводят к равенствам

$$\begin{aligned} &\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1 = -\frac{kF(k\eta)}{4\pi\mu''}, \\ &\alpha_1 X_1 + \alpha_2 Y_1 - \alpha_3 Z_1 = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Последнее условие (7) заменяется соотношением

$$X_3 + Y_3 = 0. \tag{25}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций, входящих в формулы (12), записана система (13), (19), (24) и (25) из 8 уравнений, учитывающих все три граничных условия (7). Эта система решается элементарно, и поле смещений, вызванных источником (3), выражается формулами

$$\begin{aligned} u_r = \frac{\cos\theta}{4\pi d}\Bigg[&\frac{1}{b}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}\bigg(\frac{b\alpha_1^2-d-\rho\eta^2}{\alpha_1}e^{-k|z|\alpha_1}- \\ &-\frac{b\alpha_2^2-d-\rho\eta^2}{\alpha_2}e^{-k|z|\alpha_2}\bigg)e^{kt\eta}\,d\eta- \\ &-\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_3}\,e^{k(t\eta-|z|\alpha_3)}\,d\eta\Bigg], \\ u_\theta = -\frac{\sin\theta}{4\pi d}\Bigg[&\frac{1}{br}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}\bigg(\frac{b\alpha_1^2-d-\rho\eta^2}{\alpha_1}e^{-k|z|\alpha_1}- \\ &-\frac{b\alpha_2^2-d-\rho\eta^2}{\alpha_2}e^{-k|z|\alpha_2}\bigg)e^{kt\eta}\,d\eta- \end{aligned} \tag{26}$$

$$-\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1'(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\alpha_3}\, e^{k(t\eta-|z|\alpha_3)}\, d\eta\Bigg],$$

$$u_z = -\frac{\operatorname{sign} z\cdot c\cos\theta}{4\pi bd}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(k\eta)}{\alpha_2^2-\alpha_1^2}\Big(e^{-k|z|\alpha_1}-$$

$$-\,e^{-k|z|\alpha_2}\Big)\, e^{kt\eta}\, d\eta.$$

Чтобы убедиться в том, что начальные условия (5) выполнены, необходимо, в частности, доказать отсутствие особенностей у подынтегральных выражений (26) в полуплоскости $\operatorname{Re}\eta > \sigma$. Подынтегральные выражения, согласно формулам (17) и (18), имеют точки ветвления

$$\eta = \pm i\sqrt{a/\rho}, \quad \eta = \pm i\sqrt{d/\rho}, \quad \eta = \pm i\sqrt{\mu/\rho}, \tag{27}$$

расположенные на мнимой оси. Кроме того, внутренний радикал в выражениях для α_1 и α_2 имет точки ветвления

$$\eta = \pm\frac{\sqrt{c^2(b+d)-(b-d)(ab-d^2)\pm\sqrt{bc^2d[c^2-(a-d)(b-d)]}}}{(b-d)\sqrt{\rho}}, \tag{28}$$

которые при некоторых соотношениях между параметрами могут находиться в левой полуплоскости. Хотя при обходе одной из этих точек функции α_1 и α_2 переходят соответственно в α_2 и α_1, подынтегральные выражения не изменяются и поэтому точки (28) не являются точками ветвления. Также эти точки оказываются устранимыми полюсами. Таким образом, в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\eta > \sigma$ отсутствуют особенности у подынтегральных функций. Чтобы удовлетворить начальным условиям, необходимо еще потребовать убывания до нуля подынтегральных функций при неограниченном росте $|\eta|$ по всем направлениям в правой полуплоскости η. Если использовать асимптотические равенства

$$\alpha_1 = \eta\sqrt{\rho/b}, \quad \alpha_2 = \eta\sqrt{\rho/d}, \quad \alpha_3 = \eta\sqrt{\rho/d} \tag{29}$$

при больших $|\eta|$, то легко убедиться, что эти требования также выполнены. Таким образом, выражения (26) удовлетворяют уравнениям (2), граничным и начальным условиям (7) и (5). При переходе к изотропии выражения (26) заменяются на (9).

Построенное волновое поле (26) разлагается на квазипродольную P, квазипоперечную SV и квазипоперечную SH волны, которые описываются слагаемыми, содержащими соответственно α_1, α_2 и α_3. Для построения фронтов этих волн следует использовать интервалы на мнимой оси $\eta = i\tau$ $(\tau > 0)$, где α_i является мнимой величиной и $\alpha_i = i\,\overline{\alpha}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Функция $\overline{\alpha}_i(\tau)$ определяет фронт соответствующей волны по формуле [7]

$$x = t\big(\tau - \overline{\alpha}_i/\overline{\alpha}_i'(\tau)\big), \quad z = t/\overline{\alpha}_i'(\tau) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{30}$$

В случае квазипоперечной волны SH фронт, на основании формул (17) и (30), оказывается эллипсом и описывается уравнением

$$\frac{x^2}{\mu} + \frac{z^2}{\mu''} = \frac{t^2}{\rho}. \tag{31}$$

Фронты волн P и SV описываются функциями $\overline{\alpha}_1(\tau)$ и $\overline{\alpha}_2(\tau)$ и имеют гораздо более сложную форму [8].

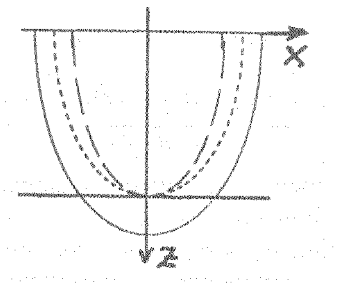

Рис. 2.

В точке $r = 0$, $z = t\sqrt{\mu''/\rho}$ имеет место касание двух квазипоперечных фронтов. Поскольку каждая из этих волн имеет выражения, не зависящие от характеристик других волн, указанная точка касания не является особой.

Рассмотрим теперь волновое поле SH, описываемое вторыми слагаемыми в выражениях (26), и эти слагаемые содержат радикал α_3. Поле SH удовлетворяет уравнению (2), начальным условиям (5) и граничным условиям

$$\begin{gathered}[\sigma_{rz}] = \frac{\cos\theta f(t)}{2\pi r^2}, \quad [\sigma_{\theta z}] = -\frac{\sin\theta f(t)\delta(r)}{2\pi r} + \frac{\sin\theta f(t)}{2\pi r^2}, \\ [\sigma_{zz}] = 0, \quad [u_r] = [u_t h] = [u_z] = 0\end{gathered} \tag{32}$$

при $z = 0$ вместо условий (3). Равенства (32) описывают два источника, из которых один является сосредоточенным, а другой распределен по всей плоскости $z = 0$. Используя формулы (23) и соотношения

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta, \\ u_y &= u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta, \end{aligned} \tag{33}$$

приходим к выражениям

$$\begin{aligned} u_{xSH} = &-\frac{\sin^2\theta}{4\pi\mu''}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_3}e^{k(t\eta-|z|\alpha_3)}\,d\eta- \\ &-\frac{\cos 2\theta}{4\pi\mu'' r}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_3}\,e^{k(t\eta-|z|\alpha_3)}\,d\eta, \\ u_{ySH} = &\frac{\sin 2\theta}{8\pi\mu''}\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_3}e^{k(t\eta-|z|\alpha_3)}\,d\eta- \\ &-\frac{\sin 2\theta}{4\pi\mu'' r}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha_3}\,e^{k(t\eta-|z|\alpha_3)}\,d\eta \end{aligned} \tag{34}$$

для смещений в волнах SH. Для дальнейших преобразований формул (34) полезно учитывать соотношения

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha}\,e^{k(t\eta-|z|\alpha)}\,d\eta = \frac{f(t-R/v)}{R}, \\ &\int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{F(k\eta)}{\alpha}\,e^{k(t\eta-|z|\alpha)}\,d\eta = \frac{v}{r}\int\limits_{|z|/v}^{R/v} f(t-\tau)\,d\tau, \end{aligned} \tag{35}$$

в которых

$$R = \sqrt{r^2+z^2}, \qquad \alpha = \sqrt{1+\eta^2/v^2}. \tag{36}$$

Первая формула (35) была получена в [9] как следствие формулы Вейля. Для вывода второго равенства (35) обозначим его левую часть через $\Phi(r)$ и для этой функции на основании соотношения (23) запишем уравнение

$$\frac{d\Phi}{dr} + \frac{\Phi}{r} = \frac{f(t-R/v)}{R} \tag{37}$$

с начальным условием

$$\Phi(r) = 0 \tag{38}$$

при $r = 0$. Решение задачи Коши (37), (38) и последующая замена переменной интегрирования приводит ко второму равенству (35). В результате формулы (34) заменяются соотношениями

$$\begin{gathered}
u_{xSH} = -\frac{\sin^2\theta}{4\pi\sqrt{\mu\mu''}}\frac{f(t-\widetilde{R}/v)}{\widetilde{R}} + \frac{\cos 2\theta}{4\pi r^2\sqrt{\rho\mu''}}\int\limits_{\widetilde{R}/v}^{t} f(t-\tau)\,d\tau - \\
- \frac{\cos 2\theta}{4\pi r^2\sqrt{\rho\mu''}}\int\limits_{|\widetilde{z}|/v}^{t} f(t-\tau)\,d\tau, \qquad (39) \\
u_{ySH} = \frac{\sin 2\theta}{8\pi\sqrt{\mu\mu''}}\frac{f(t-\widetilde{R}/v)}{\widetilde{R}} + \frac{\sin 2\theta}{4\pi r^2\sqrt{\rho\mu''}}\int\limits_{\widetilde{R}/v}^{t} f(t-\tau)\,d\tau - \\
- \frac{\sin 2\theta}{4\pi r^2\sqrt{\rho\mu''}}\int\limits_{|\widetilde{z}|/v}^{t} f(t-\tau)\,d\tau,
\end{gathered}$$

в которых

$$\widetilde{z} = z\sqrt{\mu/\mu''}, \quad \widetilde{R} = \sqrt{\widetilde{z}^2 + r^2}, \quad v = \sqrt{\mu/\rho}. \tag{40}$$

Два первых слагаемых в формулах (39) можно рассматривать как первые два члена лучевого ряда от точечного источника, действующего в начале координат, при этом первые слагаемые пропорциональны временной функции источника с учетом запаздывания, а вторые слагаемые содержат интеграл от этой функции. Следующие члены лучевого ряда отсутствуют, но в выражениях (39) содержатся еще и третьи слагаемые, связанные с действием распределенного источника. Это слагаемое имеет фронт $z = \sqrt{\mu''/\rho}\,t$, соответветствующий распространению волн вдоль оси z. Во всем волновом поле он отсутствует. В частном случае, когда $f(t) = \delta(t)$, первые два слагаемых в (39) совпадают с точностью до коэффициентов с формулами (29) работы [4]. Исследование совпадения указанных коэффициентов в настоящей работе не представляется возможным, так как эти коэффициенты в работе [4] имеют очень сложные выражения. Члены, соответствующие третьим слагаемым в выражениях (39), в работе [4] отсутствуют. Поэтому утверждение о том, что в работе [4] построено точное поле волн SH, является ошибочным.

Литература

1. И. Н. Успенский, К. И. Огурцов, *Сосредоточенные источники в трансверсально-изотропной упругой среде.* В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, **VI** (1962), 75–83.
2. Л. А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах.* Наука, Ленинград (1984).
3. Л. А. Молотков, *Об источниках типа центра давлений в изотропной и трансверсально-изотропной средах.* В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, **25** (1986), 83–93.
4. V. Vavryčuk, K. Yomogida, *SH-wave Green tensor for homogeneous transversely isotropic media by higher-order approximations in asymptotic ray theory.* — Wave Motion **23** (1996), 83–93.
5. Е. И. Шемякин, В. Л. Файншмидт, *Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой.* — Ученые записки ЛГУ **117** (28) (1954), 148–179.
6. Г. И. Петрашень, И. Н. Успенский, *О распространение волн в слоисто-изотропных упругих средах. I.* — Ученые записки ЛГУ **208** (30) (1956), 58–141.
7. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–122.
8. M. J. P. Musgrave, *Crystal Acoustics. S–F, C, L, Ams.* (1970).
9. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Об источниках типа центров расширения и давления в модели Био.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **230** (1985), 196–213.

Molotkov L. A. On a inner source in transversely isotropic elastic medium.

For a homogeneous transversely isotropic elastic medium excited by a point force acting on isotropy plane, the exact field of displacements is constructed. This field decomposes into waves P-SV and SH. For the waves SH satisfying Lame's equations, the boundary conditions are established and rather simple expressions are derived. These expressions are compared with first terms of the ray series.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 января 2000 г.